



Числа, вычисления и свойства чисел

Задания, решения и ответы

40 заданий с пошаговыми решениями и ответами. Сначала выполните задание самостоятельно, затем сравните ход рассуждений с разбором.

01. Основа метода: задания 1-10

Задание 1

Разложите 360 на простые множители и найдите число его натуральных делителей.

Имеем $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Делитель выбирается независимо по показателям: $2^i 3^j 5^k$, где $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq 2$, $0 \leq k \leq 1$. **Ответ.** $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$ делителя.

Задание 2

Найдите $\gcd(84, 126)$ и $\text{lcm}(84, 126)$. Затем проверьте их произведение.

Шаг 1. Разложим числа: $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Шаг 2. Для НОД берём минимальные показатели общих простых множителей: $\gcd(84, 126) = 42$.

Шаг 3. Для НОК берём максимальные показатели всех простых множителей: $\text{lcm}(84, 126) = 252$.

Ответ. $\gcd = 42$, $\text{lcm} = 252$

Задание 3

Докажите, что $2n+1$ и $4n+4$ взаимно просты при любом натуральном n .

Любой общий делитель делит разность $(4n+4) - 2(2n+1) = 2$. При этом он делит нечётное число $2n+1$. Общий положительный делитель может быть только 1.

Ответ. $\text{НОД}(2n+1, 4n+4) = 1$.

Задание 4

Найдите число натуральных делителей 216 и число тех из них, которые являются квадратами.

Так как $216 = 2^3 \cdot 3^3$, каждый делитель имеет вид $2^i 3^j$, $0 \leq i, j \leq 3$. Всего $4 \cdot 4 = 16$ делителей. Квадрат требует чётных показателей: $i, j \in \{0, 2\}$. Это числа 1, 4, 9, 36.

Ответ. 16 делителей, из них 4 квадрата.



Делители 216 имеют вид $2^i \cdot 3^j$. Четыре зелёные точки соответствуют квадратам.

Задание 5

Найдите наименьшее натуральное число, делящееся одновременно на 12, 15 и 18.

Разложения: $12 = 2^2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, $18 = 2 \cdot 3^2$. Для кратности всем трём числам выбираем максимальный показатель каждого простого. **Ответ.**

$\text{НОК}(12, 15, 18) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$.

Задание 6

Сколько целых чисел от 100 до 200 включительно делятся на 7?

Пишем $n = 7k$. Условие $100 \leq 7k \leq 200$ даёт целые $k = 15, 16, \dots, 28$. Их $28 - 15 + 1 = 14$. Границы 100 и 200 не кратны 7. **Ответ.** 14.

Задание 7

Докажите, что квадрат любого нечётного целого числа даёт остаток 1 при делении на 8.

Пусть $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $n^2 = 4k(k + 1) + 1$. Одно из соседних чисел $k, k + 1$ чётно, поэтому $4k(k + 1)$ делится на 8. **Ответ.** $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ для каждого нечётного n .

Задание 8

Выполните деление -137 на 11 с остатком: найдите целые q, r , где $-137 = 11q + r$ и $0 \leq r < 11$.

Ближайшее кратное 11 , не превосходящее -137 , равно $-143 = 11 \cdot (-13)$. Поэтому $-137 = -143 + 6$. Условие на остаток выполнено: $0 \leq 6 < 11$. **Ответ.** $q = -13, r = 6$.

Задание 9

Найдите все натуральные числа n , дающие остаток 2 при делении на 5 и остаток 3 при делении на 7 .

Шаг 1. Пишем $n = 5k + 2$. По модулю 7 требуется $5k \equiv 1$.

Шаг 2. Число 3 обратно к 5 по модулю 7 , поэтому $k \equiv 3 \pmod{7}$. Подставляем $k = 3 + 7t$.

Ответ. $n = 17 + 35t, t = 0, 1, 2, \dots$ При $t \leq -1$ число отрицательно.

Задание 10

Найдите все натуральные n , для которых $\frac{84}{n}$ является простым числом.

Если $\frac{84}{n} = p$ простое, то p должно быть простым делителем 84 . Из $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ получаем $p = 2, 3, 7$ и соответственно $n = 42, 28, 12$. Обратная подстановка подтверждает каждый вариант. **Ответ.** $12, 28, 42$.

