



Остатки и конструкция

Теория и разобранные примеры

Урок 30. Остатки и конструкция. Объяснения с начального уровня, исходные примеры с пошаговыми решениями и отдельный тест для самостоятельной проверки.

Как строить число по ограничениям

Конструктивная задача требует не случайной догадки, а примера с проверкой всех свойств. Удобно начинать с условия, которое сильнее всего ограничивает запись: последней цифры, числа разрядов, делимости или набора разрешённых цифр.

Число и его цифры

Для двузначного числа используйте запись $10a + b$, где $1 \leq a \leq 9$ и $0 \leq b \leq 9$. Если перестановка цифр тоже должна быть двузначным числом, дополнительно нужно $b \neq 0$. Условие различных цифр записывается отдельно: $a \neq b$. Алгебраическая формула без этих ограничений допускает лишние варианты.

Признак делимости на девять следует из равенства $10 \equiv 1 \pmod{9}$: число и сумма его цифр дают одинаковый остаток. Для делимости на одиннадцать используем $10 \equiv -1 \pmod{11}$, поэтому появляется чередующаяся сумма цифр. Она может быть отрицательной или нулевой — важно, чтобы она делилась на одиннадцать.

Совместимость условий на остатки

Если число должно давать остаток один при делении на четыре и остаток два при делении на шесть, решения нет. Первое условие требует нечётного числа, второе — чётного. Поэтому перед поиском проверьте, не противоречат ли условия друг другу. Для взаимно простых модулей можно последовательно перебирать числа одной серии и проверять второе условие.

Как доказать минимальность

Найденный пример доказывает существование, но не минимальность. Для наименьшего числа сначала установите нижнюю границу, затем проверьте все допустимые кандидаты ниже найденного. Если число четырёхзначное и кратно m , достаточно рассматривать кратные m , начиная с первого не меньше 1000. Объяснение должно показывать, почему меньшие кандидаты исключены.

В задачах о разрешённых преобразованиях пары чисел предъявите всю цепочку. На каждом шаге проверьте, что операция разрешена, оба числа сохраняют требуемые свойства, а конечная пара совпадает с целью.



Подробные объяснения и разобранные примеры

1. Конструктивные задачи: не угадывать, а строить

В конструктивном пункте 19а требуется предъявить число с несколькими свойствами. Случайный перебор неэффективен. Сначала переведите каждое условие в ограничение: последние цифры отвечают за делимость на 4, 8, 25; сумма цифр — за делимость на 3 и 9; знакопеременная сумма — за делимость на 11.

Делитель	Что проверить
2, 5, 10	последнюю цифру
4, 25	две последние цифры
8, 125	три последние цифры
3, 9	сумму цифр
11	разность сумм цифр на нечётных и чётных местах
составной делитель	совместить признаки взаимно простых множителей

2. Перевод записи числа в алгебру

Двузначное число с цифрами a и b равно $10a + b$, число с переставленными цифрами — $10b + a$. Для трёхзначного числа используйте $100a + 10b + c$. Такая запись особенно сильна, когда в условии меняют порядок цифр, вычитают сумму цифр или сравнивают несколько записей.

$$\begin{aligned}(10a + b) + (10b + a) &= 11(a + b) \\ (100a + 10b + c) - (a + b + c) &= 99a + 9b\end{aligned}$$

Разбор 1. Совместить несколько признаков делимости

УРОВЕНЬ. База • старт

УСЛОВИЕ

Найдите четырёхзначное натуральное число, кратное 45, все цифры которого различны и чётны.

1. Подберём конструкцию: 4680.
2. Все цифры различны и чётны.
3. Последняя цифра 0, сумма цифр 18; число делится на 5 и на 9, значит, делится на 45.



ОТВЕТ. 4680

3. Последовательное построение

Начните с самого жёсткого ограничения: фиксированных последних цифр или небольшого набора допустимых цифр.

Добавьте условие на сумму цифр, меняя свободные разряды.

Проверьте делимость составного числа по всем взаимно простым множителям.

В конце перепишите число и рядом проверьте каждое условие отдельно.

