

Урок 9. Неравенства и метод интервалов

В неравенстве нужно найти всё множество подходящих значений. Разберём, когда меняется знак сравнения, как расставлять знаки методом интервалов и какие граничные точки включать в ответ. Отдельно рассмотрим системы, корни чётной кратности и ограничения логарифмов.

Восемь разборов ведут от линейных неравенств к рациональным и логарифмическим. Числовая ось помогает увидеть промежутки решений. После теории можно проверить себя в тесте на 40 заданий.

01. Чем неравенство отличается от уравнения

Уравнение требует равенства двух выражений, а неравенство - выполнения сравнения. Решением может быть целый промежуток, несколько промежутков, отдельные точки или пустое множество. Например, $x + 3 > 7$ выполняется при любом $x > 4$.

К обеим частям неравенства можно прибавить одно и то же число. Умножение или деление на положительное число сохраняет знак, на отрицательное - меняет его на противоположный. Из $-2x > 6$ получаем $x < -3$. Это соответствует порядку на числовой оси: после смены знака числа располагаются в обратном порядке.

Осторожно со знаменателем. Нельзя просто умножить неравенство на выражение с неизвестным, если его знак не установлен. У $x - 2$ знак зависит от x , поэтому для рациональных неравенств удобен метод интервалов.

02. Как записывать множество решений

Круглая скобка означает, что граница не входит, квадратная - что входит. Например, $1 < x \leq 4$ записывают как $(1; 4]$. Бесконечность не является числом, которое можно включить, поэтому возле $-\infty$ и $+\infty$ всегда ставят круглую скобку.

Слово «и» означает одновременное выполнение условий - пересечение множеств. Слово «или» означает объединение. Система $x > 1$ и $x \leq 4$ даёт $(1; 4]$. Условия $x < -2$ или $x \geq 3$ дают $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

Двойное неравенство также является системой. В $2x - 1 \leq x + 4 < 3x + 2$ решают оба сравнения: $x \leq 5$ и $x > 1$. Затем находят общую часть: $(1; 5]$.

03. Метод интервалов: полный алгоритм

Для произведения или дроби из многочленов сначала перенесите всё в одну часть, чтобы с другой стороны оказался ноль. Если есть дроби, приведите их к общему знаменателю с сохранением исходной ОДЗ.

1. Разложите числитель и знаменатель на множители.
2. Найдите нули числителя и знаменателя.
3. Отметьте их на числовой оси по возрастанию. Запрещённые значения исключите.

4. Определите знак на каждом открытом интервале между точками.
5. Выберите интервалы с требуемым знаком.
6. Отдельно решите, какие граничные точки входят в ответ.

Знак можно проверить подстановкой одного удобного числа из интервала: внутри него ни один множитель не проходит через ноль, поэтому знак не меняется. Например, для $(x-2)(x+1) > 0$ точки -1 и 2 дают три интервала. Подстановки -2 , 0 и 3 показывают знаки «плюс, минус, плюс». Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Ноль числителя и ноль знаменателя

При нестрогом знаке ноль числителя можно включить, только если выражение там определено. Ноль знаменателя исключают всегда. Поэтому $\frac{x+2}{x-4} \leq 0$ имеет решение $[-2; 4)$: -2 допускается, 4 запрещено.

После сокращения общий нулевой множитель не восстанавливает исключённую точку. В $\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$ исходное ограничение $x \neq 1$ сохраняется, даже если при вычислениях дробь заменяется на $x+2$.

04. Кратность корня и изолированные точки

У простого линейного множителя знак при переходе через ноль меняется. У множителя чётной степени, например $(x-2)^2$, знак не меняется. У нечётной степени - меняется. Это правило относится к полной кратности точки после учёта множителей; исходные запрещённые значения всё равно сохраняются.

Не следует автоматически чередовать знаки через каждую отмеченную точку. В $(x-2)^2(x+3) \leq 0$ квадрат положителен при $x \neq 2$, поэтому вне точки 2 знак определяется $x+3$. Получаем $x \leq -3$, а также отдельное решение $x = 2$, где произведение равно нулю. Ответ: $(-\infty; -3] \cup \{2\}$.

Самопроверка. При нестрогом знаке отдельно проверьте все допустимые нули выражения. Так вы не потеряете точку, которая не примыкает к выбранному интервалу.

05. Степени, логарифмы и замена переменной

При основании $a > 1$ показательная и логарифмическая функции возрастают; при $0 < a < 1$ убывают. Поэтому из $2^x > 2^3$ следует $x > 3$, а из $(\frac{1}{2})^x > (\frac{1}{2})^3$ следует $x < 3$.