02. Преобразования и ограничения: задания 11-16**Задание 11**

Алгоритмом Евклида найдите $\gcd(252, 198)$ и представьте его в виде $252x + 198y$.

Шаг 1. Применяем алгоритм Евклида: $252 = 1 \cdot 198 + 54$; $198 = 3 \cdot 54 + 36$; $54 = 1 \cdot 36 + 18$; $36 = 2 \cdot 18 + 0$.

Шаг 2. Последний ненулевой остаток равен 18 , следовательно, $\gcd(252, 198) = 18$.

Шаг 3. Двигаемся по равенствам назад и выражаем последний остаток через исходные числа.

Шаг 4. Получаем тождество Безу: $18 = 252 \cdot (4) + 198 \cdot (-5)$.

Шаг 5. Проверка: $1008 + (-990) = 18$.

Ответ. $\gcd = 18$; например, $x = 4, y = -5$

Задание 12

Алгоритмом Евклида найдите $\gcd(391, 299)$ и представьте его в виде $391x + 299y$.

Шаг 1. Применяем алгоритм Евклида: $391 = 1 \cdot 299 + 92$; $299 = 3 \cdot 92 + 23$;
 $92 = 4 \cdot 23 + 0$.

Шаг 2. Последний ненулевой остаток равен 23, следовательно, $\gcd(391, 299) = 23$.

Шаг 3. Двигаемся по равенствам назад и выражаем последний остаток через исходные числа.

Шаг 4. Получаем тождество Безу: $23 = 391 \cdot (-3) + 299 \cdot (4)$.

Шаг 5. Проверка: $-1173 + (1196) = 23$.

Ответ. $\gcd = 23$; например, $x = -3$, $y = 4$

Задание 13

Найдите остаток от деления числа 3^{17} на 5.

Шаг 1. Выписываем остатки последовательных степеней 3 по модулю 5: 1, 3, 4, 2.

Шаг 2. Цикл начинается с позиции 0 и имеет длину 4.

Шаг 3. Показатель 17 приводим по длине цикла: нужная позиция определяется остатком от деления 17 на 4.

Ответ. 3

Задание 14

Найдите остаток от деления 7^{2026} на 100.

Имеем $7^2 = 49$, $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$. Поскольку $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, получаем $7^{2026} \equiv 49 \pmod{100}$. **Ответ.** 49.

Задание 15

Найдите остаток от деления $2^{100} + 3^{100}$ на 5.

По модулю 5 выполнено $2^4 \equiv 1$ и $3^4 \equiv 1$. Число 100 кратно 4, поэтому оба слагаемых дают остаток 1. **Ответ.** 2.

Задание 16

Докажите, что $10^n - 1$ делится на 9 при любом натуральном n .

Так как $10 \equiv 1 \pmod{9}$, то $10^n \equiv 1$. Можно также разложить:

$10^n - 1 = 9(10^{n-1} + \dots + 10 + 1)$. Выражение в скобках целое. **Ответ.** Делимость доказана для всех $n \geq 1$.

03. Повторение пройденного: задания 17-20

Задание 17

Вычислите без десятичного приближения:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{8} - \frac{1}{6}.$$

Шаг 1. Знаменатели равны 3, 8 и 6; их наименьшее общее кратное равно 24.

Шаг 2. После приведения к знаменателю 24 числитель равен $2 \cdot 8 + 5 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 27$.

Шаг 3. Сокращаем дробь на 3 и получаем $\frac{9}{8}$.

Ответ. $\frac{9}{8}$

Задание 18

Вычислите без десятичного приближения:

$$\frac{7}{12} + \frac{5}{18} - \frac{1}{9}.$$

Шаг 1. Знаменатели равны 12, 18 и 9; их наименьшее общее кратное равно 36.

Шаг 2. После приведения к знаменателю 36 числитель равен $7 \cdot 3 + 5 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 27$.

Шаг 3. Сокращаем дробь на 9 и получаем $\frac{3}{4}$.

Ответ. $\frac{3}{4}$

Задание 19

Цена товара была равна 2400 рублей. Сначала её увеличили на 15%, затем новую цену уменьшили на 10%. Найдите итоговую цену.

Шаг 1. Увеличение на 15% умножает цену на $1 + \frac{15}{100} = \frac{115}{100}$.

Шаг 2. Уменьшение на 10% умножает уже изменённую цену на $1 - \frac{10}{100} = \frac{90}{100}$.

