



Рациональные и иррациональные уравнения

Задания, решения и ответы

40 заданий с пошаговыми решениями и ответами. Сначала выполните задание самостоятельно, затем сравните ход рассуждений с разбором.

01. Основные приёмы

Задание 1

Решите уравнение

$$\frac{2x+3}{x-4} = 5.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \neq 4$.

Шаг 2. На ОДЗ умножаем на $x - 4$: $2x + 3 = 5(x - 4)$.

Шаг 3. После переноса получаем $(2 - 5)x = -23$, поэтому $x = \frac{23}{3}$; это значение не равно запрещённому 4.

Ответ. $\frac{23}{3}$

Задание 2

Решите $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 1$.

ОДЗ: $x \neq \pm 1$. На ней $2x = x^2 - 1$, поэтому $x^2 - 2x - 1 = 0$ и $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Оба числа отличаются от ± 1 , значит, допустимы.

Ответ. $1 \pm \sqrt{2}$.

Задание 3

Решите уравнение

$$\frac{4x+1}{x-3} = -2.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \neq 3$.

Шаг 2. На ОДЗ умножаем на $x - 3$: $4x + 1 = -2(x - 3)$.

Шаг 3. После переноса получаем $(4 - -2)x = 5$, поэтому $x = \frac{5}{6}$; это значение не равно запрещённому 3.

Ответ. $\frac{5}{6}$

Задание 4

Решите $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

ОДЗ: $x \neq 3$. После сокращения на ОДЗ имеем $x + 3 = 6$, откуда $x = 3$.

Единственный кандидат запрещён исходным знаменателем.

Ответ. Корней нет.

Задание 5

Решите $x(x + 1) = 6$.

Переносим 6 влево и раскладываем: $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3) = 0$. Оба множителя определены при любых x .

Ответ. $-3; 2$.

Задание 6

Решите уравнение

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

разложением на множители.

Шаг 1. Ищем два числа с суммой 7 и произведением 10.

Шаг 2. Подходят 2 и 5.

Шаг 3. Трёхчлен равен $(x - 2)(x - 5)$, поэтому $x = 2$ или $x = 5$.

Ответ. 2; 5

Задание 7

Решите $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

При замене $t = x^2 \geq 0$ получаем $(t - 1)(t - 4) = 0$. Оба значения t положительны и дают по два корня: $x = \pm 1, \pm 2$.

Ответ. $-2; -1; 1; 2$.

Задание 8

Решите $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

После замены $t = x^2 \geq 0$ получаем $(t - 4)(t + 1) = 0$. Значение $t = -1$ недопустимо. Из $x^2 = 4$ находим два корня.

Ответ. $-2; 2$.

Задание 9

Решите $(x - 1)^2 = 4x$.

Приводим к $x^2 - 6x + 1 = 0$, затем выделяем квадрат: $(x - 3)^2 = 8$. Поэтому $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Оба положительны; преобразования равносильны.

Ответ. $3 \pm 2\sqrt{2}$.

Задание 10

Решите уравнение

$$\sqrt{x + 6} = x.$$

Шаг 1. Для равносильного возведения в квадрат требуется $x \geq 0$, то есть $x \geq 0$.

Шаг 2. Квадрат даёт $x + 6 = (x)^2$.

Шаг 3. Корни полученного квадратного уравнения проверяем по условию $x \geq 0$ и в исходной записи; остаётся: 3.