Разбор 2. Число с заданной суммой цифр

УРОВЕНЬ. База

УСЛОВИЕ

Найдите четырёхзначное число, кратное 36, с различными цифрами и суммой цифр 18.

1. Подберём конструкцию: 1296.
2. Проверка делимости: $1296 = 36 \cdot 36$.
3. Цифры 1, 2, 9 и 6 различны; их сумма равна 18.

ОТВЕТ. 1296

4. Системы сравнений

Если число должно давать разные остатки при делении на несколько модулей, выписывайте кандидаты по более крупному шагу. Например, условие $n \equiv 2 \pmod{5}$ задаёт последовательность 2, 7, 12, 17, ... Затем оставляем элементы, удовлетворяющие второму сравнению. Для небольших чисел это надёжнее громоздкой формулы.

Разбор 3. Делимость на 28 и ограничения на цифры

УРОВЕНЬ. Основной

УСЛОВИЕ

Найдите четырёхзначное число, кратное 28, с различными цифрами и нечётной первой цифрой.

1. Подберём конструкцию: 1036.
2. Проверка делимости: $1036 = 28 \cdot 37$.
3. Цифры 1, 0, 3, 6 различны; первая цифра нечётна.

**ОТВЕТ. 1036**

5. Доказательство невозможности

Если конструкция не получается, это ещё не доказательство невозможности. Нужно показать, что ограничения противоречат друг другу. Типичные противоречия: требуемая сумма цифр не соответствует делимости на 9; последняя цифра не совместима с делимостью на 2 или 5; квадрат не может иметь требуемый остаток; допустимое число единиц не даёт нужной суммы цифр.

Разбор 4. Невозможность по сумме цифр

УРОВЕНЬ. Основной**УСЛОВИЕ**

Может ли разность трёхзначного числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, быть равна 2025? Обоснуйте ответ.

1. Для числа $100a + 10b + c$ разность с перевёрнутым равна $99(a - c)$.
2. Она обязана делиться на 99, а 2025 на 99 не делится.

ОТВЕТ. Нет

6. Полнота проверки примера

Условие	Как показать в решении
число натуральное и нужной длины	назвать количество цифр
делится на d	$N = d \cdot k$
остаток r	$N = d \cdot k + r$
цифры различны	перечислить или явно отметить
сумма/произведение цифр	выполнить вычисление
нет решений	исчерпать все допустимые случаи

Разбор 5. Проверка всех ограничений

УРОВЕНЬ. Основной**УСЛОВИЕ**

Существует ли трёхзначное число, которое в 100 раз больше суммы своих цифр?

1. Подберём конструкцию: 100.
2. Сумма цифр числа 100 равна 1, и $100 = 100 \cdot 1$.



ОТВЕТ. 100

Разбор 6. Конструкция через делимость на 5

УРОВЕНЬ. Основной

УСЛОВИЕ

Может ли четырёхзначное число с различными нечётными цифрами делиться на 5? Приведите пример.

1. Подберём конструкцию: 1375.
2. Последняя цифра 5 обеспечивает делимость на 5; цифры 1, 3, 7, 5 различны и нечётны.

ОТВЕТ. 1375

7. Надёжная запись на экзамене

Для положительного ответа достаточно короткой конструкции, но проверка должна быть видимой. Для отрицательного ответа структура длиннее: предполагаем существование, переводим свойства в остатки или ограничения на цифры, получаем противоречие, формулируем вывод. Слова «очевидно» не заменяют ключевой переход.

- Не оставляйте неподходящую пробу в качестве окончательного примера.
- Не используйте цифру, запрещённую условием, даже если делимость выполнена.
- Не путайте сумму цифр и само число при работе по модулю 9: они лишь сравнимы по модулю.
- Проверяйте, что найденное число имеет именно требуемое количество цифр.

САМОПРОВЕРКА КОНСТРУКЦИИ

- ☐ Явно ли предъявлено число или доказана невозможность?
- ☐ Проверено ли каждое условие отдельной строкой?
- ☐ Если использован перебор, объяснено ли, почему он полный?
- ☐ Совпадает ли итоговый вывод с формулировкой вопроса?