Шаг 3. Итог: $2400 \cdot \frac{115}{100} \cdot \frac{90}{100} = 2484$ рублей.

Ответ. 2484 руб.

Задание 20

Цена товара была равна 3600 рублей. Сначала её увеличили на 20%, затем новую цену уменьшили на 25%. Найдите итоговую цену.

Шаг 1. Увеличение на 20% умножает цену на $1 + \frac{20}{100} = \frac{120}{100}$.

Шаг 2. Уменьшение на 25% умножает уже изменённую цену на $1 - \frac{25}{100} = \frac{75}{100}$.

Шаг 3. Итог: $3600 \cdot \frac{120}{100} \cdot \frac{75}{100} = 3240$ рублей.

Ответ. 3240 руб.

04. Составные задачи: задания 21-30**Задание 21**

Найдите наименьшее натуральное m , при котором $72m$ является полным квадратом.

Шаг 1. Разложим число: $72 = 2^3 \cdot 3^2$.

Шаг 2. Произведение является квадратом тогда и только тогда, когда каждый простой показатель чётен.

Шаг 3. Нечётные показатели сейчас имеют простые множители 2.

Шаг 4. Домножаем по одному разу на каждый из них: $m = 2$.

Шаг 5. В числе $72 \cdot 2$ все показатели становятся чётными, а меньший натуральный множитель не исправит хотя бы один нечётный показатель.

Ответ. 2

Задание 22

Найдите наименьшее натуральное m , для которого $180m$ одновременно является полным квадратом и полным кубом.

Шаг 1. У числа, которое является и квадратом, и кубом, каждый показатель простого множителя кратен 6.

Шаг 2. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. До ближайших показателей, кратных 6, не хватает $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^5$.

Шаг 3. Добавление другого простого или ещё шести степеней увеличит m , поэтому найденное дополнение минимально.

Ответ. $m = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^5 = 4\,050\,000$.

Задание 23

Найдите наименьшее натуральное m , для которого $540m$ является полным кубом.

$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$. Показатели куба кратны 3. Минимально добавляем одну двойку и две пятёрки, получая $540 \cdot 50 = 30^3$. **Ответ.** $m = 50$.

Задание 24

Найдите все натуральные $m < 50$, для которых $72m$ является полным квадратом.

Имеем $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Чётность показателей в квадрате требует $m = 2k^2$ для натурального k . Условие $2k^2 < 50$ даёт $k = 1, 2, 3, 4$. **Ответ.** $m = 2, 8, 18, 32$.

Задание 25

Найдите все четырёхзначные числа вида $\overline{2a3b}$, которые делятся на 45. Здесь a, b - цифры.

Шаг 1. Поскольку $45 = 5 \cdot 9$ и множители взаимно просты, нужны делимость на 5 и на 9. Поэтому $b = 0$ или $b = 5$.

Шаг 2. Сумма цифр $5 + a + b$ кратна 9. При $b = 0$ получаем $a = 4$; при $b = 5$ получаем $a = 8$. Других допустимых цифр нет.

Ответ. 2430, 2835.

Задание 26

Найдите все трёхзначные числа-палиндромы $\overline{aba}$, которые делятся на 11.

Шаг 1. По признаку делимости на 11 число $2a - b$ кратно 11. Для цифр $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ это число лежит от -7 до 18 , поэтому возможно только 0 или 11.

Шаг 2. Если $b = 2a$, подходят $a = 1, 2, 3, 4$. Если $b = 2a - 11$, подходят $a = 6, 7, 8, 9$.

Ответ. 121, 242, 363, 484, 616, 737, 858, 979.

Задание 27

Докажите, что произведение любых пяти последовательных целых чисел делится на 120.

Среди пяти последовательных чисел есть кратное 5 и кратное 3. Есть как минимум два чётных числа, одно из которых кратно 4, поэтому произведение делится на $2 \cdot 4 = 8$. Числа 8, 3 и 5 попарно взаимно просты, значит, произведение делится на $8 \cdot 3 \cdot 5 = 120$. Если среди чисел есть 0, делимость также верна.

Задание 28

Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на каждое из чисел 2, 3, 4, 5, 6 даёт остаток на единицу меньше делителя.

