



Производная и чтение графиков

Задания, решения и ответы

40 заданий с пошаговыми решениями и ответами. Сначала выполните задание самостоятельно, затем сравните ход рассуждений с разбором.

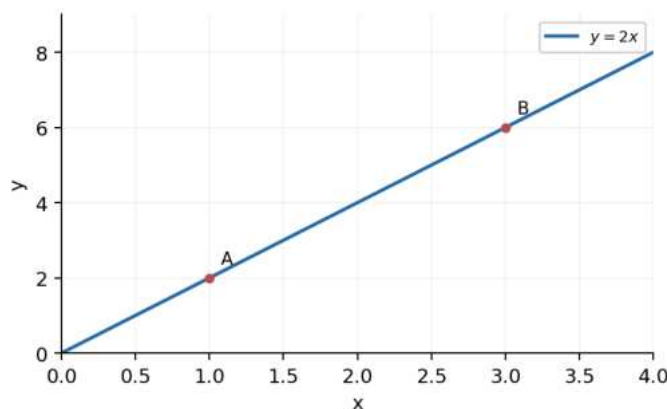
01. Свойства и базовые методы: задания 1-10

Задание 1

Найдите угловой коэффициент секущей через точки $A(1; 2)$ и $B(3; 6)$ графика функции.

Средняя скорость изменения равна отношению приращений: $k = \frac{6 - 2}{3 - 1} = 2$.
Знаменатель ненулевой. Это коэффициент секущей, а не обязательно производная в точках A или B .

Ответ. 2.



Задание 1. Секущая через $A(1; 2)$ и $B(3; 6)$.

Задание 2

Вычислите $f'(3)$ для $f(x) = x^2$ непосредственно по определению производной.

При $h \neq 0$ разностное отношение равно $\frac{(3+h)^2 - 9}{h} = 6 + h$. При $h \rightarrow 0$ предел существует и равен 6. Сокращать на h можно до перехода к пределу: в разностном отношении h не равно нулю.

Ответ. 6.

Задание 3

Известно, что $f'(2) = -3$. Найдите угловой коэффициент касательной и объясните направление её наклона.

Геометрический смысл производной даёт $k = f'(2) = -3$. При увеличении абсциссы точки на касательной на единицу её ордината уменьшается на 3. Это отрицательный наклон, но он не определяет значение $f(2)$.

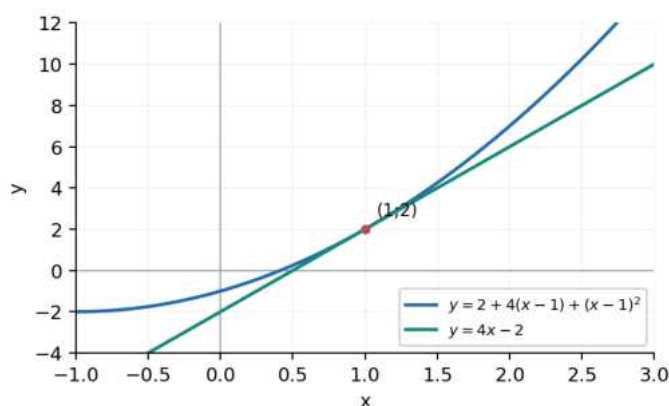
Ответ. -3 ; касательная идёт вниз слева направо.

Задание 4

Составьте уравнение касательной, если $f(1) = 2$, $f'(1) = 4$.

Касательная проходит через $(1; 2)$ и имеет коэффициент 4. Поэтому $y - 2 = 4(x - 1)$, то есть $y = 4x - 2$. При $x = 1$ получаем $y = 2$; наклон действительно равен 4. Две заданные характеристики определяют прямую однозначно.

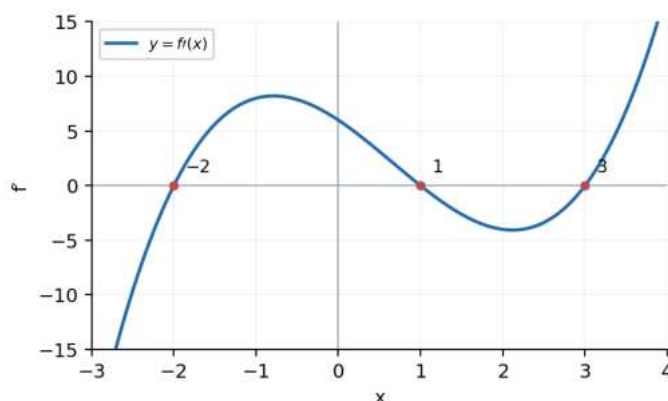
Ответ. $y = 4x - 2$.



Задание 4. Одна возможная функция и касательная с заданной точкой и наклоном.

Задание 5

На рисунке показана производная функции f , дифференцируемой на $\mathbb{R}$. Все её нули $-2, 1, 3$ отмечены; знак за пределами окна продолжает знак крайней ветви. Укажите промежутки, на которых $f'(x) > 0$, и максимальные промежутки возрастания f .



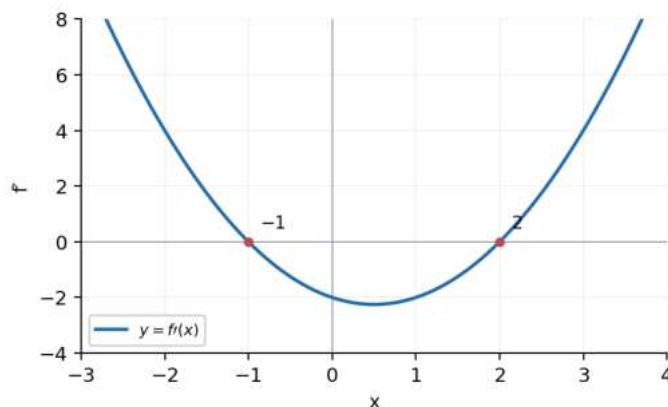
Задание 5. График производной; все её нули отмечены.

График производной выше оси на $(-2; 1)$ и $(3; +\infty)$. По признаку монотонности функция возрастает на этих промежутках; благодаря непрерывности самой f граничные точки можно присоединить. За каждым концом знак меняется на отрицательный, поэтому расширить промежутки нельзя.

Ответ. $f' > 0$ на $(-2; 1) \cup (3; +\infty)$; максимальные промежутки возрастания $[-2; 1]$ и $[3; +\infty)$.

Задание 6

На рисунке дана производная дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функции. Её единственные нули -1 и 2 ; знаки крайних ветвей сохраняются вне окна. Найдите максимальный промежуток убывания f .