8. Близкие аналоги к опорным разборам

Каждый аналог начинайте с алгебраической записи числа или класса остатков. Случайный перебор замените конечной конструкцией с обоснованным шагом.

Близкий аналог 1

Запишите 572 через его цифры.

Переведите запись числа в алгебру и отдельно докажете, что найденная конструкция полна.

1. $572 = 5 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 2$.

**ОТВЕТ К АНАЛОГУ. $500 + 70 + 2$** **Близкий аналог 2**

Найдите сумму цифр числа 90807.

Переведите запись числа в алгебру и отдельно докажите, что найденная конструкция полна.

1. $9 + 0 + 8 + 0 + 7 = 24$.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ. 24**Близкий аналог 3**

Найдите четырёхзначное натуральное число, кратное 12, произведение цифр которого равно 10.

Переведите запись числа в алгебру и отдельно докажите, что найденная конструкция полна.

1. Подберём конструкцию: 1152.
2. Произведение цифр равно 10.
3. Последние две цифры 52 делятся на 4, сумма цифр 9 делится на 3.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ. 1152**Близкий аналог 4**

Найдите четырёхзначное число, кратное 18, цифры которого строго возрастают.

Переведите запись числа в алгебру и отдельно докажите, что найденная конструкция полна.

1. Подберём конструкцию: 1278.
2. Проверка делимости: $1278 = 18 \cdot 71$.
3. Цифры $1 < 2 < 7 < 8$ расположены в строго возрастающем порядке.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ. 1278**Близкий аналог 5**

Может ли разность трёхзначного числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, быть равна 2025? Обоснуйте ответ.

Переведите запись числа в алгебру и отдельно докажите, что найденная конструкция полна.

1. Для числа $100a + 10b + c$ разность с перевёрнутым равна $99(a - c)$.
2. Она обязана делиться на 99, а 2025 на 99 не делится.

**ОТВЕТ К АНАЛОГУ. Нет****Близкий аналог 6**

Существует ли трёхзначное число, которое в 100 раз больше суммы своих цифр?

Переведите запись числа в алгебру и отдельно докажите, что найденная конструкция полна.

1. Подберём конструкцию: 100.
2. Сумма цифр числа 100 равна 1, и $100 = 100 \cdot 1$.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ. 100

9. Итоговая карта урока

Навык	Признак готовности	Если не получилось
запись числа	цифры переведены в разрядную формулу	ввести ограничения на каждую цифру
конструкция	первым использовано самое жёсткое условие	начать с окончания или НОК
полнота	все кандидаты получены конечным способом	указать диапазон и шаг перебора
минимальность	исключены все меньшие допустимые числа	зафиксировать нижнюю границу

10. Конструкции чисел и доказательство минимальности

От цифрового условия к конечной конструкции

Запись числа через цифры превращает словесное условие в алгебру. Трёхзначное число abc — это $100a+10b+c$, где $a \neq 0$, а каждая цифра лежит от 0 до 9. После разворота цифр получается $100c+10b+a$. Разность равна $99(a-c)$, поэтому всегда делится на 9 и 11. Это не наблюдение по примерам, а общее доказательство.

Если требуется построить наименьшее число, начинайте с самого жёсткого условия. Делимость на 25 почти фиксирует две последние цифры. Делимость на 8 определяется тремя последними цифрами. Делимость на 9 связывает сумму всех цифр. Такой порядок быстро сокращает число кандидатов и делает перебор конечным и объяснимым.



Найденный пример ещё не доказывает минимальность. Нужно назвать нижнюю границу и показать, почему все меньшие допустимые кандидаты исключены. Для кратных некоторого числа удобно перейти к арифметической прогрессии: первое кратное нужной разрядности, затем шаг, равный НОК ограничений. Проверять подряд каждое натуральное число не требуется.

В конце решения снова прочитайте все цифровые условия. Проверьте разрядность, ненулевую первую цифру, допустимость повторов, порядок цифр, делимость и требуемый остаток. В задачах на построение именно эта финальная проверка отличает корректную конструкцию от случайно найденного подходящего числа.