Ответ. 3

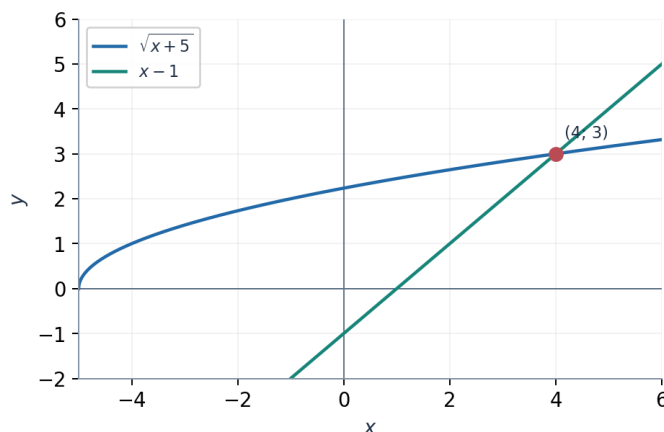
02. Применение и сочетание приёмов

Задание 11

Решите $\sqrt{x+5} = x-1$.

Правая часть должна быть неотрицательной: $x \geq 1$. На этом множестве возведение в квадрат равносильно: $x+5 = (x-1)^2$, то есть $(x-4)(x+1) = 0$. Только $x = 4$ допустим; проверка: $\sqrt{9} = 3$.

Ответ. 4.



Учитываем знак правой части: отрицательный кандидат -1 не является пересечением.

Задание 12

Решите $\sqrt{x^2-4} = x-2$.

Требуем $x^2-4 \geq 0$ и $x-2 \geq 0$, совместно $x \geq 2$. После возведения в квадрат $x^2-4 = x^2-4x+4$, откуда $x = 2$. При подстановке обе части нулевые.

Ответ. 2.

Задание 13

Решите $\sqrt{2x-1} = 3-x$.

Сначала $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$. На этом отрезке равносильно $2x-1 = (3-x)^2$, или $x^2-8x+10=0$. Кандидаты $4 \pm \sqrt{6}$. Число $4 + \sqrt{6}$ больше 3; число $4 - \sqrt{6}$ лежит между $\frac{1}{2}$ и 3. Оно и является корнем.

Ответ. $4 - \sqrt{6}$.

Задание 14

Решите $\sqrt{(x-1)^2} = x+1$.

Левая часть — $|x-1|$, поэтому $x \geq -1$. При $x \geq 1$ равенство $x-1 = x+1$ невозможно. При $-1 \leq x < 1$ получаем $1-x = x+1$, то есть $x = 0$. Он принадлежит выбранной ветви.

Ответ. 0.

Задание 15

Решите уравнение

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \neq 2$.

Шаг 2. На ОДЗ $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

Шаг 3. После сокращения уравнение становится $x+2 = x+2$.

Шаг 4. Равенство верно при всех x

Шаг 5. С учётом ОДЗ ответ: все $x \neq 2$

Ответ. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Задание 16

Решите уравнение

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = x - 1.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \neq 4$.

Шаг 2. На ОДЗ $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$.

Шаг 3. После сокращения уравнение становится $x+4 = x-1$.

Шаг 4. Получаем противоречие $4 = -1$, поэтому решений нет.

Шаг 5. Сокращение было равносильным на ОДЗ, поэтому ответ — пустое множество.

Ответ. нет решений

03. Повторение пройденного

Задание 17

Накопительное повторение. Вычислите

$$\log_2 32.$$

Шаг 1. По определению ищем t : $2^t = 32$.

Шаг 2. $32 = 2^5$.

Шаг 3. Следовательно, $t = 5$.

Ответ. 5

Задание 18

Накопительное повторение. Найдите $\cos \alpha$, если

$$\sin \alpha = \frac{8}{17}$$

и α острый.

Шаг 1. $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$.

Шаг 2. $1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}$.

Шаг 3. Косинус острого угла положителен: $\frac{15}{17}$.

Ответ. $\frac{15}{17}$

Задание 19

Накопительное повторение. Упростите $(x+2)^3 - (x-2)^3$.

Шаг 1. Раскрываем кубы по формулам.

Шаг 2. $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

Шаг 3. $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

Шаг 4. Вычитаем второе выражение.

Шаг 5. Получаем $12x^2 + 16$.