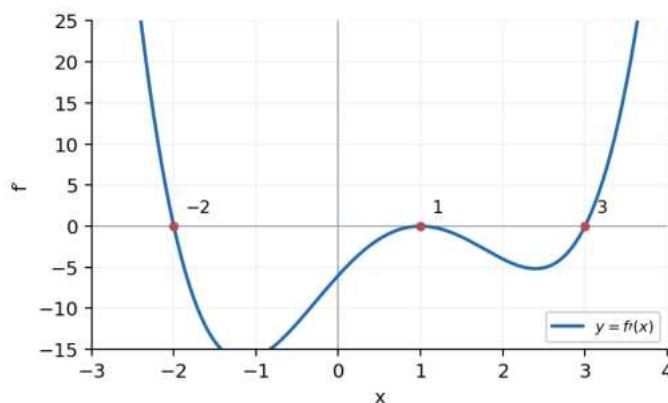
Задание 6. График производной с отмеченными нулями.

Производная отрицательна между -1 и 2 , а вне этого промежутка положительна. Функция строго убывает внутри; непрерывность позволяет добавить оба конца. Дальнейшее расширение захватило бы участок возрастания.

Ответ. $[-1; 2]$.

Задание 7

По изображённому графику производной найдите абсциссы локальных максимумов функции f , дифференцируемой на $\mathbb{R}$. Все нули производной: -2 , 1 , 3 ; в точке 1 график касается оси.



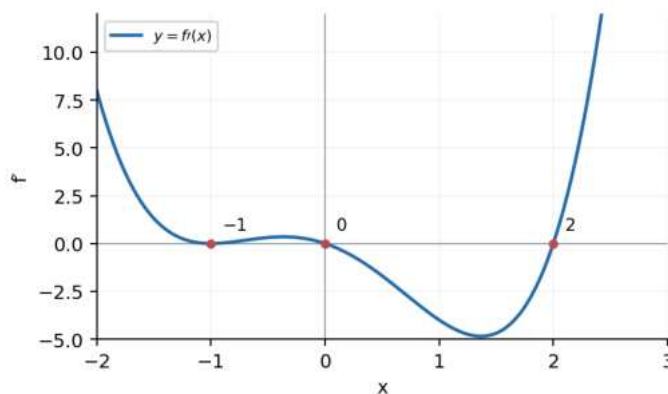
Задание 7. График производной; исследуйте поведение около каждого нуля.

В -2 знак производной меняется с плюса на минус: это локальный максимум. В 1 знак остаётся отрицательным, поэтому экстремума нет. В 3 минус меняется на плюс: это минимум, не максимум.

Ответ. $x = -2$.

Задание 8

Сколько локальных экстремумов имеет дифференцируемая функция f по данному графику производной? Все нули производной: $-1, 0, 2$; других смен знака нет.



Задание 8. График производной с тремя отмеченными нулями.

В -1 производная касается оси и остаётся положительной: экстремума нет. В 0 знак меняется с плюса на минус, в 2 с минуса на плюс. Других смен знака не задано.

Ответ. Два экстремума: максимум при $x = 0$, минимум при $x = 2$.

Задание 9

Касательная к графику функции параллельна прямой $y = 5x - 1$. Чему равна производная в точке касания?

Параллельные не вертикальные прямые имеют одинаковые угловые коэффициенты. У заданной прямой коэффициент 5 , поэтому производная в точке касания тоже 5 . Свободный член -1 на наклон не влияет.

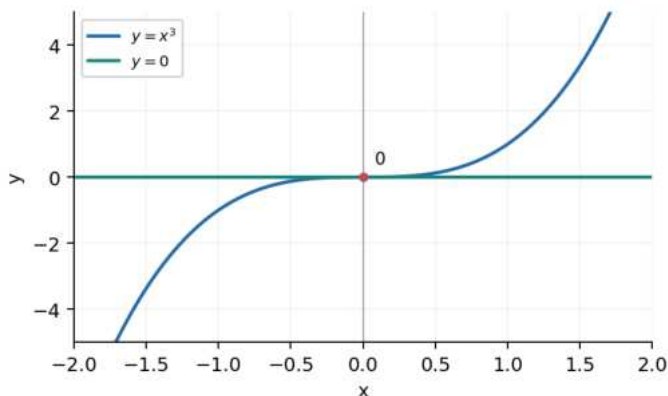
Ответ. 5 .

Задание 10

У функции $f(x) = x^3$ найдите все горизонтальные касательные. Есть ли в точке касания локальный экстремум?

$f'(x) = 3x^2$, поэтому нулевой наклон возможен только при $x = 0$. Точка графика $(0; 0)$, касательная $y = 0$. Производная положительна с обеих сторон от нуля; сама кубическая функция строго возрастает и меняет знак в нуле. Экстремума нет.

Ответ. Единственная касательная $y = 0$ в $(0; 0)$; экстремума нет.



Задание 10. Горизонтальная касательная в нуле без экстремума.

02. Графики и связка методов: задания 11-16**Задание 11**

Найдите производную функции $f(x) = x^2 \ln x$ и её область определения.

Исходная функция определена при $x > 0$. По правилу произведения $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$. Оба исходных множителя дифференцируемы на этой области, иных ограничений нет.

Ответ. $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$ при $x > 0$.

Задание 12

Найдите производную $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$, сохраняя ограничения.

На $x \neq 1$ применяем правило частного:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

Проверка другим способом: $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}$, поэтому $f' = 1 - \frac{2}{(x-1)^2}$, что даёт ту же формулу. Точка 1 не добавляется после упрощения.

Ответ. $\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$ при $x \neq 1$.

Задание 13

Для $f(x) = \sqrt{3x+1}$ найдите производную во внутренних точках области и проверьте существование конечной правой производной на её границе.

Область функции $[-\frac{1}{3}; +\infty)$. При $x > -\frac{1}{3}$ по правилу цепочки $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$. На

границе разностное отношение справа равно $\frac{\sqrt{3h}}{h} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{h}}$ и неограниченно растёт при $h \rightarrow 0+$.

Ответ. $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ при $x > -\frac{1}{3}$; конечной правой производной в $-\frac{1}{3}$ нет.

Задание 14

Найдите производную функции $f(x) = \ln(1+x^2)$ и укажите её область.

$1+x^2 > 0$ для всех действительных x . Производная внешнего логарифма умножается на производную внутренней функции: $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Знаменатель всегда положителен, поэтому производная существует на всей прямой.

