



Урок 19. Векторы и координаты

Координаты позволяют решать геометрические задачи вычислениями. Разберём вектор по двум точкам, его длину, сумму и разность, середину отрезка, скалярное произведение, углы и площадь параллелограмма.

01. Координаты точки и координаты вектора

Точка задаёт положение, вектор - перемещение. Для вектора от A к B всегда вычитают координаты начала из координат конца: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$. При смене направления оба знака меняются, а длина остаётся прежней.

Если $A = (-2; 1)$, а $B = (4; 5)$, перемещение равно $(6; 4)$. Проверка сложением возвращает конец: $(-2; 1) + (6; 4) = (4; 5)$. Это надёжнее запоминания разности без указания направления.

Запомните. Длина вектора - одно неотрицательное число. Координаты вектора - упорядоченная пара, в которой допустимы отрицательные числа.

02. Как связаны основные формулы

Длина $\sqrt{x^2 + y^2}$ получается из теоремы Пифагора. Середина отрезка имеет координаты, равные средним арифметическим координат концов. Умножение вектора на число умножает обе координаты; отрицательный множитель разворачивает направление.

Скалярное произведение $a_x b_x + a_y b_y$ - число, а не вектор. Оно также равно $|a||b| \cos \varphi$. Для ненулевых векторов нулевое произведение означает прямой угол; положительное - угол от 0° до 90° без 90° , отрицательное - угол больше 90° и не больше 180° . Угол с нулевым вектором не определяют, поскольку пришлось бы делить на нулевую длину.

03. Коллинеарность без деления на ноль

Векторы коллинеарны, если один пропорционален другому. На плоскости проверка $a_x b_y - a_y b_x = 0$ удобнее отношения координат: она работает и при нулевой координате. Для ненулевых коллинеарных векторов положительный коэффициент означает одинаковое направление, отрицательный - противоположное.

Модуль выражения $a_x b_y - a_y b_x$ равен площади параллелограмма на этих векторах; половина модуля - площади соответствующего треугольника. Для треугольника по трём точкам сначала постройте два вектора из одной вершины. Вычитание координат устраняет зависимость результата от выбора начала отсчёта.

Проверка по рисунку помогает заметить знак и порядок координат, но числа берут из подписей и условий. Масштаб осей не всегда одинаков.

04. Вектор как направленный отрезок и его координаты

Вектор - это направленный отрезок. У него есть начало, конец, длина и направление. Запись $\overrightarrow{AB}$ со стрелкой означает вектор, который начинается в точке А и заканчивается в точке В. Вектор $\overrightarrow{BA}$ направлен в противоположную сторону. На рисунке эти отрезки лежат на одной прямой и имеют одинаковую длину, но как векторы они не равны: их направления противоположны.

На координатной плоскости вектор удобно описывать парой чисел. Если $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Всегда вычитаем координаты начала из координат конца. Фраза «из конца вычесть начало» должна сопровождать каждое первое решение, пока порядок не станет автоматическим.

Например, для $A(-2; 1)$ и $B(4; 5)$ получаем $\overrightarrow{AB} = (4 - (-2); 5 - 1) = (6; 4)$. Первая координата показывает перемещение на 6 единиц вправо, вторая - на 4 единицы вверх. Если координата отрицательна, движение направлено влево или вниз. Такой геометрический смысл помогает проверить знаки без повторного вычисления.

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$: из конца вычесть начало.
- Равные векторы имеют одинаковые пары координат.
- Противоположный к $(p; q)$ вектор равен $(-p; -q)$.
- Если $B = A + a$, то $A = B - a$.

05. Длина вектора и расстояние между точками

Длина вектора $\vec{a} = (x; y)$ находится по теореме Пифагора: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Модули координат вектора являются длинами катетов прямоугольного треугольника, а сам направленный отрезок - гипотенузой. Знаки координат при возведении в квадрат исчезают, поэтому длина не бывает отрицательной и не зависит от того, в какую сторону направлен вектор.

Для вектора $(3; 4)$ длина равна $\sqrt{9 + 16} = 5$. Полезно узнавать пифагоровы тройки 3-4-5, 5-12-13, 8-15-17: они ускоряют вычисления. Если сумма квадратов не является полным квадратом, ответ оставляют с корнем и при необходимости выносят квадратный множитель. Например, $\sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$.

Расстояние между точками А и В - это длина вектора $\overrightarrow{AB}$. Сначала находим разности координат, затем применяем формулу: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Порядок вычитания для длины не влияет на результат из-за квадратов, но лучше сохранять правило «конец минус начало», чтобы не разрушать навык для последующих операций.

- $|(x; y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- Длина всегда неотрицательна и одинакова у противоположных векторов.
- Из уравнения $x^2 = c$ при $c > 0$ получаются два значения $x = \pm\sqrt{c}$.

Разбор 1. Координаты и длина вектора по двум точкам

Условие. На координатной плоскости даны точки $A(-2; 1)$ и $B(4; 5)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину.