Для логарифмов сначала находят ОДЗ. Например, $\log_2(x-1) \leq 3$ требует $x > 1$. Затем сравнивают аргумент со степенью основания: $x-1 \leq 8$. Совместный ответ - $(1; 9]$.

В сложном выражении можно ввести $t = \log_2 x$. Тогда $x > 0$, а t может быть любым действительным числом. Если логарифм стоит в знаменателе, добавляется $t \neq 0$, то есть $x \neq 1$. При замене $t = 2^x$ ограничение другое: обязательно $t > 0$.

После решения по t вернитесь к x . Например, $-1 \leq \log_2 x \leq 2$ даёт $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$. Не оставляйте интервалы для вспомогательной переменной в качестве окончательного ответа.

06. Неравенство с корнем и модулем

Из $\sqrt{x-1} \leq 3$ при ОДЗ $x \geq 1$ можно получить $x-1 \leq 9$, поскольку обе сравниваемые величины неотрицательны. Ответ - $[1; 10]$. Без ОДЗ в ответ ошибочно попал бы весь луч $x \leq 10$.

Неравенство $|x| < a$ при $a > 0$ означает, что расстояние до нуля меньше a , то есть $-a < x < a$. Для $|x| > a$ при $a > 0$ выбираются два внешних луча. Границы включаются при нестрогом знаке.

07. Примеры с пошаговыми решениями

Разбор 1. Линейное неравенство и разворот знака

Условие

Решите неравенство.

$$-3x + 6 \leq 0$$

Короткое правило.

При делении обеих частей неравенства на отрицательное число знак меняется на противоположный.

До решения.

При $x=0$ левая часть равна $6 > 0$ и не подходит. Значит, ответ должен лежать правее некоторой точки.

1. Переносим число

$$-3x \leq -6$$

Вычитаем 6 из обеих частей.

2. Делим на -3

$$x \geq 2$$

Отрицательный делитель разворачивает знак $\leq$ в $\geq$.

3. Записываем промежуток

$$x \in [2; +\infty)$$

Точка 2 включается, потому что неравенство нестрогое.

Проверка. $x=2$ даёт 0 и подходит; $x=3$ даёт $-3 \leq 0$; $x=1$ даёт $3 \leq 0$ - неверно.

Типичная ошибка. Разделить на -3 и оставить знак $\leq$ без изменения.

Ответ.

$$x \in [2; +\infty)$$

Разбор 2. Двойное неравенство

Условие

Решите двойное неравенство.

$$-1 < 2x + 3 \leq 7$$

Короткое правило.

Выполняем одно и то же действие сразу с тремя частями двойного неравенства.

До решения.

Коэффициент при x положителен, поэтому при делении на 2 направления знаков сохранятся.

1. Вычитаем 3

$$-4 < 2x \leq 4$$

Из каждой из трёх частей вычитаем одно число.

2. Делим на 2

$$-2 < x \leq 2$$

Положительный делитель не меняет знаки.

3. Записываем промежуток

$$x \in (-2; 2]$$

Левая граница строгая, правая - нестрогая.

Проверка. $x=0$ даёт $-1 < 3 \leq 7$; $x=-2$ даёт строгое равенство слева и не подходит; $x=2$ подходит.

Типичная ошибка. Потерять один из знаков и решить только половину двойного неравенства.

Ответ.

$$x \in (-2; 2]$$

Разбор 3. Произведение двух линейных множителей

Условие

Решите неравенство.

$$(x - 4)(x + 1) > 0$$

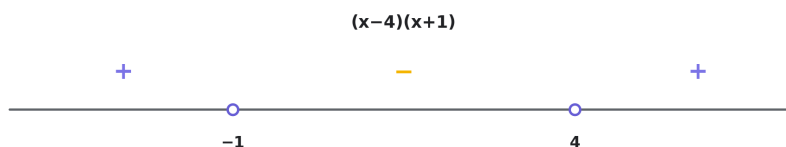


Рис. 1: Знаки произведения $(x-4)(x+1)$ на интервалах с границами -1 и 4 .

Короткое правило.

Произведение положительно, когда множители имеют одинаковые знаки. Метод интервалов показывает это без двух отдельных систем.

До решения.

Критические точки -1 и 4 делят ось на три интервала. Поскольку старший коэффициент положителен, справа знак плюс.

1. Находим нули

$$x = -1, \quad x = 4$$

Каждый линейный множитель обращается в ноль в своей точке.

2. Расставляем знаки

$$(+)\quad (-)\quad (+)$$

При переходе через простой корень знак произведения меняется.

3. Выбираем положительные интервалы

$$x < -1 \quad \text{или} \quad x > 4$$

Нужен знак строго больше нуля.

4. Учитываем строгость

$$x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$$

В точках -1 и 4 произведение равно нулю, поэтому они не входят.