Число через его цифры

Трёхзначное число с цифрами a, b, c записывается как $100a + 10b + c$, а число с обратным порядком цифр — $100c + 10b + a$. Эта запись превращает условие о цифрах в обычное уравнение. Ограничения на цифры фиксируются отдельно: $a \in \{1, \dots, 9\}$, $b, c \in \{0, \dots, 9\}$. Нулевая первая цифра недопустима, даже если алгебраическое равенство формально выполняется.

Для четырёх- и пятизначных чисел действует тот же позиционный принцип. Не следует вводить одну переменную для всего числа, если условие связывает отдельные цифры. После нахождения кандидата проверьте количество цифр, их различие, сумму или произведение и все признаки делимости. Один удачный кандидат решает задачу на существование, но задача «найдите все» требует доказать полноту списка.

Признаки делимости как сравнения

Признак делимости на 9 следует из сравнения $10 \equiv 1 \pmod{9}$: число сравнимо с суммой своих цифр. Для 11 имеем $10 \equiv -1 \pmod{11}$, поэтому возникает знакопеременная сумма цифр. Делимость на 4 определяется двумя последними цифрами, потому что 100 делится на 4; на 8 — тремя последними, потому что 1000 делится на 8. Эти объяснения важнее механического списка признаков.

Составной делитель раскладывайте на взаимно простые части. Для делимости на 72 нужно обеспечить делимость на 8 и на 9; для 45 — на 5 и на 9; для 36 — на 4 и на 9. Проверка только одного признака не завершает решение. Если множители не взаимно просты, например 4 и 6, их одновременная делимость даёт НОК 12, а не произведение 24.

Разворот цифр и неизбежные множители

Разность трёхзначного числа и перевёрнутого равна $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99(a - c)$. Поэтому она всегда делится на 99, а средняя цифра b не влияет на разность. Сумма двузначного числа и перевёрнутого равна $11(a + b)$ и всегда делится на 11. Такие тождества дают и доказательство, и быстрый тест возможного ответа.

Если задана конкретная разность, сначала проверьте её делимость на обязательный множитель. Затем найдите $a - c$ и убедитесь, что разность двух цифр лежит между -9 и 9 . Только после этого выбирайте цифры и среднюю цифру. Если требуется несколько примеров, меняйте свободные цифры системно и объясните, почему остальные условия остаются выполненными.



Построение числа без случайного перебора

Конструкцию начинайте с самого жёсткого ограничения. Делимость на 5 или 25 почти фиксирует последние цифры; делимость на 9 задаёт сумму цифр; делимость на 4 или 8 уточняет окончание. После этого распределяйте оставшуюся сумму между свободными цифрами и только затем проверяйте различие или порядок. Такой порядок резко сокращает число кандидатов.

В решении нужно показать, почему выбранная конструкция работает. Фразы «подбором получаем» недостаточно, если требуется обоснование. Запишите использованные признаки делимости, вычислите сумму цифр или последние разряды, затем предъявите число и выполните деление либо сравнение. Для отрицательного ответа объясните, какое ограничение вступает в противоречие с другим.

Системы остатков и период решения

Если число должно давать разные остатки при делении на m и n , запишите его в виде $x = a + mk$ и решите сравнение для k . При взаимно простых модулях общий класс повторяется через mn . Например, условия по модулям 3 и 5 дают период 15. На отрезке или среди чисел заданной разрядности перечислите представителей этого класса до достижения верхней границы.

Если модули имеют общий делитель, сначала проверьте совместимость остатков. Сравнения $x \equiv a \pmod{m}$ и $x \equiv b \pmod{n}$ совместны только тогда, когда a и b дают одинаковый остаток по модулю $\gcd(m, n)$. Это условие позволяет доказать невозможность без перебора. При совместности период равен НОК модулей.

Границы и доказательство минимальности

В задаче на наименьшее число недостаточно привести подходящий пример. Нужно доказать, что меньшего нет. После получения арифметической прогрессии кандидатов выберите первый член, попадающий в требуемый диапазон. Если конструкция идёт по цифрам, обоснуйте, почему меньшая первая цифра или меньшее окончание не может удовлетворить признакам делимости.