Ответ. $12x^2 + 16$

Задание 20**Накопительное повторение.** Рационализируйте

$$\frac{1}{\sqrt{5}-1}.$$

Шаг 1. Домножаем на $\sqrt{5} + 1$.**Шаг 2.** Знаменатель равен $5 - 1 = 4$.**Шаг 3.** Числитель равен $\sqrt{5} + 1$.**Шаг 4.** Сопряжённое не равно нулю.**Шаг 5.** Ответ: $\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$.**Ответ.** $\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$ **04. Многошаговые задачи****Задание 21**Решите $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 2$.При $x \neq 2$ дробь равна $x - 3$. Уравнение $x - 3 = 2$ даёт $x = 5$, который допустим.Подстановка: $\frac{25 - 25 + 6}{3} = 2$.**Ответ.** 5.**Задание 22**Решите $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$.ОДЗ: $x \neq 1$. Умножение на ненулевой знаменатель приводит к $1 = x$, но это значение запрещено.**Ответ.** Корней нет.

Задание 23

Решите уравнение

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3.$$

Шаг 1. Сначала записываем ОДЗ: $x \geq 2$.

Шаг 2. Первое равносильное преобразование или возведение в квадрат даёт $2x - 1 + 2\sqrt{(x+1)(x-2)} = 9$.

Шаг 3. Изолируем оставшийся радикал или приводим квадратное уравнение: $\sqrt{(x+1)(x-2)} = 5 - x$.

Шаг 4. После второго шага получаем кандидаты 3.

Шаг 5. Проверка в исходном уравнении и по ОДЗ оставляет 3.

Ответ. 3

Задание 24

Решите $\sqrt{x+4} - \sqrt{x} = 2$.

ОДЗ: $x \geq 0$. Переносим второй корень: $\sqrt{x+4} = 2 + \sqrt{x}$. Обе части неотрицательны, поэтому квадратирование равносильно: $x + 4 = 4 + 4\sqrt{x} + x$. Получаем $\sqrt{x} = 0$, то есть $x = 0$. Проверка: $2 - 0 = 2$.

Ответ. 0.

Задание 25

Решите уравнение

$$\sqrt{x+9} - \sqrt{x} = 1.$$

Шаг 1. Сначала записываем ОДЗ: $x \geq 0$.

Шаг 2. Первое равносильное преобразование или возведение в квадрат даёт $\sqrt{x+9} = 1 + \sqrt{x}$.

Шаг 3. Изолируем оставшийся радикал или приводим квадратное уравнение: $8 = 2\sqrt{x}$.

Шаг 4. После второго шага получаем кандидаты 16.

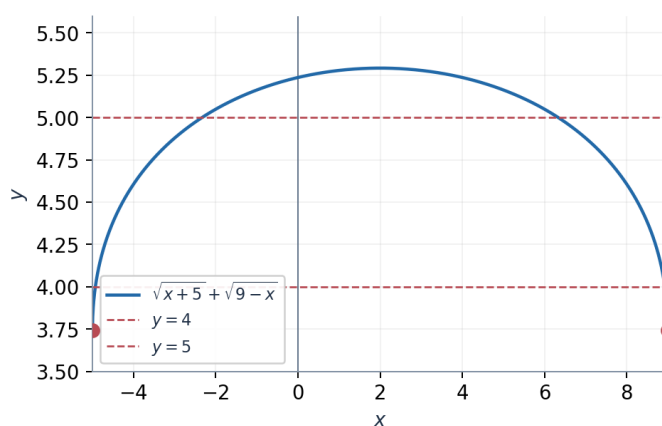
Шаг 5. Проверка в исходном уравнении и по ОДЗ оставляет 16.