Ответ. $\frac{2x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

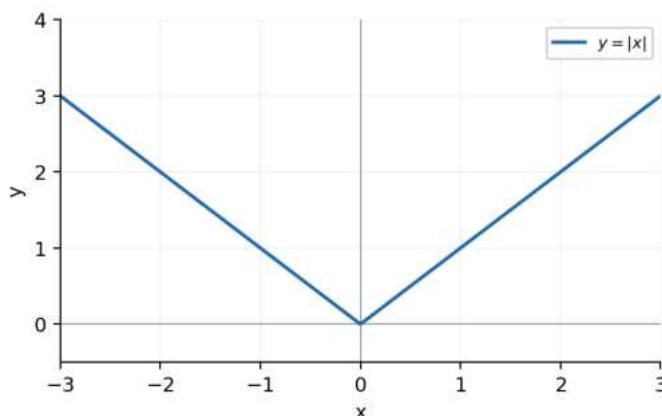
Задание 15

Докажите, что $f(x) = |x|$ имеет локальный минимум при $x = 0$, но не имеет производной в этой точке.

$|x| \geq 0 = f(0)$, причём при $x \neq 0$ неравенство строго. Это доказывает минимум.

Разностное отношение $\frac{|h|-0}{h}$ равно 1 при $h > 0$ и -1 при $h < 0$. Односторонние пределы различны, общего предела нет.

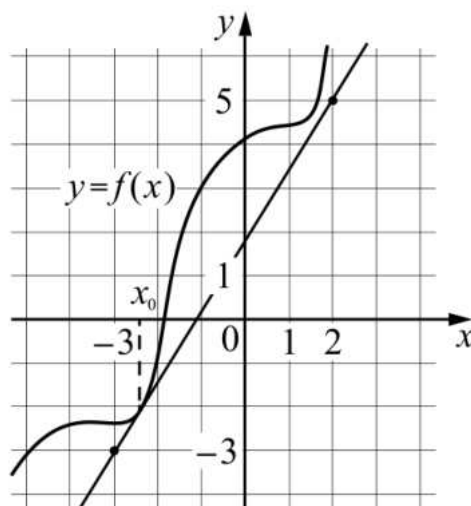
Ответ. Строгий минимум в 0; производная не существует.



Задание 15. Излом: левый наклон -1 , правый 1 .

Задание 16

На рисунке изображены график $y = f(x)$ и касательная в точке с абсциссой x_0 . Найдите $f'(x_0)$. Источник: вариант задания 8 официальной демоверсии ФИПИ ЕГЭ-2026.



Задание 16. Оригинальный рисунок ФИПИ-2026:
график и касательная через отмеченные узлы.

На касательной отмечены узловые точки $(-3; -3)$ и $(2; 5)$. Они нужны для определения наклона; ни одну из них не требуется принимать за точку касания. Получаем

$$f'(x_0) = \frac{5 - (-3)}{2 - (-3)} = \frac{8}{5} = 1,6.$$

Рост ординаты и абсциссы положителен, знак согласуется с рисунком.

Ответ. 1,6.

03. Повторение пройденного: задания 17-20**Задание 17**

Повторение функций. Найдите область определения $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Подкоренное выражение должно быть неотрицательным: $x - 1 \geq 0$. Это равносильно $x \geq 1$. На границе функция равна нулю и определена.

Ответ. $[1; +\infty)$.



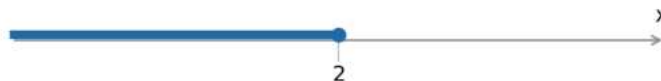
Задание 17. Область корневой функции $[1; +\infty)$.

Задание 18

Повторение показательных неравенств. Решите $3^x \leq 9$.

$9 = 3^2$. Основание $3 > 1$, поэтому строгая монотонность сохраняет порядок:
 $3^x \leq 3^2$ равносильно $x \leq 2$. Граница даёт равенство и включена.

Ответ. $(-\infty; 2]$.



Задание 18. Решение $x \leq 2$.

Задание 19

Повторение рациональных неравенств. Решите $x^2 - 4 \leq 0$.

Разложение $(x - 2)(x + 2)$ даёт нули -2 и 2 . Между ними произведение неположительно, снаружи положительно. Неравенство нестрогое, оба нуля включены.

Ответ. $[-2; 2]$.



Задание 19. Оба нуля включены.

Задание 20

Повторение отбора корней. Сколько решений имеет $\cos x = 0$ на $[0; 2\pi]$?

Все корни $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Из ограничений на отрезок получаем $-\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{3}{2}$, то есть $n = 0, 1$. Концы отрезка не являются корнями.

Ответ. Два: $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$.



Задание 20. Ровно два корня косинуса на заданном отрезке.

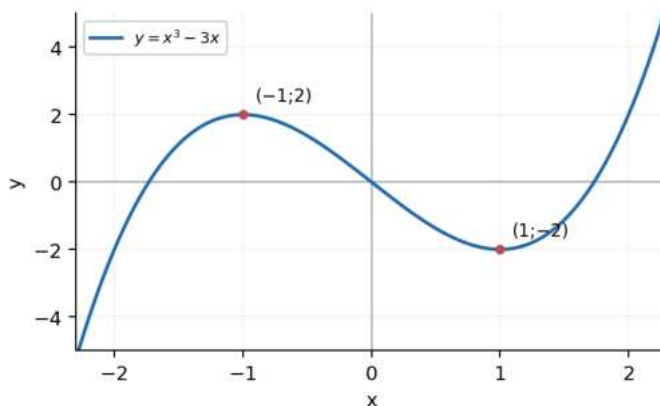
04. Составные задачи: задания 21-30

Задание 21

Исследуйте монотонность и локальные экстремумы $f(x) = x^3 - 3x$. Укажите значения в точках экстремума.

$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$. Знаки слева направо: плюс, минус, плюс. Поэтому f возрастает на $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $[-1; 1]$. В -1 максимум, в 1 минимум. Подставляем: $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$. Других критических точек у многочлена нет.

Ответ. Максимум $(-1; 2)$, минимум $(1; -2)$; промежутки указаны выше.



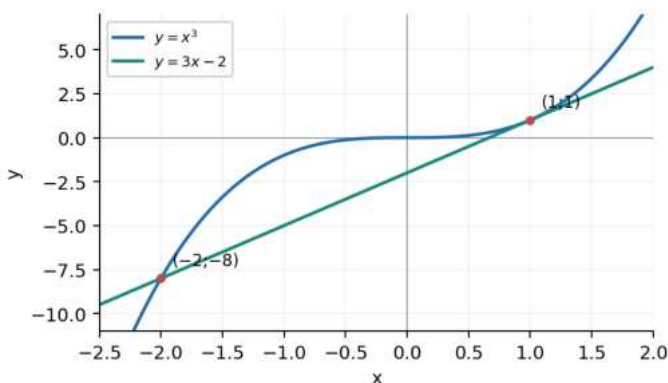
Задание 21. Максимум $(-1; 2)$, минимум $(1; -2)$.