Для наибольшего числа рассуждение симметрично: начинайте с максимальной первой цифры, но учитывайте ограничения на сумму и различие цифр. Удобно разделять поиск и проверку: сначала математически сузить множество, затем проверить оставшиеся два-три кандидата. Полный перебор всех четырёхзначных чисел не является разумной экзаменационной записью, даже если даёт правильный ответ.

Финальная проверка конструкции

Проверяйте условия в том же порядке, в котором они перечислены: натуральность и разрядность, допустимость цифр, их различие, сумма или произведение, делимость и дополнительные остатки. Отдельно вычислите требуемое частное или остаток. Такой список занимает несколько строк, но делает пример полностью доказанным и защищает от незаметного нарушения одного ограничения.



Если ответ отрицательный, заключение должно опираться на исчерпывающий аргумент: обязательный остаток, невозможную сумму цифр, несовместимую систему сравнений или границу для цифр. Нельзя завершать словами «подходящих чисел не найдено». Экзаменационный критерий оценивает именно доказанную невозможность, а не результат неопisanного поиска.

Остатки последних разрядов

Последняя цифра числа — его остаток по модулю 10, две последние цифры — остаток по модулю 100. Поэтому условие делимости на 25 определяется именно парой последних цифр: возможны 00, 25, 50 и 75. Формулировка только об одной последней цифре недостаточна. Аналогично, для делимости на 4 рассматривается двузначное окончание, а не каждая цифра отдельно.

При построении числа сначала выпишите все допустимые окончания, затем совместите их с суммой цифр и прочими ограничениями. Если цифры должны быть различны, окончания с повтором исключаются сразу. Если число должно быть чётным, последняя цифра выбирается из 0, 2, 4, 6, 8, но ведущая цифра по-прежнему не может быть нулём.

Параметр в записи числа

Когда одна цифра неизвестна, обозначьте её d и используйте диапазон $0 \leq d \leq 9$. Признак делимости превращается в сравнение или короткое уравнение. Например, для делимости на 9 сумма известных цифр плюс d должна быть кратна 9. После нахождения d проверьте, что значение действительно является цифрой и не нарушает условие о различии.

Если неизвестны две цифры, сначала найдите связь между ними, затем используйте границы. Уравнение $a + b = 17$ имеет мало цифровых решений, а условие чётности или последней цифры сокращает список ещё сильнее. В ответе перечисляйте все допустимые числа, если вопрос не просит только один пример.

Конструкции с НОК

Число, удовлетворяющее нескольким условиям делимости, должно быть кратно НОК соответствующих делителей. Сначала вычислите НОК и найдите его кратные нужной разрядности. Затем применяйте цифровые ограничения. Этот путь удобен, когда делители небольшие, а признаки по цифрам не дают прямой конструкции.

Если требуется наименьшее число, возьмите первое кратное НОК в диапазоне и двигайтесь вверх с шагом НОК, каждый раз проверяя цифры. В чистовом решении укажите стартовую границу и шаг, чтобы перебор был конечным и обоснованным. Случайный просмотр чисел подряд скрывает математическую структуру.

Проверка ответа делением с остатком

Даже если число построено по признакам, финальная проверка должна быть числовой. Для каждого делителя запишите либо частное, либо остаток. Если условие задаёт остаток r , используйте равенство $N = mq + r$ с $0 \leq r < m$. Остаток, равный или больший делителя, нужно привести к стандартному виду.



При нескольких найденных числах достаточно показать общую конструкцию и один раз объяснить, почему признаки работают, но каждое число должно соответствовать цифровым ограничениям. Если ответ единственный, докажите, что другие окончания, суммы или классы остатков исключены. Полнота — обязательная часть задач на «найдите все» и «наименьшее».