Ответ. 16

Задание 26

Решите уравнение

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{9-x} = 4.$$

Шаг 1. Сначала записываем ОДЗ: $-5 \leq x \leq 9$.**Шаг 2.** Первое равносильное преобразование или возведение в квадрат даёт $14 + 2\sqrt{(x+5)(9-x)} = 16$.**Шаг 3.** Изолируем оставшийся радикал или приводим квадратное уравнение: $\sqrt{(x+5)(9-x)} = 1$.**Шаг 4.** После второго шага получаем кандидаты $2 - \sqrt{48}$; $2 + \sqrt{48}$.**Шаг 5.** Проверка в исходном уравнении и по ОДЗ оставляет $2 - 4\sqrt{3}$; $2 + 4\sqrt{3}$.**Ответ.** $2 - 4\sqrt{3}$; $2 + 4\sqrt{3}$ 

Два уровня 4 и 5 пересекают дугу по два раза; концы ОДЗ включены.

Задание 27

Решите уравнение

$$\sqrt{2x+3} = x.$$

Шаг 1. Сначала записываем ОДЗ: $x \geq 0$.**Шаг 2.** Первое равносильное преобразование или возведение в квадрат даёт $2x + 3 = x^2$.**Шаг 3.** Изолируем оставшийся радикал или приводим квадратное уравнение: $x^2 - 2x - 3 = 0$.**Шаг 4.** После второго шага получаем кандидаты 3.**Шаг 5.** Проверка в исходном уравнении и по ОДЗ оставляет 3.**Ответ.** 3

Задание 28

Решите уравнение

$$x - 5\sqrt{x} + 6 = 0.$$

Шаг 1. ОДЗ задаётся радикалом; вводим замену $t = \sqrt{x}$ и обязательно фиксируем $t \geq 0$.

Шаг 2. После замены получаем $t^2 - 5t + 6 = 0$.

Шаг 3. Разлагаем квадратный трёхчлен на множители и находим два неотрицательных значения t .

Шаг 4. Возвращаемся к исходной переменной через квадрат введённого радикала.

Шаг 5. Проверка даёт корни 4; 9; соответствие между $t \geq 0$ и радикалом однозначно.

Ответ. 4; 9

Задание 29

Решите $x + 2 = 3\sqrt{x + 2}$.

ОДЗ: $x \geq -2$. Замена $t = \sqrt{x + 2} \geq 0$ даёт $t(t - 3) = 0$. Оба значения $t = 0, 3$ допустимы; из $x = t^2 - 2$ получаем -2 и 7 .

Ответ. $-2; 7$.

Задание 30

Решите $\sqrt{2x + 3} = \sqrt{x + 1} + 1$.

ОДЗ: $x \geq -1$. После равносильного квадратирувания $x + 1 = 2\sqrt{x + 1}$. Пусть $t = \sqrt{x + 1} \geq 0$; тогда $t(t - 2) = 0$. Получаем $x = -1$ или 3 . Проверка: $1 = 0 + 1$ и $3 = 2 + 1$.

Ответ. $-1; 3$.

05. Задания с развёрнутым решением**Задание 31**

Решите $\sqrt{x + 1} + \sqrt{9 - x} = \sqrt{12 + 2x}$.

ОДЗ: $-1 \leq x \leq 9$. На ней обе части неотрицательны. Первое квадратирувание даёт $\sqrt{(x + 1)(9 - x)} = x + 1$. Правая часть неотрицательна на ОДЗ, поэтому второе квадратирувание также равносильно: $(x + 1)(9 - x) = (x + 1)^2$. Отсюда $(x + 1)(8 - 2x) = 0$, то есть $x = -1$ или 4 . Оба входят в ОДЗ; обратные переходы доказаны.

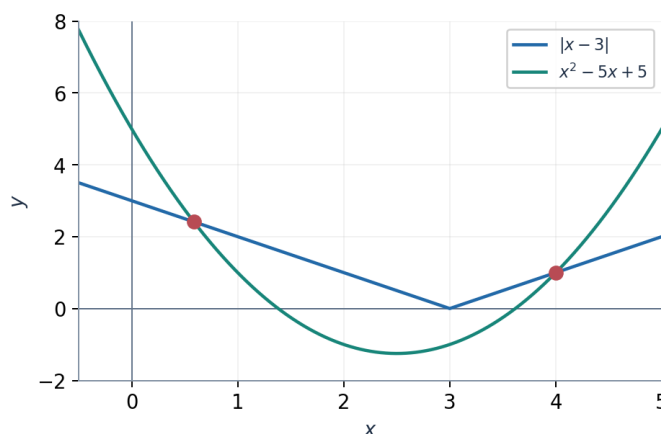
Ответ. $-1; 4$.