Проверка. Тестовые точки: $x = -2$ даёт $(+)$, $x = 0$ даёт $(-)$, $x = 5$ даёт $(+)$.

Типичная ошибка. Включить точки -1 и 4 при строгом знаке > 0 .

Ответ.

$$x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$$

Разбор 4. Корень чётной кратности

Условие

Решите неравенство.

$$(x - 2)^2(x + 3) \leq 0$$

Короткое правило.

Квадратный множитель неотрицателен и не меняет знак при переходе через свой корень. Но сам корень может войти в ответ при нестрогом знаке.

До решения.

Знак выражения почти везде определяется $x+3$. Отдельно нельзя забыть точку $x=2$, где квадрат равен нулю.

1. Отмечаем критические точки

$$x = -3 \text{ (кратность 1), } \quad x = 2 \text{ (кратность 2)}$$

Кратность определяет, меняется ли знак.

2. Определяем знаки

$$(-\infty; -3) : -, \quad (-3; 2) : +, \quad (2; +\infty) : +$$

При -3 знак меняется; при 2 - нет.

3. Выбираем ≤ 0

$$x \in (-\infty; -3] \cup \{2\}$$

Берём отрицательный интервал и обе нулевые точки.

Проверка. $x=0$ даёт $4 \cdot 3 > 0$ и не входит; $x=2$ даёт 0 и входит; $x=-4$ даёт $36 \cdot (-1) < 0$.

Типичная ошибка. Автоматически чередовать знаки в каждой точке и поменять знак около корня $x=2$.

Ответ.

$$x \in (-\infty; -3] \cup \{2\}$$

Разбор 5. Рациональное неравенство

Условие

Решите неравенство.

$$\frac{x + 2}{x - 4} \leq 0$$

Короткое правило.

Ноль числителя может входить при нестрогом знаке; ноль знаменателя исключается всегда.

До решения.

Критические точки -2 и 4 имеют разный статус: -2 - ноль выражения, 4 - запрещённое значение.

1. Фиксируем ОДЗ

$$x \neq 4$$

Знаменатель не равен нулю.

2. Находим ноль числителя

$$x = -2$$

При $x = -2$ дробь равна нулю и может войти в ответ.

3. Расставляем знаки

$$(+)\quad (-)\quad (+)$$

На интервалах $(-\infty; -2)$, $(-2; 4)$, $(4; +\infty)$ знаки чередуются.

4. Выбираем ≤ 0

$$x \in [-2; 4)$$

-2 включаем, 4 исключаем.

Проверка. $x=0$ даёт $2/(-4)<0$; $x=-2$ даёт 0 ; $x=5$ даёт $7>0$.

Типичная ошибка. Включить $x=4$ из-за нестрогого знака, забыв, что выражение там не существует.

Ответ.

$$x \in [-2; 4)$$

Разбор 6. Логарифмическое неравенство с заменой**Условие**

Решите неравенство.

$$\frac{4}{\log_2 x} - \log_2 \frac{4}{x} \leq \frac{38}{\log_2(x^2)}$$

Короткое правило.

Сначала находим ОДЗ, затем вводим $t = \log_2 x$. Рациональное неравенство по t решаем методом интервалов и переводим результат обратно к x .

До решения.

Нужно $x > 0$ и $\log_2 x \neq 0$, то есть $x \neq 1$. При замене $t = \log_2 x$ получаем $t \neq 0$.

1. Записываем ОДЗ и замену

$$x > 0, \quad x \neq 1; \quad t = \log_2 x, \quad t \neq 0$$

Аргументы логарифмов положительны, знаменатели ненулевые.

2. Преобразуем логарифмы

$$\log_2 \frac{4}{x} = 2 - t, \quad \log_2 (x^2) = 2t$$

Используем свойства логарифма произведения и степени.

3. Получаем рациональное неравенство

$$\frac{4}{t} - (2 - t) \leq \frac{19}{t} \Leftrightarrow \frac{(t - 5)(t + 3)}{t} \leq 0$$

Переносим всё влево и раскладываем $t^2 - 2t - 15$.

4. Решаем по t

$$t \in (-\infty; -3] \cup (0; 5]$$

Критические точки -3 , 0 и 5 ; $t=0$ исключается.

5. Возвращаемся к x

$$x \in \left(0; \frac{1}{8}\right] \cup (1; 32]$$

Основание $2 > 1$: $t \leq -3$ даёт $x \leq 2^{-3}$, а $0 < t \leq 5$ - $1 < x \leq 32$.

Проверка. Границы $x=1/8$ и $x=32$ дают равенство; $x=1$ исключён из ОДЗ.

Типичная ошибка. Сократить или умножить неравенство на t без учёта неизвестного знака t .

