



ПРОФИЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА · УРОК 25

Показательные и логарифмические неравенства

Ответы и пошаговые решения

Базовая тренировка: задания 1-12

Задание 1

*Тренировка. авторский тренажёр • навык темы*Решите $2^x > 8$.

Решение

1. $8 = 2^3$, основание $2 > 1$.2. $x > 3$.

Ответ

 $(3; +\infty)$

Задание 2

*Тренировка. авторский тренажёр • навык темы*Решите $3^{x-1} \leq 9$.

Решение

1. $9 = 3^2$, функция возрастает.2. $x - 1 \leq 2$.3. $x \leq 3$.

Ответ

 $(-\infty; 3]$



Задание 3

Тренировка. авторский тренажёр • навык темы

Решите $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4$.

Решение

1. $4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

2. Функция убывает, знак меняется.

3. $x < -2$.

Ответ

$$(-\infty; -2)$$

Задание 4

Тренировка. авторский тренажёр • навык темы

Решите $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} \leq 9$.

Решение

1. $9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

2. Функция убывает: $2x - 1 \geq -2$.

3. $x \geq -\frac{1}{2}$.

Ответ

$$\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

Задание 5

Тренировка. авторский тренажёр • навык темы

Решите $4^x \geq 2^{x+2}$.

Решение

1. $2^{2x} \geq 2^{x+2}$.

2. Функция возрастает: $2x \geq x + 2$.

3. $x \geq 2$.

Ответ

$$[2; +\infty)$$



Задание 6

Тренировка. авторский тренажёр • навык темы

Решите $9^{x-1} < 3^{x+1}$.

Решение

1. $3^{2x-2} < 3^{x+1}$.
2. $2x - 2 < x + 1$.
3. $x < 3$.

Ответ

$(-\infty; 3)$

Задание 7

Тренировка. авторский тренажёр • навык темы

Решите $5^{2x-1} > 125$.

Решение

1. $125 = 5^3$.
2. $2x - 1 > 3$.
3. $x > 2$.

Ответ

$(2; +\infty)$

Задание 8

Тренировка. авторский тренажёр • навык темы

Решите $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} \geq 8$.

Решение

1. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2}$, $8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.
2. Функция убывает: $2x + 2 \leq -3$.
3. $x \leq -\frac{5}{2}$.

Ответ

$(-\infty; -\frac{5}{2}]$



Задание 9

Тренировка. авторский тренажёр • навык темы

Решите $2^{x^2-1} \leq 8$.

Решение

1. $8 = 2^3$.
2. $x^2 - 1 \leq 3$, то есть $x^2 \leq 4$.
3. $-2 \leq x \leq 2$.

Ответ

$[-2; 2]$

Задание 10

Тренировка. авторский тренажёр • навык темы

Решите $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{3}\right)^4$.

Решение

1. Функция убывает, поэтому $x^2 < 4$.
2. Получаем $-2 < x < 2$.

Ответ

$(-2; 2)$

Задание 11

Тренировка. авторский тренажёр • навык темы

Решите $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 \leq 0$.

Решение

1. $t = 2^x > 0$.
2. $(t - 1)(t - 4) \leq 0$, значит $1 \leq t \leq 4$.
3. $0 \leq x \leq 2$.

Ответ

$[0; 2]$



Задание 12

Тренировка. авторский тренажёр • навык темы

Решите $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 > 0$.

Решение

1. $t = 3^x > 0$.
2. $(t - 1)(t - 9) > 0$, значит $0 < t < 1$ или $t > 9$.
3. $x < 0$ или $x > 2$.

Ответ

$$(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$$

Подготовительные и экзаменационные задачи: задания 13-36

Задание 13

ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15

Решите $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 \geq 0$.

Решение

1. $t = 2^x > 0$.
2. $(t - 1)(t - 2) \geq 0$, значит $0 < t \leq 1$ или $t \geq 2$.
3. $x \leq 0$ или $x \geq 1$.

Ответ

$$(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$$

Задание 14

ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15

Решите $4^x + 2^x - 6 < 0$.