Задание 22

Составьте уравнение касательной к $y = x^3$ при $x = 1$ и проверьте, пересекает ли она график в других точках.

$f(1) = 1$, $f'(1) = 3$. Касательная $y = 1 + 3(x - 1) = 3x - 2$. Для общих точек решаем $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2) = 0$. Кроме точки касания $x = 1$, есть пересечение при $x = -2$, $y = -8$. Касательная может пересекать график и в другой точке.

Ответ. $y = 3x - 2$; дополнительная общая точка $(-2; -8)$.



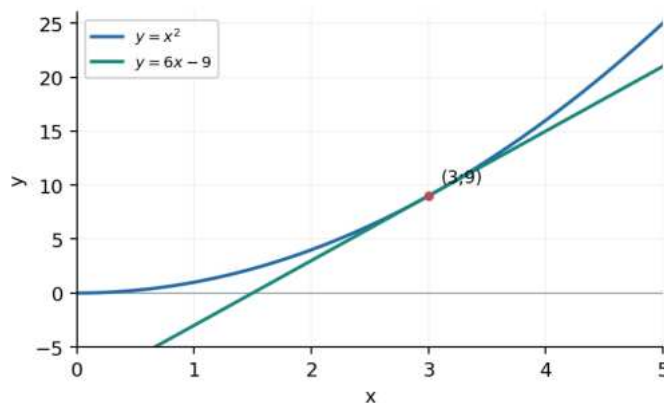
Задание 22. Касательная также пересекает кубический график в $(-2; -8)$.

Задание 23

В какой точке параболы $y = x^2$ касательная параллельна прямой $y = 6x + 1$?
Найдите саму касательную.

Требуется $f'(x_0) = 2x_0 = 6$, поэтому $x_0 = 3$, $f(3) = 9$. Касательная $y - 9 = 6(x - 3)$, то есть $y = 6x - 9$. Уравнение наклона линейное, других точек касания нет.

Ответ. $(3; 9)$; $y = 6x - 9$.



Задание 23. Касательная наклона 6 в $(3; 9)$.

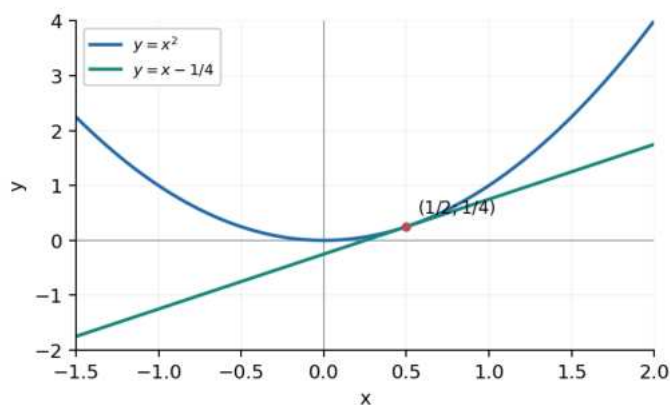
Задание 24

В какой точке параболы $y = x^2$ касательная образует угол 45° с положительным направлением оси абсцисс? Найдите её уравнение.

Угловой коэффициент $k = \tan 45^\circ = 1$. Из $2x_0 = 1$ получаем $x_0 = \frac{1}{2}$, $f(x_0) = \frac{1}{4}$.

Поэтому $y - \frac{1}{4} = x - \frac{1}{2}$.

Ответ. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$; $y = x - \frac{1}{4}$.



Задание 24. Касательная наклона 1 при $x = 1/2$.

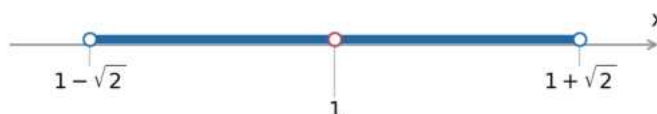
Задание 25

Для $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ найдите все критические точки и их типы. Является ли $x = 1$ критической точкой?

ОДЗ: $x \neq 1$. Производная $\frac{(x-1)^2 - 2}{(x-1)^2}$ обращается в ноль при $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Знаменатель положителен на ОДЗ; числитель положителен вне этих корней и отрицателен между ними. При $1 - \sqrt{2}$ плюс меняется на минус, при $1 + \sqrt{2}$ минус на плюс. Разрыв в 1 разделяет область на две части и не принадлежит функции.

Ответ. Максимум при $1 - \sqrt{2}$, минимум при $1 + \sqrt{2}$. Точка 1 не критическая: она вне ОДЗ.



Задание 25. Два участка отрицательной производной разделены разрывом в 1.

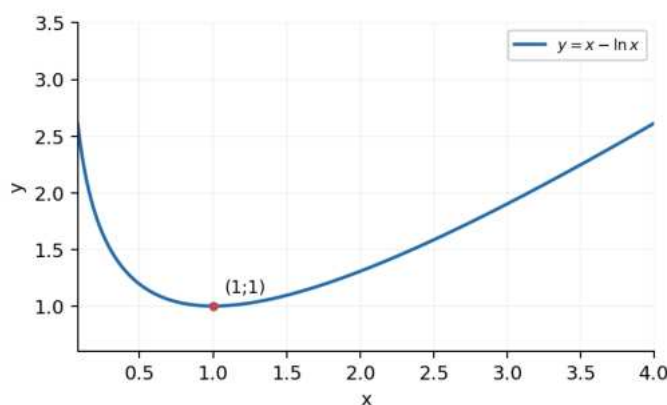
Задание 26

Найдите максимальные промежутки монотонности $f(x) = x - \ln x$ и докажите, что функция имеет единственный глобальный минимум.

ОДЗ $x > 0$. Производная $f' = \frac{x-1}{x}$: отрицательна до 1, положительна после.

Функция убывает на $(0; 1]$ и возрастает на $[1; +\infty)$. Для всякого другого допустимого аргумента значение строго больше $f(1) = 1$. Это доказывает глобальность и единственность без сравнения произвольно выбранных точек.

Ответ. Убывание $(0; 1]$, возрастание $[1; +\infty)$; минимум 1 при $x = 1$.



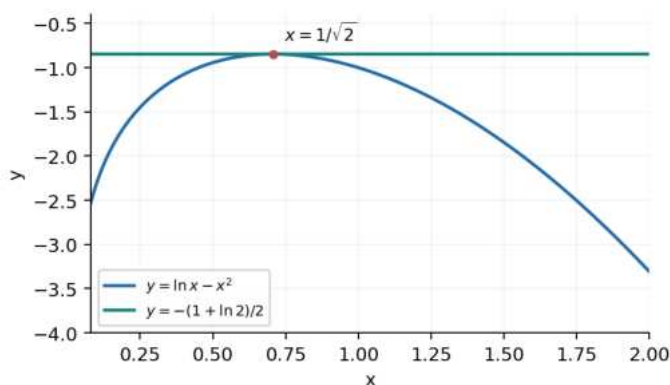
Задание 26. Единственный глобальный минимум (1;1).