Ответ.

$$x \in \left(0; \frac{1}{8}\right] \cup (1; 32]$$

Разбор 7. Логарифмическое неравенство после объединения логарифмов**Условие**

Решите неравенство.

$$\log_{11} (2x^2 + 1) + \log_{11} \left(\frac{1}{32x} + 1 \right) \geq \log_{11} \left(\frac{x}{16} + 1 \right)$$

Короткое правило.

Сначала строим полное ОДЗ. На ОДЗ объединяем логарифмы и, поскольку основание $11 > 1$, сравниваем положительные аргументы без разворота знака.

До решения.

Первый аргумент положителен всегда. Два остальных условия дают ОДЗ $(-16; -1/32) \cup (0; +\infty)$.

1. Записываем ОДЗ

$$x \in \left(-16; -\frac{1}{32}\right) \cup (0; +\infty)$$

Нужно $(32x+1)/(32x) > 0$ и $x+16 > 0$.

2. Сравниваем аргументы

$$(2x^2 + 1) \left(1 + \frac{1}{32x}\right) \geq 1 + \frac{x}{16}$$

Сумма логарифмов превращается в логарифм произведения; основание больше 1.

3. Переносим в одну дробь

$$\frac{64x^3 + 1}{32x} \geq 0$$

После приведения к общему знаменателю сокращаются слагаемые $2x^2$ и $32x$.

4. Факторизуем

$$\frac{(4x + 1)(16x^2 - 4x + 1)}{32x} \geq 0$$

Квадратный множитель всегда положителен: его дискриминант отрицателен.

5. Решаем и пересеем с ОДЗ

$$x \in \left(-16; -\frac{1}{4}\right] \cup (0; +\infty)$$

Знак определяет дробь $(4x+1)/x$; точку $-1/4$ включаем, $x=0$ исключаем.

Проверка. $x = -1/4$ даёт равенство; $x = -16$ и $x = 0$ не входят в ОДЗ.

Типичная ошибка. Решать преобразованную дробь без пересечения с исходным ОДЗ логарифмов.

Ответ.

$$x \in \left(-16; -\frac{1}{4}\right] \cup (0; +\infty)$$

Разбор 8. Логарифмическое неравенство со степенью аргумента**Условие**

Решите неравенство.

$$7 \log_{12} (x^2 - 13x + 42) \leq 8 + \log_{12} \frac{(x-7)^7}{x-6}$$

Короткое правило.

На ОДЗ переводим множитель перед логарифмом в степень аргумента, константу - в логарифм степени основания, а затем сокращаем только положительные выражения.

До решения.

$x^2 - 13x + 42 = (x-6)(x-7)$. Оба логарифмических аргумента положительны при $x < 6$ или $x > 7$.

1. Находим ОДЗ

$$x \in (-\infty; 6) \cup (7; +\infty)$$

На этих промежутках положительны и $(x-6)(x-7)$, и $(x-7)^7/(x-6)$.

2. Переходим к аргументам

$$((x-6)(x-7))^7 \leq 12^8 \frac{(x-7)^7}{x-6}$$

Основание $12 > 1$, а $8 = \log_{12}(12^8)$.

3. Делим на положительный аргумент

$$(x-6)^8 \leq 12^8$$

На ОДЗ дробь $(x-7)^7/(x-6)$ положительна, поэтому знак не меняется.

4. Извлекаем корень чётной степени

$$|x-6| \leq 12 \Rightarrow -6 \leq x \leq 18$$

Для восьмой степени получаем двойное ограничение по модулю.

5. Пересекаем с ОДЗ

$$x \in [-6; 6) \cup (7; 18]$$

Точки 6 и 7 исключены аргументами логарифмов.

Проверка. Границы -6 и 18 дают равенство; точки 6 и 7 недопустимы.

Типичная ошибка. Сократить $(x-7)^7$ до записи ОДЗ или включить точки 6 и 7 из-за нестрогого знака.

Ответ.

$$x \in [-6; 6) \cup (7; 18]$$

08. Основные формулы

$$a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 : P(x) = 0 \text{ можно включить, } Q(x) = 0 \text{ нельзя}$$

$$(x-a)^{2k} \text{ не меняет знак в точке } a$$

$$a^u < a^v \Leftrightarrow u < v \quad (a > 1)$$

09. Вопросы по теме

Включать ли нули знаменателя при нестрогом знаке?

Нет. В этих точках дробь не определена. Нестрогий знак разрешает равенство нулю, но не деление на ноль.

Почему знак иногда не меняется при переходе через корень?

Множитель чётной степени имеет один и тот же знак с обеих сторон своего нуля. Учитывайте кратность, а не чередуйте знаки автоматически.