Решение

1. $t = 2^x > 0$.
2. $(t + 3)(t - 2) < 0$, поэтому $0 < t < 2$.
3. $x < 1$.

Ответ

$$(-\infty; 1)$$



Задание 15

ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15

Решите $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 \leq 0$.

Решение

1. $t = 3^x > 0$.
2. $(t - 1)(t - 3) \leq 0$.
3. $1 \leq t \leq 3$, поэтому $0 \leq x \leq 1$.

Ответ

$[0; 1]$

Задание 16

ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15

Решите $2^x + 2^{-x} \leq \frac{5}{2}$.

Решение

1. $t = 2^x > 0$, тогда $2^{-x} = \frac{1}{t}$.
2. После умножения на $2t > 0$: $2t^2 - 5t + 2 \leq 0$.
3. $\frac{1}{2} \leq t \leq 2$, поэтому $-1 \leq x \leq 1$.

Ответ

$[-1; 1]$

Задание 17

ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15

Решите $\log_2 x > 3$.

Решение

1. ОДЗ: $x > 0$.
2. Функция возрастает: $x > 8$.

Ответ

$(8; +\infty)$

**Задание 18***ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15*Решите $\log_3 (x - 1) \leq 2$.**Решение**

1. ОДЗ: $x > 1$.
2. $x - 1 \leq 9$, то есть $x \leq 10$.
3. Ответ $(1; 10]$.

Ответ $(1; 10]$ **Задание 19***ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15*Решите $\log_{\frac{1}{2}} (x + 2) > -1$.**Решение**

1. ОДЗ: $x > -2$.
2. Функция убывает: $x + 2 < 2$.
3. Ответ $(-2; 0)$.

Ответ $(-2; 0)$ **Задание 20***ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15*Решите $\log_{\frac{1}{3}} (2x - 1) \leq -1$.**Решение**

1. ОДЗ: $x > \frac{1}{2}$.
2. Функция убывает: $2x - 1 \geq 3$.
3. $x \geq 2$.

Ответ $[2; +\infty)$

**Задание 21***ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15*Решите $\log_2 (x - 3) \geq \log_2 5$.**Решение**

1. ОДЗ: $x > 3$.
2. Функция возрастает: $x - 3 \geq 5$.
3. $x \geq 8$.

Ответ $[8; +\infty)$ **Задание 22***ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15*Решите $\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) < \log_{\frac{1}{2}} 4$.**Решение**

1. ОДЗ: $x > -1$.
2. Функция убывает, знак меняется: $x + 1 > 4$.
3. $x > 3$.

Ответ $(3; +\infty)$ **Задание 23***ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15*Решите $\log_3 (2x + 1) > \log_3 (x + 4)$.**Решение**

1. ОДЗ: $x > -\frac{1}{2}$.
2. Функция возрастает: $2x + 1 > x + 4$.
3. $x > 3$.

Ответ $(3; +\infty)$



Задание 24

ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15

Решите $\log_{\frac{1}{3}} (x + 5) \geq \log_{\frac{1}{3}} (2x + 1)$.

Решение

1. ОДЗ: $x > -\frac{1}{2}$.
2. Функция убывает: $x + 5 \leq 2x + 1$.
3. $x \geq 4$.

Ответ

$[4; +\infty)$

Задание 25

ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15

Решите $\log_2 (x - 1) + \log_2 (x + 1) > 3$.

Решение

1. ОДЗ: $x > 1$.
2. $x^2 - 1 > 8$, то есть $x^2 > 9$.
3. С ОДЗ остаётся $x > 3$.

Ответ

$(3; +\infty)$

Задание 26

ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15

Решите $\log_3 (x - 1) - \log_3 (x - 4) \geq 1$.

Решение

1. ОДЗ: $x > 4$.
2. $\frac{x-1}{x-4} \geq 3$.
3. На ОДЗ знаменатель положителен: $x \leq \frac{11}{2}$; ответ $(4; \frac{11}{2}]$.

Ответ

$(4; \frac{11}{2}]$



Задание 27

ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15

Решите $\log_2 (x^2 - 1) \leq 3$.