Задание 27

Найдите все горизонтальные касательные к $f(x) = \ln x - x^2$ на $(0; +\infty)$ и определите характер стационарной точки.

$f' = \frac{1}{x} - 2x = \frac{1 - 2x^2}{x}$. Единственный положительный нуль $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Производная меняет плюс на минус, это максимум. Значение $f(x_0) = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}$. Горизонтальная касательная равна этому постоянному значению.

Ответ. $y = -\frac{1 + \ln 2}{2}$, точка максимума с абсциссой $\frac{1}{\sqrt{2}}$.



Задание 27. Горизонтальное касание в $x=1/\sqrt{2}$.

Задание 28

Координата точки задана $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ метрами при времени $0 \leq t \leq 4$ секунд. Найдите скорость при $t = 2$, моменты остановки и интервалы движения в положительном направлении оси.

Здесь s - координата, а не накопленный путь. Скорость $v(t) = s'(t) = 3(t-1)(t-3)$ м/с. При $t = 2$ она равна -3 м/с: движение в отрицательном направлении. Остановки $t = 1, 3$. Положительная скорость при $0 \leq t < 1$ и $3 < t \leq 4$; в моменты остановки скорость нулевая.

Ответ. -3 м/с; остановки 1 и 3 с; положительное направление на $[0; 1) \cup (3; 4]$.



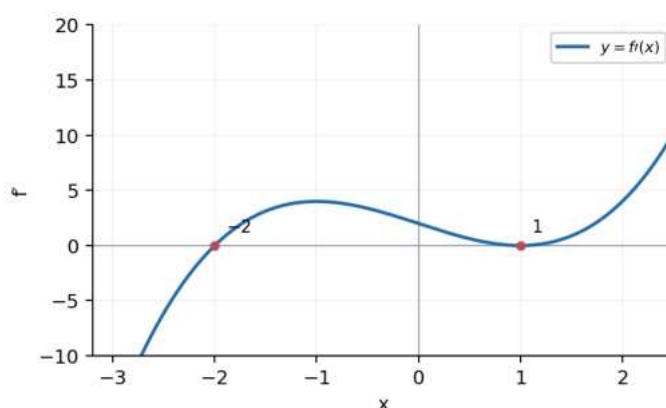
Задание 28. Положительная скорость; моменты 1 и 3 исключены.

Задание 29

Пусть $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$ на $\mathbb{R}$. Найдите локальные экстремумы по абсциссам и сравните $f(-1)$ и $f(2)$. Можно ли найти их численные значения без дополнительных данных?

Квадрат не меняет знак при 1. Производная отрицательна при $x < -2$ и положительна при $x > -2$, кроме нуля 1. Поэтому -2 - минимум; в 1 экстремума нет. На $[-1; 2]$ функция строго возрастает: промежутки по обе стороны от 1 возрастают, непрерывность соединяет их. Следовательно, $f(-1) < f(2)$. Прибавление любой константы сохраняет производную, поэтому сами значения не определены.

Ответ. Единственный экстремум - минимум при -2 ; $f(-1) < f(2)$; значения без дополнительного условия неизвестны.



Задание 29. В -2 меняется знак, в 1 нет.

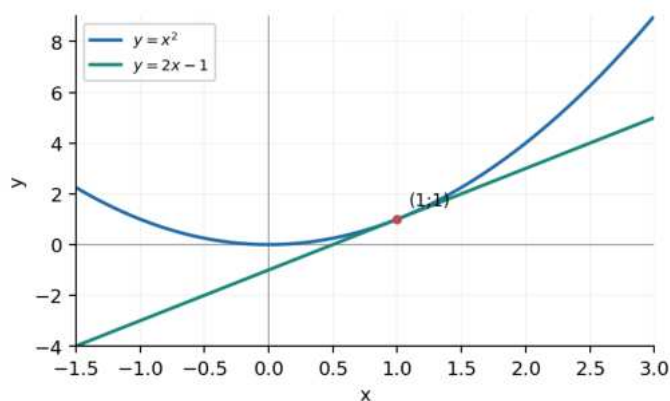
Задание 30

Докажите, что касательная к $y = x^2$ в любой точке не лежит выше параболы. Найдите все случаи равенства.

В точке x_0 касательная $l(x) = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = 2x_0x - x_0^2$. Для любого x разность $x^2 - l(x) = (x - x_0)^2 \geq 0$. Это точное тождество, а не вывод из формы рисунка.

Равенство возможно только при $x = x_0$.

Ответ. $x^2 \geq 2x_0x - x_0^2$ для всех $x, x_0 \in \mathbb{R}$; равенство только в точке касания.



Задание 30. Пример $x_0=1$: разность графиков равна $(x-1)^2$.

05. Развёрнутое обоснование: задания 31-34

Задание 31

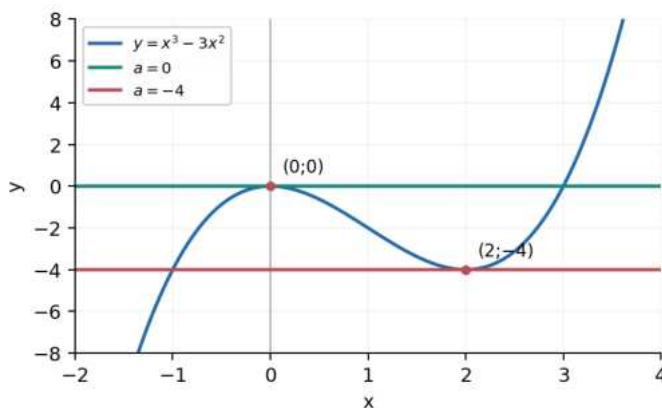
Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определите число различных корней $x^3 - 3x^2 = a$. При каких a их ровно два?

Шаг 1. $g'(x) = 3x(x - 2)$; функция возрастает до 0, убывает до 2, затем возрастает. Экстремальные значения $g(0) = 0$, $g(2) = -4$. Крайние ветви неограниченны, на каждой строго монотонной ветви не более одного корня уровня.

Шаг 2. При $-4 < a < 0$ уровень пересекает три ветви; при $a < -4$ или $a > 0$ одну. На граничных уровнях соседние пересечения сливаются.