Условия означают, что $n + 1$ делится на каждое из чисел 2, 3, 4, 5, 6. Их НОК равен 60, поэтому $n = 60k - 1$. Наименьшее натуральное значение получается при $k = 1$. **Ответ.** 59.

Задание 29

Найдите все пары неотрицательных целых чисел (x, y) , удовлетворяющие уравнению

$$8x + 12y = 96.$$

Шаг 1. Необходимое условие существования целых решений: $\gcd(8, 12) = 4$ делит 96; оно выполнено.

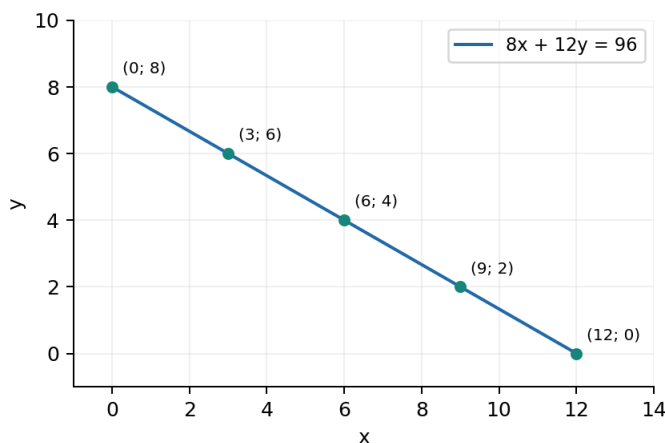
Шаг 2. Решаем сравнение $8x \equiv 96 \pmod{12}$ и получаем первый допустимый остаток для x : $x \equiv 0 \pmod{3}$.

Шаг 3. Общее целое решение записывается с шагом $\frac{12}{4} = 3$ по переменной x .

Шаг 4. Ограничения $x \geq 0$ и $y \geq 0$ оставляют конечное число параметров.

Шаг 5. После подстановки получаем пары: $(0; 8), (3; 6), (6; 4), (9; 2), (12; 0)$.

Ответ. $(0; 8), (3; 6), (6; 4), (9; 2), (12; 0)$



Все неотрицательные целые решения: пять отмеченных точек на прямой.

Задание 30

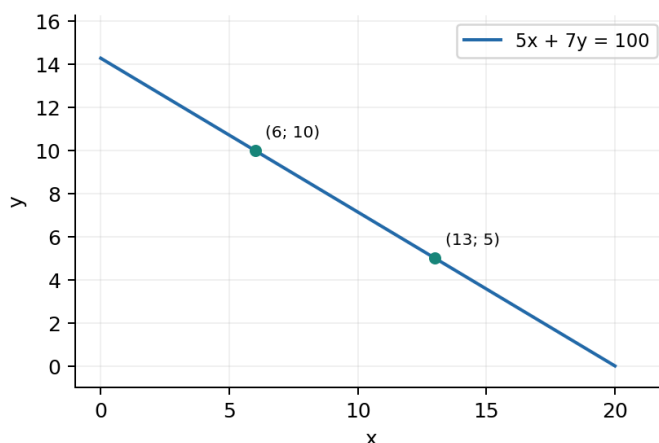
Найдите все пары положительных целых чисел (x, y) , для которых $5x + 7y = 100$, и наибольшее значение xy .

Шаг 1. По модулю 5 получаем $2y \equiv 0$, значит, $y = 5k$. Тогда $x = 20 - 7k$.

Шаг 2. Положительность даёт $k \geq 1$ и $20 - 7k \geq 1$, поэтому $k = 1, 2$.

Шаг 3. Получаем пары $(13; 5)$ и $(6; 10)$ с произведениями 65 и 60.

Ответ. $(13; 5), (6; 10)$; максимум $xy = 65$.



Положительным целым координатам соответствуют только две точки.

05. Развёрнутое решение: задания 31-36**Задание 31**

Найдите все натуральные n , для которых $n + 1$ делит $n^2 + 5$.

Разделим с остатком: $n^2 + 5 = (n + 1)(n - 1) + 6$. Значит, $n + 1$ делит 6. Так как $n + 1 \geq 2$, возможны $n + 1 = 2, 3, 6$. Обратная подстановка подтверждает все варианты. **Ответ.** $n = 1, 2, 5$.

Задание 32

Натуральные a, b удовлетворяют $\text{НОД}(a, b) = 18$ и $\text{НОК}(a, b) = 7560$.