Задание 32

Решите $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = x^2 - 5x + 5$.

Левая часть равна $|x - 3|$. При $x \geq 3$: $x - 3 = x^2 - 5x + 5$, то есть $(x - 2)(x - 4) = 0$; подходит 4. При $x < 3$: $3 - x = x^2 - 5x + 5$, то есть $x^2 - 4x + 2 = 0$; из $2 \pm \sqrt{2}$ подходит только $2 - \sqrt{2}$. В каждой ветви решено исходное равенство без квадратирования.

Ответ. $2 - \sqrt{2}$; 4.



Две ветви модуля дают два допустимых пересечения.

Задание 33

Решите уравнение

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{10}{3}.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \neq -1$ и $x \neq 1$.

Шаг 2. Приведём левую часть к общему знаменателю: $\frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{x^2 - 1} = \frac{2x^2 + 2}{x^2 - 1}$.

Шаг 3. Получаем $3(2x^2 + 2) = 10(x^2 - 1)$, откуда $6x^2 + 6 = 10x^2 - 10$ и $x^2 = 4$.

Шаг 4. Оба значения $x = -2$ и $x = 2$ принадлежат ОДЗ.

Проверка. При $x = 2$ слагаемые равны 3 и $\frac{1}{3}$; при $x = -2$ — $\frac{1}{3}$ и 3, сумма в обоих случаях равна $\frac{10}{3}$.

Ответ. $x = -2$; 2.

Задание 34

Решите уравнение

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{9-x} = 5.$$

Шаг 1. ОДЗ: $-5 \leq x \leq 9$. Обозначим $A = \sqrt{x+5}$, $B = \sqrt{9-x}$. Тогда $A, B \geq 0$, $A + B = 5$, а $A^2 + B^2 = 14$.

Шаг 2. Из $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ получаем $25 = 14 + 2AB$, то есть $AB = \frac{11}{2}$.

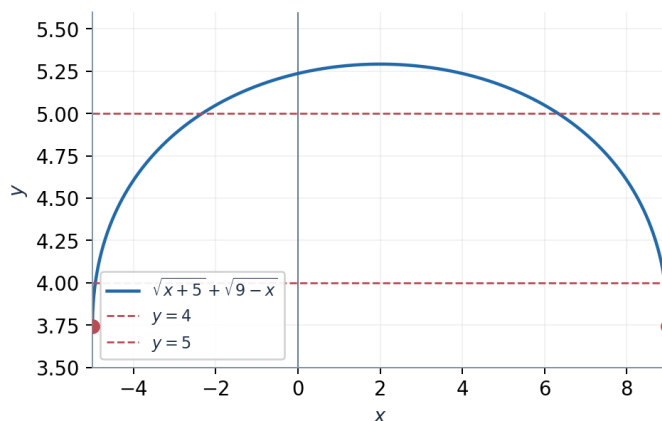
Шаг 3. Числа A и B — корни уравнения $t^2 - 5t + \frac{11}{2} = 0$, поэтому

$$\{A, B\} = \left\{ \frac{5 - \sqrt{3}}{2}, \frac{5 + \sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Шаг 4. Из $x = A^2 - 5$ получаем два значения $x = 2 - \frac{5\sqrt{3}}{2}$ и $x = 2 + \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Проверка. Для найденных значений подкоренные выражения являются квадратами двух положительных чисел A и B , сумма которых равна 5; оба x принадлежат ОДЗ.

Ответ. $x = 2 \pm \frac{5\sqrt{3}}{2}$.



Два уровня 4 и 5 пересекают дугу по два раза; концы ОДЗ включены.