Контрольный разбор: число, кратное 72

Делимость на 72 равносильна одновременной делимости на 8 и 9, потому что $72 = 8 \cdot 9$ и числа 8 и 9 взаимно просты. Для пятизначного числа сначала подберите последние три цифры, кратные 8. Затем дополните первые разряды так, чтобы сумма всех цифр делилась на 9. Если разрешён ограниченный набор цифр, выпишите возможные суммы, а не перебирайте все перестановки.

После построения кандидата проверьте обе части отдельно. Например, последние три цифры действительно должны делиться на 8, а сумма всех цифр — на 9. Затем выполните деление всего числа на 72 или укажите, что взаимная простота 8 и 9 завершает доказательство. Если цифры должны быть различными, это условие проверяется до финальной строки, а не предполагается по внешнему виду числа.

Контрольный разбор: разность числа и суммы цифр

Для числа $N = 100a + 10b + c$ сумма цифр равна $a+b+c$. Разность $N - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b)$, поэтому она всегда делится на 9. Аналогично для любого количества разрядов: каждая степень 10 сравнима с 1 по модулю 9. Это общее доказательство сразу охватывает все натуральные числа.

Если задача задаёт конкретное значение разности, сначала проверьте делимость этого значения на 9. Затем используйте разрядность и границы цифр. Для трёхзначного числа выражение $99a + 9b$ лежит в ограниченном диапазоне, что позволяет доказать невозможность или найти все пары a, b . Цифра c в разность не входит и после нахождения пары может оставаться свободной, если нет дополнительных условий.

Контрольный разбор: наименьший представитель

Если решена система сравнений и получен класс $x = x_0 + Mt$, задача на наименьшее многозначное число становится задачей о границе. Найдите минимальное целое t , для которого $x \geq 10^{k-1}$, где k — требуемое число цифр. Полученный кандидат автоматически минимален среди членов класса, но цифровые ограничения могут его исключить. Тогда переходите к следующему члену с шагом M .

В чистовом решении укажите вычисленную нижнюю границу для t , первый допустимый кандидат и проверку всех признаков. Если пришлось пропустить несколько членов из-за цифр, перечислите именно эти исключения и причину. Такой ограниченный перебор математически обоснован и показывает минимальность, в отличие от случайного поиска по диапазону.

Расчётные таблицы для объяснения и проверки

Таблицы ниже связывают цифровую запись числа с признаками делимости и проверкой минимальности.

**Признаки делимости в конструкции**

Подписанная версия — используйте для разбора

Делитель	Что проверять	Основание
4	две последние цифры	100 кратно 4
8	три последние цифры	1000 кратно 8
9	сумму цифр	$10 \equiv 1$
11	знакопеременную сумму	$10 \equiv -1$

Иллюстрация к условию задания.

Таблица 1. Подписанная версия для разбора.

Разворот трёхзначного числа

Подписанная версия — используйте для разбора

Объект	Запись	Упрощение
abc	$100a+10b+c$	—
cba	$100c+10b+a$	—
$abc-cba$	$99a-99c$	$=99(a-c)$
Контроль	$a \neq 0$	$ a-c \leq 9$

Иллюстрация к условию задания.

Таблица 2. Подписанная версия для разбора.

Система остатков

Подписанная версия — используйте для разбора

Шаг	Запись	Результат
1	$x \equiv 2 \pmod{3}$	$x=2+3k$
2	$2+3k \equiv 3 \pmod{5}$	$=k \equiv 2$
3	$k=2+5t$	$=x=8+15t$
4	проверка	$\pmod{3}$ и $\pmod{5}$

Иллюстрация к условию задания.

Таблица 3. Подписанная версия для разбора.



Источники и ориентиры

- ФИПИ. Методические рекомендации обучающимся по организации самостоятельной подготовки к ЕГЭ-2026 по математике. [Открыть источник](#)
- ФИПИ. Навигатор самостоятельной подготовки к ЕГЭ-2026: математика, профильный уровень. [Открыть источник](#)
- ФИПИ. Открытый банк заданий ЕГЭ: математика, профильный уровень. [Открыть источник](#)
- ФИПИ. Открытые варианты КИМ ЕГЭ-2026. [Открыть источник](#)

Разборы экзаменационных задач

КАК РАБОТАТЬ С РАЗДЕЛОМ

Это разборы 7 и 8. Условия пересказаны без изменения математической модели; рядом указан первоисточник. Сначала закройте решение и составьте собственную модель, затем сравните каждый шаг.