а) Найдите число упорядоченных пар. б) Найдите наименьшую сумму $a + b$. в) Докажите единственность минимальной пары с точностью до перестановки.

Шаг 1. Пишем $a = 18u$, $b = 18v$, где $\text{НОД}(u, v) = 1$. По формуле НОД и НОК получаем $uv = 420 = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Шаг 2. Каждый из четырёх взаимно простых блоков 4, 3, 5, 7 целиком входит либо в u , либо в v . Это даёт $2^4 = 16$ упорядоченных пар.

Шаг 3. По неравенству среднего $u + v \geq 2\sqrt{420} > 40$. Сумма целая, значит, $u + v \geq 41$. Пара $u = 20, v = 21$ взаимно проста и достигает 41.

Шаг 4. При равенстве числа u, v - корни $z^2 - 41z + 420 = 0$, то есть только 20 и 21. Это доказывает единственность без неполного перебора.

Ответ. а) 16; б) $18 \cdot 41 = 738$; в) $\{a, b\} = \{360, 378\}$.

Задание 33

а) Приведите пример натурального числа, которое делится на 72 и имеет ровно 18 натуральных делителей.

б) Может ли натуральное число, делящееся на 216, иметь ровно 18 натуральных делителей?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 72 и имеет ровно 18 натуральных делителей.

Шаг 1. Если $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, то число его делителей равно $(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$. Разложения числа 18 на множители задают наборы показателей: 17; 8 и 1; 5 и 2; 2, 2 и 1.

Шаг 2. Для пункта а подходит $n = 2^5 \cdot 3^2 = 288$: число делится на $72 = 2^3 \cdot 3^2$, а количество делителей равно $6 \cdot 3 = 18$.

Шаг 3. Если n делится на $216 = 2^3 \cdot 3^3$, показатели двойки и тройки не меньше 3. Тогда соответствующие множители в формуле числа делителей не меньше 4 и 4. Ни один набор показателей с произведением $(\alpha_i + 1) = 18$ не содержит два показателя, одновременно не меньших 3. Поэтому пункт б имеет отрицательный ответ.

Шаг 4. Для делимости на 72 необходимы показатели не меньше 3 и 2. Единственный подходящий набор для 18 делителей - 5 и 2. Наименьшее число получается при большем показателе у меньшего простого: $2^5 \cdot 3^2 = 288$.

Проверка полноты. Перечислены все мультипликативные разбиения 18, поэтому иной тип разложения натурального числа на простые множители невозможен.

Ответ. а) 288; б) нет; в) 288.

Задание 34

Натуральные числа a и b удовлетворяют условиям

$$\text{НОД}(a, b) = 12$$

и

$$\text{НОК}(a, b) = 2520.$$

а) Приведите одну такую упорядоченную пару.

б) Докажите, что после деления обоих чисел на 12 получатся взаимно простые числа.

в) Найдите количество всех упорядоченных пар (a, b) .

Шаг 1. Положим $a = 12x$ и $b = 12y$. Равенство $\text{НОД}(a, b) = 12$ эквивалентно условию $\text{НОД}(x, y) = 1$.

Шаг 2. Используем тождество $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab$. Получаем $12 \cdot 2520 = 144xy$, следовательно, $xy = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Шаг 3. Так как x и y взаимно просты, каждая из четырёх простых степеней 2, 3, 5, 7 должна целиком попасть либо в x , либо в y . Для каждой степени есть два независимых выбора.

Шаг 4. Получаем $2^4 = 16$ упорядоченных пар. Например, $x = 1, y = 210$ дают пару $(12; 2520)$.

Проверка полноты. Любое распределение четырёх простых множителей создаёт взаимно простые x и y , а любое допустимое x, y однозначно задаёт такое распределение.

Ответ. а) Например, $(12; 2520)$; б) доказано; в) 16 пар.

Задание 35

- а) Приведите целое n , для которого $n^2 + 1$ делится на 5.
б) Докажите, что $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком целом n .
в) Найдите наибольшее натуральное k , для которого $n^5 - n$ делится на k при любом целом n .

Шаг 1. Для пункта а можно взять $n = 2 : n^2 + 1 = 5$.

Шаг 2. Квадрат целого числа даёт по модулю 3 остаток 0 или 1. Поэтому $n^2 + 1$ даёт остаток 1 или 2 и не делится на 3.