Шаг 3. При $a = 0$ имеем $x^2(x - 3) = 0$: корни 0, 3. При $a = -4$ имеем $(x - 2)^2(x + 1) = 0$: корни 2, -1. Кратный корень считаем один раз.

Ответ. Три корня при $-4 < a < 0$, два при $a = -4, 0$, один при остальных a .



Задание 31. Два корня на уровнях 0 и -4.

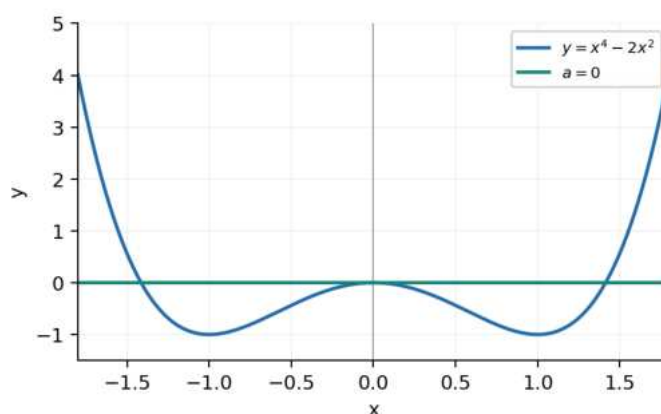
Задание 32

Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определите число различных корней $x^4 - 2x^2 = a$. При каком a их ровно три?

Шаг 1. Положим $t = x^2 \geq 0$. Уравнение $(t - 1)^2 = a + 1$ при $a \geq -1$ даёт $t = 1 \pm \sqrt{a + 1}$. Положительное t даёт два x , нулевое один, отрицательное ни одного.

Шаг 2. При $a < -1$ решений нет. При $a = -1$ значения t совпадают: только $t = 1$, два корня. При $-1 < a < 0$ оба значения положительны и различны, четыре корня. При $a = 0$ получаем $t = 0, 2$, три корня $0, \pm\sqrt{2}$. При $a > 0$ допустимо только значение со знаком плюс, два корня.

Ответ. Число корней по указанным случаям: 0, 2, 4, 3, 2; ровно три при $a = 0$.



Задание 32. Три корня уровня 0: $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$.

Задание 33

Исследуйте монотонность и локальные экстремумы $f_a(x) = x^4 - 2ax^2$. Найдите a , если критических точек три, а разность значений в локальном максимуме и минимуме равна 16.

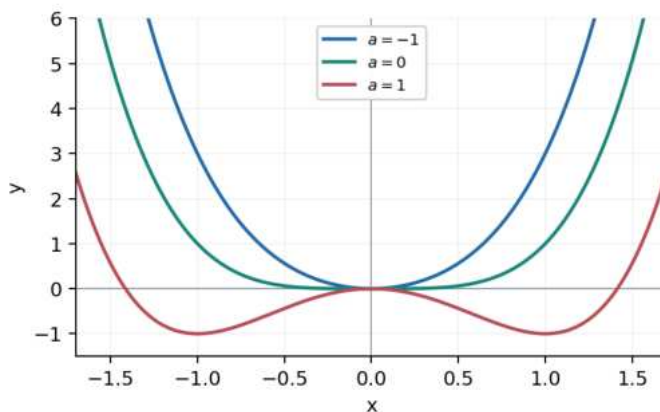
Шаг 1. $f'_a(x) = 4x(x^2 - a)$. При $a \leq 0$ единственный нуль 0, знак минус слева и плюс справа: один минимум с нулевым значением; убывание до 0, возрастание после.

Шаг 2. При $a > 0$ нули $-\sqrt{a}, 0, \sqrt{a}$. Знаки: минус, плюс, минус, плюс. Поэтому минимумы при $\pm\sqrt{a}$ со значением $-a^2$, максимум при 0 со значением 0.

Промежутки монотонности разделяются этими точками; концы присоединяются по непрерывности.

Шаг 3. Три критические точки требуют $a > 0$. Разность равна a^2 , откуда $a^2 = 16$, значит $a = 4$. При $a = -4$ условие числа точек нарушено. Все нули производной рассмотрены.

Ответ. Искомый параметр $a = 4$; полное исследование приведено выше.



Задание 33. Один минимум при $a \leq 0$; два минимума и максимум при $a > 0$.

Задание 34

Докажите для каждого $x \geq 1$ двойную оценку $\frac{2(x-1)}{x+1} \leq \ln x \leq \frac{x - \frac{1}{x}}{2}$. Установите все случаи равенства.

Шаг 1. Для левой оценки возьмём $\varphi(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$. На $[1; +\infty)$:

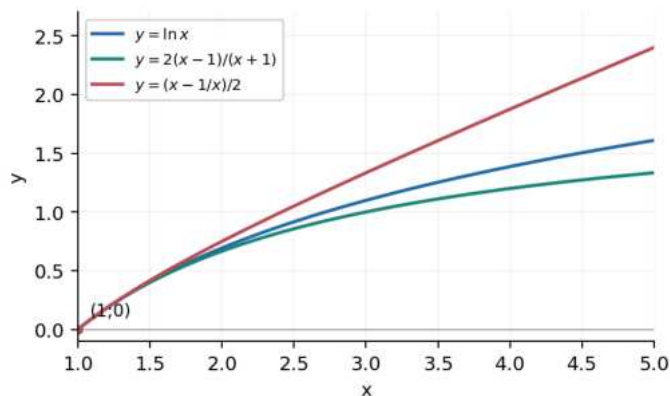
$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geq 0.$$

Функция не убывает, значит $\varphi(x) \geq 0$.

Шаг 2. Для правой оценки $\psi(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{2} - \ln x$. Тогда $\psi(1) = 0$ и $\psi'(x) = \frac{(x-1)^2}{2x^2} \geq 0$. Получаем $\psi(x) \geq 0$.

Шаг 3. На $(1; +\infty)$ обе производные строго положительны, поэтому при $x > 1$ обе оценки строгие. Все знаменатели положительны на заданной области.

Ответ. Оценка доказана; равенство в каждой части только при $x = 1$.



Задание 34. На $x \geq 1$ логарифм между двумя оценками.

06. Сложные задачи и параметры: задания 35-40**Задание 35**

Функция задана

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \leq 1, \\ b \ln x + c, & x > 1. \end{cases}$$

Найдите a, b, c , если она непрерывна и дифференцируема в 1, а $f(e) = 7$.