Разбор 7. Письма: уравнение в натуральных числах

ИСТОЧНИК	УРОВЕНЬ	ТРЕНИРУЕМ
ФИПИ, открытый вариант КИМ ЕГЭ-2025, задача 19а; условие пересказано Открыть источник	официальный КИМ • задача 19а	делимость, параметры и явная конструкция

Условие

В группе поровну юношей и девушек. Каждый юноша отправил либо 5, либо 16 писем; юношей каждого типа не меньше двух. Один адресат мог получить несколько писем от одного отправителя.

Могла ли каждая девушка получить ровно 7 писем?

До решения: что заметить

- Пусть x юношей отправили по 5 писем, y юношей — по 16.
- Девушек столько же, сколько юношей: $x + y$.
- Сравниваем общее число отправленных и полученных писем.

Решение по шагам

Шаг 1. Составляем баланс. Исходящих писем $5x + 16y$, входящих — $7(x + y)$:

$$5x + 16y = 7(x + y)$$

Шаг 2. Получаем условие делимости. Переносим слагаемые:

$$9y = 2x$$



Шаг 3. Выбираем параметры. Берём $y = 2$; тогда $x = 9$. Оба ограничения «не меньше двух» выполнены.

$$x = 9, \quad y = 2$$

Шаг 4. Проверяем общий итог. Юношей и девушек по 11, писем 77:

$$5 \cdot 9 + 16 \cdot 2 = 77 = 7 \cdot 11$$

Шаг 5. Обосновываем распределение. Так как повторные письма разрешены, 77 писем можно распределить по 7 каждой из 11 девушек.

Проверка

- Юношей обоих типов 9 и 2.
- Число девушек совпадает с общим числом юношей.

ТИПИЧНАЯ ОШИБКА

Остановиться на равенстве сумм и забыть ограничения $x \geq 2$, $y \geq 2$. Выбранный пример обязан выполнить их.

ОТВЕТ. Да: 9 юношей отправляли по 5 писем, 2 — по 16

Разбор 8. Операция над парой чисел

ИСТОЧНИК	УРОВЕНЬ	ТРЕНИРУЕМ
ФИПИ, демонстрационный вариант ЕГЭ-2026, задача 19а; условие пересказано Открыть источник	официальная демоверсия • задача 19а	пошаговая конструкция

Условие

Для натуральных $a > b$ разрешён ход: пару $(a; b)$ заменяют на $(a + b; a - b)$. Можно ли, начав с $(100; 1)$, получить пару, в которой большее число равно 400?

$$(a, b) \mapsto (a + b, a - b)$$

До решения: что заметить

- Для ответа «да» достаточно предъявить цепочку разрешённых ходов.
- После каждого хода проверяем натуральность и порядок компонентов.
- Полезная проверка: два последовательных хода превращают $(a; b)$ в $(2a; 2b)$.

Решение по шагам

Шаг 1. Первый ход. Складываем и вычитаем компоненты:

$$(100, 1) \mapsto (101, 99)$$

Шаг 2. Второй ход. Повторяем операцию:

$$(101, 99) \mapsto (200, 2)$$

Шаг 3. Третий ход. Получаем ещё одну допустимую пару:

$$(200, 2) \mapsto (202, 198)$$



Шаг 4. Четвёртый ход. Теперь сумма компонентов равна 400:

$$(202, 198) \mapsto (400, 4)$$

Шаг 5. Делаем вывод. В последней паре большее число равно 400.

Проверка

- На каждом шаге первый компонент больше второго и оба натуральные.
- После двух ходов компоненты удвоились; после четырёх — увеличились в четыре раза.

ТИПИЧНАЯ ОШИБКА

Записать только конечную пару. Нужно показать, что она получена именно разрешёнными ходами.

ОТВЕТ. Да: за четыре хода получается (400; 4)