Шаг 3. Разложим $n^5 - n = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$. Среди трёх последовательных чисел $n - 1, n, n + 1$ одно делится на 3 и хотя бы одно чётно, поэтому выражение делится на 6.

Шаг 4. По малой теореме Ферма $n^5 \equiv n \pmod{5}$, следовательно, выражение делится на 5. Числа 6 и 5 взаимно просты, поэтому делимость на 30 доказана.

Шаг 5. Для $n = 2$ получаем $n^5 - n = 30$. Значит, любой универсальный делитель k обязан делить 30, поэтому увеличить k нельзя.

Проверка полноты. Делимость на 30 установлена для произвольного целого n , а значение $n = 2$ доказывает максимальность найденного числа.

Ответ. а) Например, $n = 2$; б) не делится; в) $k = 30$.

Задание 36

- а) Приведите натуральное число, которое делится на 90 и имеет ровно 24 натуральных делителя.
- б) Объясните, какие наборы показателей простых множителей могут дать ровно 24 делителя.
- в) Найдите наименьшее такое число.

Шаг 1. Мультипликативные разбиения 24 дают наборы показателей: 23; 11 и 1; 7 и 2; 5 и 3; 5,1,1; 3,2,1; 2,1,1,1.

Шаг 2. Число должно содержать $2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Поэтому одно простое имеет показатель не меньше 2, а ещё два простых присутствуют хотя бы в первой степени.

Шаг 3. Для набора 3,2,1 минимальное число равно $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Для набора 2,1,1,1 минимальный допустимый кандидат равен $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 630$. В наборе 5,1,1 показатель 5 обязан стоять у простого 3, иначе не выполнится делимость на 3^2 ; минимальный кандидат равен $2 \cdot 3^5 \cdot 5 = 2430$. Остальные наборы используют менее трёх простых и несовместимы с делимостью на 90.

Шаг 4. Число 360 делится на 90, а количество его делителей равно $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$.

Проверка полноты. Сравнены все наборы показателей, совместимые с тремя обязательными простыми множителями; поэтому меньшего кандидата нет.

Ответ. а) Например, 360; б) наборы перечислены; в) 360.

06. Сложные задачи на доказательство: задания 37-40**Задание 37**

- а) Верно ли, что среди любых двенадцати целых чисел найдутся два с разностью, делящейся на 12?
- б) Постройте набор из двенадцати целых чисел, в котором разность никакой пары не делится на 12.
- в) Найдите наименьшее m , при котором среди любых m целых чисел обязательно найдутся два с разностью, делящейся на 12.

Шаг 1. Два числа имеют разность, делящуюся на 12, тогда и только тогда, когда они дают одинаковый остаток при делении на 12.

Шаг 2. Утверждение пункта а неверно: числа $0, 1, \dots, 11$ имеют попарно различные остатки по модулю 12.

Шаг 3. Этот же набор решает пункт б.

Шаг 4. Существует ровно 12 классов остатков. Среди любых 13 чисел по принципу Дирихле два попадут в один класс. Поэтому $m = 13$.

Проверка полноты. Контрпример показывает, что m не меньше 13, а принцип Дирихле доказывает достаточность 13.

Ответ. а) нет; б) $0, 1, \dots, 11$; в) $m = 13$.

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11

Двенадцать классов остатков. Для тринадцатого числа один класс неизбежно используется повторно.

Задание 38

Неотрицательные целые числа x и y удовлетворяют уравнению

$$14x + 21y = 210.$$

Найдите все решения, их количество и наибольшее возможное значение произведения xy .

Шаг 1. Делим уравнение на 7: $2x + 3y = 30$. Из сравнения по модулю 2 следует, что y чётно.