Решение

1. ОДЗ: $x < -1$ или $x > 1$.
2. $x^2 - 1 \leq 8$, значит $x^2 \leq 9$.
3. Пересечение: $[-3; -1) \cup (1; 3]$.

Ответ

$$[-3; -1) \cup (1; 3]$$

Задание 28

ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15

Решите $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 4) > -2$.

Решение

1. ОДЗ: $x^2 > 4$.
2. Функция убывает: $x^2 - 4 < 4$, то есть $x^2 < 8$.
3. Получаем $(-2\sqrt{2}; -2) \cup (2; 2\sqrt{2})$.

Ответ

$$(-2\sqrt{2}; -2) \cup (2; 2\sqrt{2})$$

Задание 29

ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15

Решите $\log_2 \frac{x-1}{x-3} > 0$.

Решение

1. ОДЗ: $\frac{x-1}{x-3} > 0$.
2. Функция возрастает: $\frac{x-1}{x-3} > 1$.
3. После переноса $\frac{2}{x-3} > 0$, поэтому $x > 3$.

Ответ

$$(3; +\infty)$$



Задание 30

ЕГЭ. формат ЕГЭ • линия 15

Решите $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+2}{x-1} \geq 0$.

Решение

1. ОДЗ: $\frac{x+2}{x-1} > 0$.
2. Функция убывает: $\frac{x+2}{x-1} \leq 1$.
3. Вместе условия выполняются при $x < -2$.

Ответ

$(-\infty; -2)$

Задание 31

Тренировка. авторский тренажёр • навык темы

Решите $2^{x+1} > 3 \cdot 2^x$.

Решение

1. $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$.
2. Так как $2^x > 0$, получаем $2 > 3$.
3. Неравенство невозможно.

Ответ

$\emptyset$

Задание 32

Тренировка. авторский тренажёр • навык темы

Решите $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 < 0$.

Решение

1. $t = 3^x > 0$.
2. $(t-1)(t-9) < 0$, значит $1 < t < 9$.
3. $0 < x < 2$.

Ответ

$(0; 2)$



Задание 33

Тренировка. авторский тренажёр • навык темы

Решите $\log_2 (x - 2) \geq 0$.

Решение

1. ОДЗ: $x > 2$.

2. $x - 2 \geq 1$.

3. $x \geq 3$.

Ответ

$[3; +\infty)$

Задание 34

Тренировка. авторский тренажёр • навык темы

Решите $\log_{\frac{1}{2}} (x - 2) > 0$.

Решение

1. ОДЗ: $x > 2$.

2. Функция убывает: $x - 2 < 1$.

3. $2 < x < 3$.

Ответ

$(2; 3)$

Задание 35

Тренировка. авторский тренажёр • навык темы

Решите $\log_2 x < 2$.

Решение

1. ОДЗ: $x > 0$.

2. Функция возрастает: $x < 4$.

3. Ответ $(0; 4)$.

Ответ

$(0; 4)$



Задание 36

Тренировка. авторский тренажёр • навык темы

Решите $\log_3 (x^2) \geq 2$.

Решение

1. ОДЗ: $x \neq 0$.
2. $x^2 \geq 9$.
3. $x \leq -3$ или $x \geq 3$.

Ответ

$(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$

Повторение: задания 37-40

Задание 37

Повторение. накопительное повторение • предыдущие темы

Решите $\frac{x-2}{x+1} \geq 0$.

Решение

1. Критические точки -1 и 2 .
2. Знаки $+$, $-$, $+$.
3. Ответ $(-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$.

Ответ

$(-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$

Задание 38

Повторение. накопительное повторение • предыдущие темы

Решите $2^x = 32$.

Решение

1. $32 = 2^5$.
2. $x = 5$.

Ответ

5



Задание 39

Повторение. накопительное повторение • предыдущие темы

Решите $\cos x = 0$ на $[0; 2\pi]$.

Решение

1. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.
2. Корни: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Ответ

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

Задание 40

Повторение. накопительное повторение • предыдущие темы

Радиус конуса 3, высота 4. Найдите объём.

Решение

1. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
2. $V = 12\pi$.

Ответ

$$12\pi$$