Задание 35

Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} = \frac{2(x-1)}{x+2}.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \neq -2$ и $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$.**Шаг 2.** Положим $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$, тогда $y \geq 0$, а $\frac{x-1}{x+2} = y^2$.**Шаг 3.** Уравнение принимает вид $y = 2y^2$, то есть $y(2y - 1) = 0$. Поэтому $y = 0$ или $y = \frac{1}{2}$.**Шаг 4.** При $y = 0$ получаем $\frac{x-1}{x+2} = 0$ и $x = 1$. При $y = \frac{1}{2}$ получаем $\frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}$, откуда $4x - 4 = x + 2$ и $x = 2$.**Проверка.** Оба значения дают неотрицательную дробь и удовлетворяют исходному уравнению; $x = -2$ среди них нет.**Ответ.** $x = 1; 2$.ОДЗ радикала от дроби: $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$.

Задание 36

Решите уравнение

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{7-2x} = 4.$$

Шаг 1. ОДЗ: $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$. Обозначим $A = \sqrt{2x+3}$, $B = \sqrt{7-2x}$. Тогда $A, B \geq 0$, $A + B = 4$ и $A^2 + B^2 = 10$.

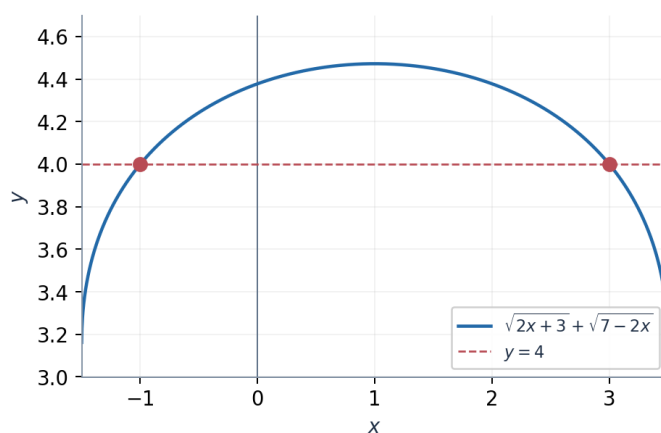
Шаг 2. Возводя сумму в квадрат, получаем $16 = 10 + 2AB$, поэтому $AB = 3$.

Шаг 3. Неотрицательные A и B с суммой 4 и произведением 3 равны 1 и 3 в некотором порядке.

Шаг 4. Если $A = 1$, то $2x + 3 = 1$ и $x = -1$; если $A = 3$, то $2x + 3 = 9$ и $x = 3$.

Проверка. При $x = -1$ получаем $1 + 3 = 4$, при $x = 3$ — $3 + 1 = 4$; оба значения принадлежат ОДЗ.

Ответ. $x = -1; 3$.



Ровно два пересечения с $y = 4$: $x = -1$ и $x = 3$.

06. Итоговые задачи повышенной сложности

Задание 37

В зависимости от a определите число решений уравнения

$$|x - 2| = a - x.$$

Шаг 1. Правая часть должна быть неотрицательной, поэтому для любого решения $x \leq a$.

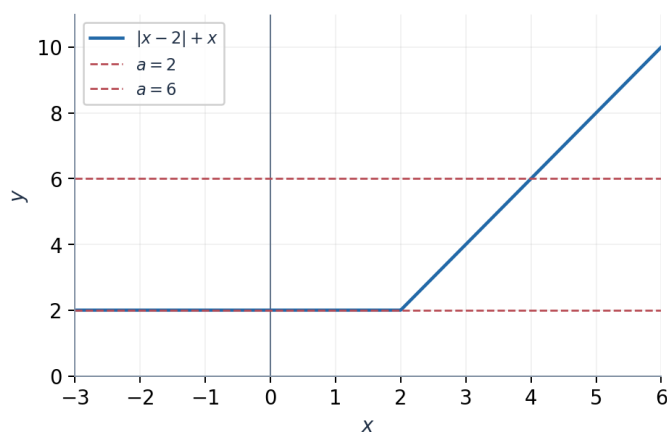
Шаг 2. При $x \geq 2$ получаем $x - 2 = a - x$, откуда $x = \frac{a+2}{2}$. Условия $x \geq 2$ и $x \leq a$ одновременно выполняются при $a \geq 2$.