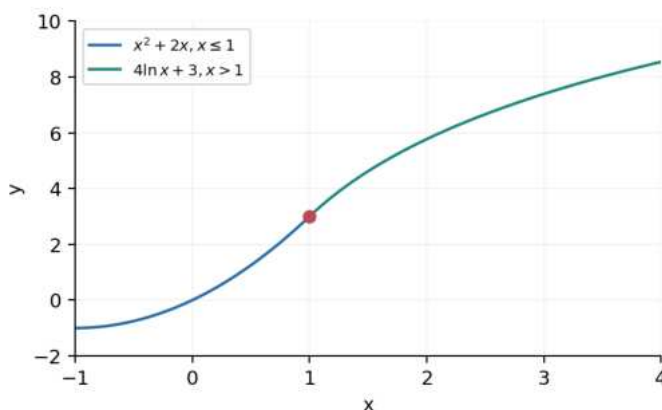
Шаг 1. Непрерывность даёт $1 + a = c$: справа предел $b \ln 1 + c = c$, слева значение $1 + a$.

Шаг 2. После обеспечения непрерывности сравниваем односторонние производные: $2 + a = b$. Без первого условия совпадение формальных производных ветвей не устранило бы скачок.

Шаг 3. Из $f(e) = b + c = 7$ получаем $3 + 2a = 7$. Отсюда $a = 2, b = 4, c = 3$.

Проверка. Оба предела и значение в 1 равны 3, односторонние производные равны 4, $f(e) = 7$. Линейная система имеет единственное решение.

Ответ. $(a, b, c) = (2, 4, 3)$.



Задание 35. Непрерывная склейка в (1;3), общий наклон 4.

Задание 36

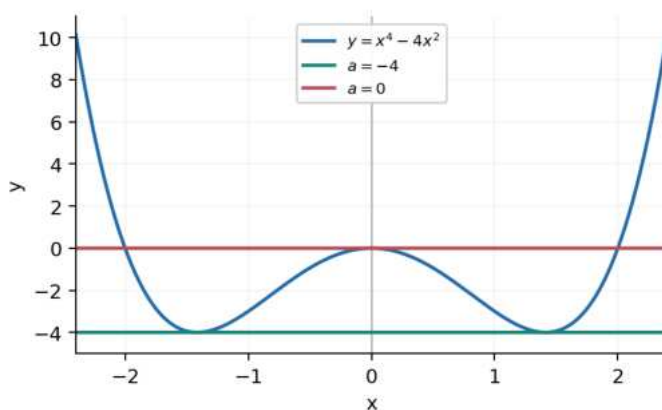
Для каждого $a \in \mathbb{R}$ найдите число различных корней $x^4 - 4x^2 = a$, используя производную и горизонтальные уровни.

Шаг 1. $g'(x) = 4x(x^2 - 2)$, нули $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$. Знаки: минус, плюс, минус, плюс. Минимумы $g(\pm\sqrt{2}) = -4$, локальный максимум $g(0) = 0$. На обоих бесконечных концах $g \rightarrow +\infty$.

Шаг 2. Ниже -4 пересечений нет; на уровне -4 два; между -4 и 0 по одному на каждой из четырёх ветвей; на уровне 0 три, поскольку средние корни совпадают в 0 ; выше 0 только две крайние ветви.

Проверка. При $a = 0$ разложение $x^2(x - 2)(x + 2) = 0$ подтверждает корни $-2, 0, 2$. Монотонность и значения концов доказывают существование и единственность на каждой ветви.

Ответ. 0, 2, 4, 3, 2 корней соответственно при $a < -4$, $a = -4$, $-4 < a < 0$, $a = 0$, $a > 0$.



Задание 36. Минимумы на уровне -4 , локальный максимум на уровне 0 .

Задание 37

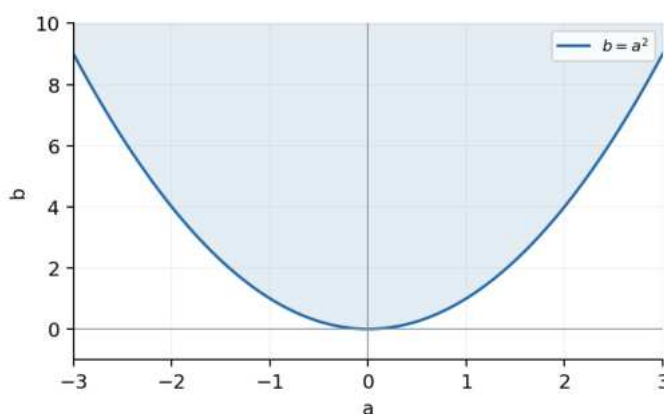
Найдите все пары $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, при которых $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3bx$ строго возрастает на всей прямой.

Шаг 1. $f'(x) = 3((x - a)^2 + b - a^2)$. Если $b < a^2$, производная отрицательна в окрестности a , следовательно там функция убывает. Такое семейство не подходит.

Шаг 2. Если $b > a^2$, производная всюду положительна, строгая монотонность следует из теоремы Лагранжа.

Шаг 3. На границе $b = a^2$ имеем $f(x) = (x - a)^3 + a^3$. Кубическая функция строго возрастает, хотя производная в одной точке нулевая. Этот случай включаем; интеграл для доказательства не требуется.

Ответ. $b \geq a^2$. Необходимость и достаточность проверены отдельно.



Задание 37. Закрашена область $b \geq a^2$; сама граница включена.

Задание 38

Для всех действительных a, b определите число различных решений $e^x = ax + b$.

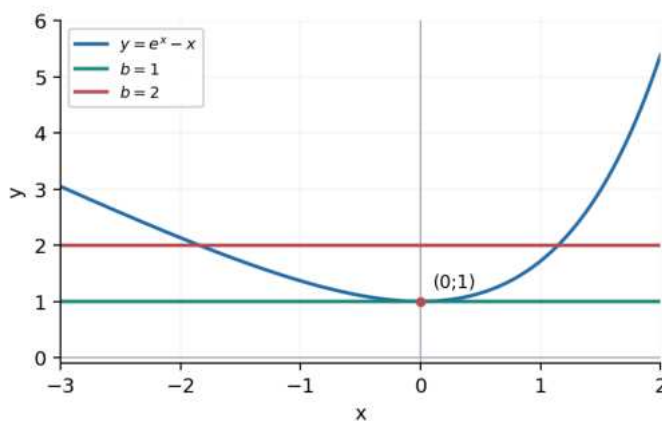
Шаг 1. Рассмотрим $h(x) = e^x - ax$, ищем уровень b . Если $a < 0$, то $h' = e^x - a > 0$, $h \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -\infty$ и $h \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. По непрерывности и строгому возрастанию при любом b ровно один корень.

Шаг 2. Если $a = 0$, уравнение $e^x = b$ имеет один корень $\ln b$ при $b > 0$ и ни одного при $b \leq 0$.

Шаг 3. Если $a > 0$, единственный нуль производной $x = \ln a$. До него h убывает, после возрастает. На обоих концах $h \rightarrow +\infty$, минимум $m = a - a \ln a$.