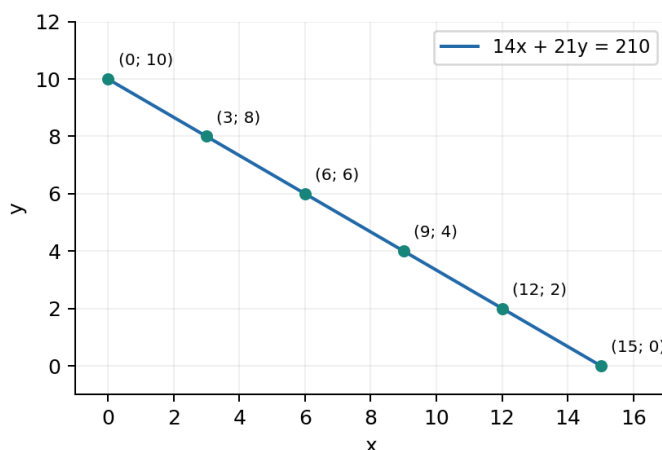
Шаг 2. Положим $y = 2k$. Тогда $x = 15 - 3k$. Условия $x \geq 0$ и $y \geq 0$ дают $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Шаг 3. Все решения: $(15; 0), (12; 2), (9; 4), (6; 6), (3; 8), (0; 10)$. Их шесть.

Шаг 4. Произведение $xy = (15 - 3k) \cdot 2k = 30k - 6k^2$. Для $k = 0, \dots, 5$ его значения равны $0, 24, 36, 36, 24, 0$. Максимум равен 36.

Проверка полноты. Параметризация получена из необходимого условия чётности и затем подставлена обратно; диапазон k перечислен полностью.

Ответ. Шесть решений; $\max xy = 36$.



Шесть неотрицательных целых решений. Максимум xy достигается в двух средних точках.

Задание 39

а) Докажите, что $n^3 - n$ делится на 6 при любом целом n .

б) Найдите все остатки n при делении на 5, для которых $n^2 \equiv 1 \pmod{5}$.

в) Найдите все остатки n при делении на 30, для которых $n^2 \equiv 1 \pmod{30}$.

Шаг 1. $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ - произведение трёх последовательных целых чисел. Одно из них делится на 3, и хотя бы одно чётно, поэтому произведение делится на 6.

Шаг 2. По модулю 5 условие $(n-1)(n+1) \equiv 0$ даёт $n \equiv 1$ или $n \equiv -1$, то есть остатки 1 и 4.

Шаг 3. Для модуля $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ нужны условия $n \equiv 1 \pmod{2}$, $n \equiv \pm 1 \pmod{3}$, $n \equiv \pm 1 \pmod{5}$. Проверка четырёх сочетаний даёт остатки 1, 11, 19, 29.

Проверка полноты. Китайская теорема об остатках даёт по одному классу modulo 30 для каждого из $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ сочетаний; все четыре класса перечислены.

Ответ. а) доказано; б) 1 и 4; в) 1, 11, 19, 29.

Задание 40

Даны десять различных натуральных чисел. Среднее арифметическое любых четырёх из них и любых пяти из них является целым числом.

а) Могут ли в набор входить 403 и 2013?

б) Могут ли в набор входить 403 и полный квадрат?

в) В набор входят 1 и n^2 , где $n > 1$ - натуральное. Найдите наименьшее возможное n .

По задаче 19 варианта 2 официальной демоверсии ФИПИ ЕГЭ-2026.

Формулировка адаптирована; решение авторское.

Шаг 1. Возьмём любые два числа u, v . Сравним суммы четвёрок, в которых три остальных числа одинаковы. Обе суммы делятся на 4, значит, $u - v$ делится на 4. Аналогично сравнение пятёрок с четырьмя одинаковыми остальными числами даёт делимость $u - v$ на 5. Следовательно, все десять чисел имеют один остаток по модулю 20.

Шаг 2. Обратное также верно: если все числа равны r по модулю 20, сумма любых четырёх делится на 4, а любых пяти - на 5.

Шаг 3. В пункте а разность $2013 - 403 = 1610$ не делится на 20, поэтому ответ отрицательный. В пункте б все числа дали бы остаток 3 по модулю 4, а квадрат даёт только 0 или 1: снова нет.

Шаг 4. Для пункта в нужно $n^2 \equiv 1 \pmod{20}$. Среди $n = 2, \dots, 8$ квадраты дают остатки 4, 9, 16, 5, 16, 9, 4; ни один не равен 1. При $n = 9$ получаем $81 \equiv 1 \pmod{20}$.

Шаг 5. Достижимость: набор 1, 21, 41, 61, 81, 101, 121, 141, 161, 181 состоит из десяти различных натуральных чисел, содержит 1 и 9^2 , все числа имеют остаток 1 по модулю 20.

Ответ. а) нет; б) нет; в) $n = 9$.