Шаг 3. При $x < 2$ получаем $2 - x = a - x$, то есть $a = 2$. Если $a = 2$, равенство выполняется для каждого $x < 2$; точка $x = 2$ также подходит.

Шаг 4. Итак, при $a < 2$ решений нет; при $a = 2$ решений бесконечно много (все $x \leq 2$); при $a > 2$ имеется одно решение $x = \frac{a+2}{2}$.

Проверка полноты. Два случая $x \geq 2$ и $x < 2$ исчерпывают числовую прямую; ограничения каждого случая учтены.

Ответ. 0 решений при $a < 2$; бесконечно много при $a = 2$; 1 решение при $a > 2$.



Левая горизонтальная ветвь даёт бесконечно много решений при $a = 2$.

Задание 38

В зависимости от a определите число решений уравнения

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = a.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \neq -1$ и $x \neq 1$. На ОДЗ левая часть равна $\frac{2x}{x^2-1}$.

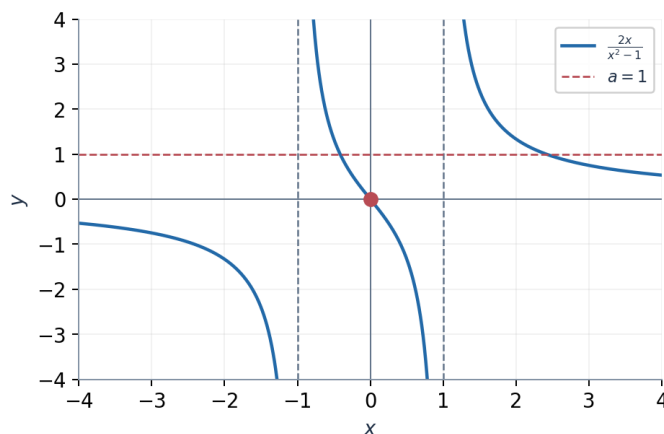
Шаг 2. При $a = 0$ получаем $2x = 0$, поэтому имеется единственный корень $x = 0$.

Шаг 3. При $a \neq 0$ уравнение равносильно $ax^2 - 2x - a = 0$. Его дискриминант $D = 4 + 4a^2 > 0$, поэтому алгебраических корней два.

Шаг 4. Ни один из этих корней не равен ± 1 : подстановка 1 и -1 в $ax^2 - 2x - a$ даёт соответственно -2 и 2 . Значит, оба корня допустимы.

Проверка полноты. Отдельно разобран случай, в котором квадратное уравнение вырождается; запрещённые значения проверены явно.

Ответ. 1 решение при $a = 0$; 2 решения при $a \neq 0$.



При $a = 0$ один корень; при $a \neq 0$ два. Полюса $x = \pm 1$ не входят в ОДЗ.

Задание 39

В зависимости от a определите число решений уравнения

$$|x^2 - 4| = a.$$

Шаг 1. Левая часть неотрицательна, поэтому при $a < 0$ решений нет.