Следовательно, ниже m корней нет, на нём один, выше два. Равенство на границе соответствует касанию.

Ответ. При $a < 0$ один корень для всех b ; при $a = 0$ один для $b > 0$, иначе ноль; при $a > 0$ число 0, 1, 2 для $b < m$, $b = m$, $b > m$, где $m = a(1 - \ln a)$.



Задание 38. Случай $a=1$: минимум 1, выше него два пересечения.

Задание 39

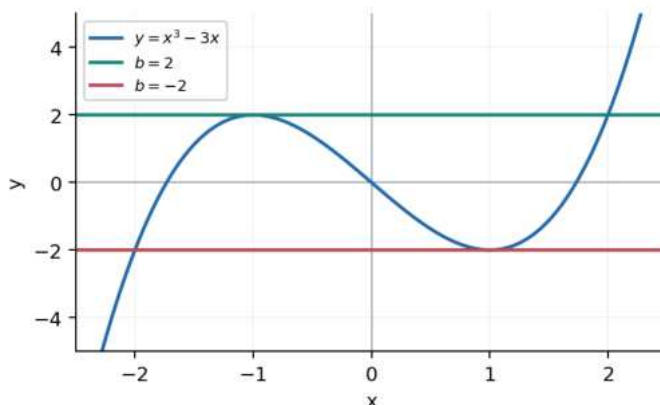
Для всех $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ найдите число различных корней $x^3 - 3ax = b$. Обоснуйте все критические и вырожденные случаи.

Шаг 1. Для $g_a(x) = x^3 - 3ax$ имеем $g'_a(x) = 3(x^2 - a)$. При $a < 0$ производная положительна, при $a = 0$ сама функция x^3 строго возрастает. В обоих случаях образ $\mathbb{R}$, поэтому при любом b ровно один корень.

Шаг 2. При $a > 0$ критические точки $-\sqrt{a}$ и $\sqrt{a}$. Первая - максимум $2a\sqrt{a}$, вторая - минимум $-2a\sqrt{a}$. На трёх ветвях функция строго монотонна, крайние значения неограниченны.

Шаг 3. Если $|b| < 2a\sqrt{a}$, каждая ветвь даёт по одному корню. При равенстве два пересечения сливаются в критической точке, получаем два различных корня. При $|b| > 2a\sqrt{a}$ остаётся одно пересечение крайней ветви. Например, на верхней границе $g_a(x) - 2a\sqrt{a} = (x + \sqrt{a})^2(x - 2\sqrt{a})$.

Ответ. При $a \leq 0$ один; при $a > 0$ три, два, один соответственно для $|b| < 2a\sqrt{a}$, $|b| = 2a\sqrt{a}$, $|b| > 2a\sqrt{a}$.



Задание 39. Случай $a=1$: критические уровни $b=\pm 2$.

Задание 40

Для $f(x) = x^4 - 2x^2$ найдите все k , при которых существуют ровно три различные касательные с угловым коэффициентом k . Одна прямая, касающаяся в двух точках, считается одной касательной.

Шаг 1. Точки касания удовлетворяют $h(u) = 4u^3 - 4u = k$. Производная $h'(u) = 12u^2 - 4$ имеет нули $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Экстремальные уровни $\pm K$, где $K = \frac{8}{3\sqrt{3}}$. Поэтому три различные точки касания существуют при $|k| < K$, две при $|k| = K$, одна при $|k| > K$.

Шаг 2. Проверим, не совпадают ли прямые разных точек. Свободный член касательной $q(u) = f(u) - uf'(u) = -3u^4 + 2u^2$. Если $u \neq v$, но $h(u) = h(v)$, то $u^2 + uv + v^2 = 1$. Равенство $q(u) = q(v)$ даёт

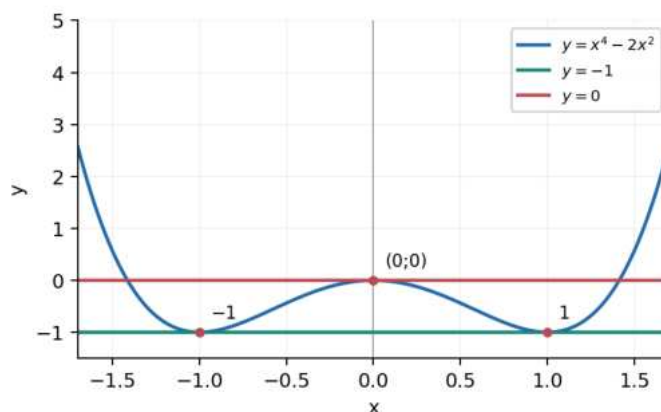
$$(u - v)(u + v)(2 - 3(u^2 + v^2)) = 0.$$

Шаг 3. При $u + v = 0$ равенство наклонов нечётной h требует $k = 0$; тогда разные точки u, v равны $1, -1$. Вторая возможность $u^2 + v^2 = \frac{2}{3}$ вместе с первым условием даёт $uv = \frac{1}{3}$, откуда $(u - v)^2 = 0$, противоречие.

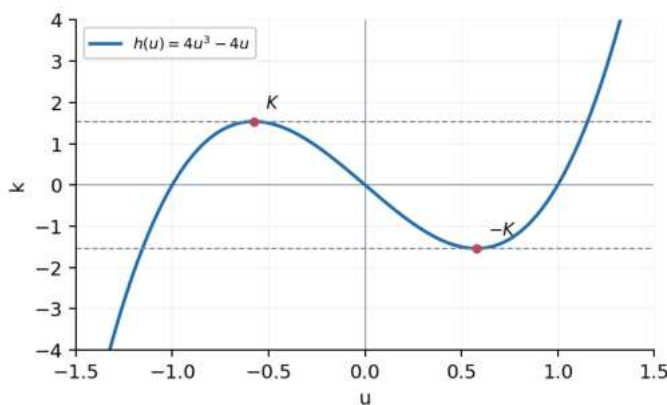
Шаг 4. При $k = 0$ точки касания $-1, 0, 1$. В точках ± 1 одна и та же прямая $y = -1$, в нуле $y = 0$. Всего две касательные. При $0 < |k| < K$ совпадения исключены и прямых ровно три. На граничных уровнях точек лишь две, поэтому три прямые невозможны.

Ответ.

$$k \in \left(-\frac{8}{3\sqrt{3}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{8}{3\sqrt{3}}\right).$$



Задание 40. При $k=0$ три точки касания, но две различные прямые.



Задание 40. Наклоны: три корня между уровнями $\pm 8/(3\sqrt{3})$, но $k=0$ исключён.