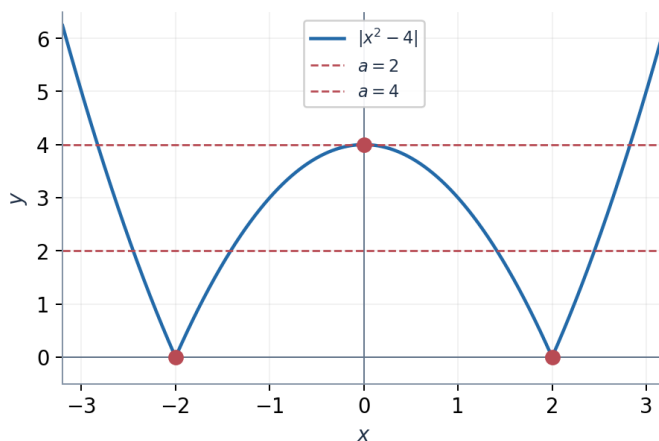
Шаг 2. Уравнение равносильно совокупности $x^2 - 4 = a$ или $x^2 - 4 = -a$, то есть $x^2 = a + 4$ или $x^2 = 4 - a$.

Шаг 3. При $a = 0$ обе ветви совпадают и дают два корня ± 2 . При $0 < a < 4$ каждая ветвь даёт по два ненулевых корня — всего четыре.

Шаг 4. При $a = 4$ первая ветвь даёт $\pm 2\sqrt{2}$, а вторая — $x = 0$, всего три корня. При $a > 4$ остаётся только первая ветвь, поэтому корней два.

Проверка полноты. Рассмотрены все точки изменения числа корней: $a = 0$ и $a = 4$; совпадение ветвей при $a = 0$ учтено.

Ответ. 0 при $a < 0$; 2 при $a = 0$; 4 при $0 < a < 4$; 3 при $a = 4$; 2 при $a > 4$.



Граничные уровни $a = 0$ и $a = 4$ меняют число различных корней.

Задание 40

В зависимости от a определите число решений уравнения

$$\sqrt{x+4} = |x-a|.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \geq -4$. На ОДЗ обе части неотрицательны, поэтому возведение в квадрат равносильно исходному уравнению.

Шаг 2. Получаем $x+4 = (x-a)^2$, то есть $x^2 - (2a+1)x + a^2 - 4 = 0$.

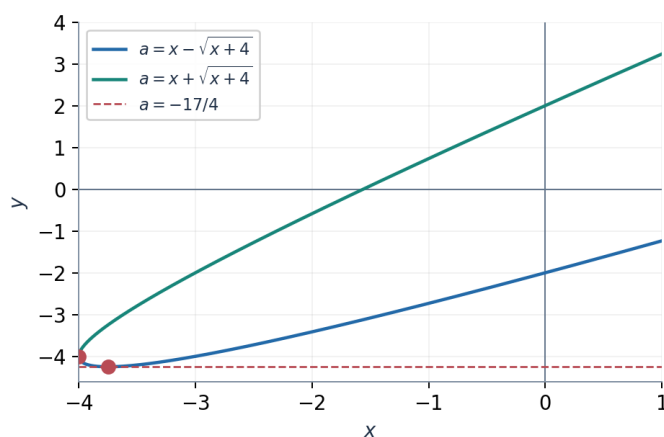
Шаг 3. Дискриминант $D = (2a+1)^2 - 4(a^2 - 4) = 4a + 17$. Поэтому при $a < -\frac{17}{4}$ корней нет, а при $a = -\frac{17}{4}$ имеется один корень $x = -\frac{15}{4}$, принадлежащий ОДЗ.

Шаг 4. При $a > -\frac{17}{4}$ квадратное уравнение имеет два различных корня. Каждый корень удовлетворяет $x+4 = (x-a)^2 \geq 0$, поэтому автоматически принадлежит ОДЗ $x \geq -4$. Обратный переход к исходному уравнению допустим:

$$\sqrt{(x-a)^2} = |x-a|.$$

Проверка полноты. Доказана допустимость каждого корня квадратного уравнения. На ОДЗ обе части исходного уравнения неотрицательны, поэтому переход к квадратам и обратно равносильен.

Ответ. 0 решений при $a < -\frac{17}{4}$; 1 при $a = -\frac{17}{4}$; 2 при $a > -\frac{17}{4}$.



Минимальный уровень $a = -17/4$ достигается при $x = -15/4$.
Общая точка ветвей считается один раз.