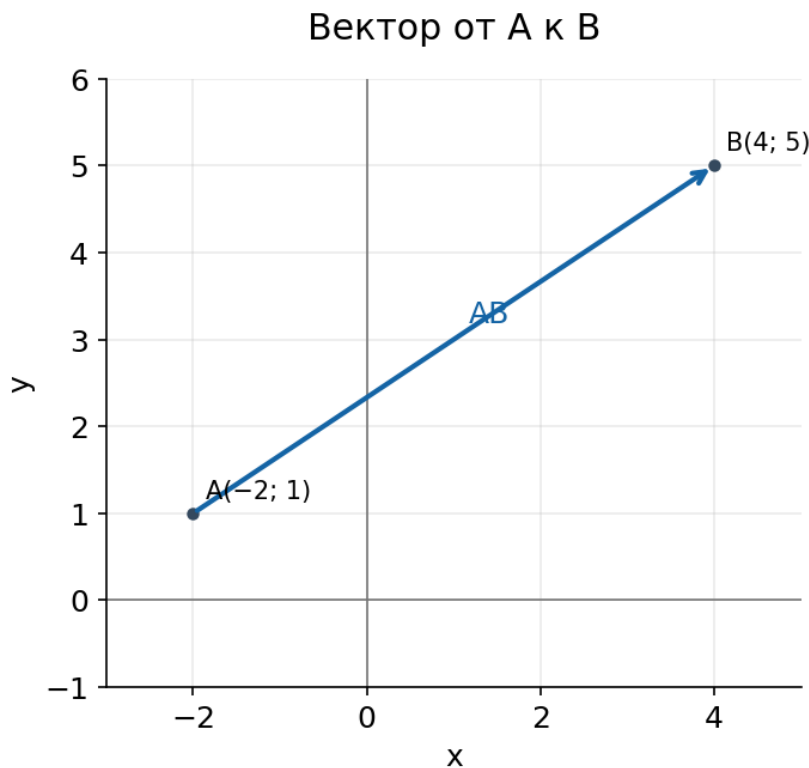


Рис. 1: Разбор 1. Координаты и длина вектора по двум точкам.

Решение

1. Выпишем начало и конец каждого направленного отрезка и только затем перейдём к координатам.
2. Из координат конца В вычитаем координаты начала А: $\overrightarrow{AB} = (4 - (-2); 5 - 1) = (6; 4)$.
3. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.
4. По рисунку перемещение действительно идёт на 6 вправо и на 4 вверх.

Ответ: $\overrightarrow{AB} = (6; 4)$, $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{13}$

06. Сложение, вычитание и умножение вектора на число

Векторы складывают по координатам: $(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$. Геометрически действует правило треугольника: второй вектор переносят так, чтобы его начало совпало с концом первого, а сумма ведёт от начала первого к концу второго. Правило параллелограмма даёт ту же сумму, если оба вектора выходят из одной точки.

Вычитание также выполняют по координатам: $a - b = (x_a - x_b; y_a - y_b)$. Геометрически это сложение с противоположным вектором: $a - b = a + (-b)$. При записи важно поставить скобки, если координата вычитаемого отрицательна. Например, $3 - (-2) = 5$, а не 1.

При умножении на число k обе координаты умножаются на k : $k(x; y) = (kx; ky)$. При $k > 0$ направление сохраняется, при $k < 0$ меняется на противоположное, а длина умножается на $|k|$. Вектор $3a$ в три раза длиннее a , вектор $-2a$ в два раза длиннее и направлен обратно.

- $(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.
- $(x_1; y_1) - (x_2; y_2) = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$.
- $k(x; y) = (kx; ky)$, а $|ka| = |k| \cdot |a|$.
- Результирующее перемещение и пройденный путь - разные величины.

Разбор 2. Сумма и разность векторов

Условие. Даны векторы $\vec{a} = (3; -2)$ и $\vec{b} = (-1; 5)$. Найдите $a + b$ и $a - b$.

Решение

1. Выполним каждую операцию по координатам.
2. Складываем соответствующие координаты: $a + b = (3 + (-1); -2 + 5) = (2; 3)$.
3. Вычитаем соответствующие координаты: $a - b = (3 - (-1); -2 - 5) = (4; -7)$.
4. Особенно проверяем знаки: $3 - (-1) = 4$.

Ответ: $a + b = (2; 3)$, $a - b = (4; -7)$

07. Середина отрезка, перенос и координатная геометрия

Координаты середины M отрезка AB равны средним арифметическим координат концов:

$M \left(\frac{(x_A + x_B)}{2}; \frac{(y_A + y_B)}{2} \right)$. Формула понятна как половина перемещения от A к B . Сначала

можно найти AB , взять половину вектора и прибавить к A . Оба способа дают одну точку и служат взаимной проверкой.

Если известны середина M и один конец A , второй конец B находят из равенств $x_B = 2x_M - x_A$ и $y_B = 2y_M - y_A$. Геометрически от M до B нужно пройти тем же вектором, что от A до M . Такой приём используется при центральной симметрии и восстановлении диагонали параллелограмма.

В параллелограмме диагонали делятся точкой пересечения пополам. Поэтому середины AC и BD совпадают. Если даны три последовательные вершины A, B, C , четвёртая вершина D находится по векторному равенству $AD = BC$ или по формуле $D = A + C - B$. Порядок вершин принципиален: формула предполагает обход $A-B-C-D$.

- $M_{AB} = \left(\frac{(x_A + x_B)}{2}; \frac{(y_A + y_B)}{2} \right)$.
- Если известны M и A , то $B = 2M - A$.
- Для последовательных вершин параллелограмма $D = A + C - B$.
- При переносе на $(p; q)$ к координатам каждой точки прибавляют p и q .

Разбор 3. Середина отрезка

Условие. Даны точки $A(-4; 2)$ и $B(6; 8)$. Найдите координаты середины M отрезка AB .

Решение

1. Выпишем начало и конец каждого направленного отрезка и только затем перейдём к координатам.

$$2. x_M = \frac{(-4 + 6)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$3. y_M = \frac{(2 + 8)}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

4. Следовательно, $M(1; 5)$. Проверка: $\overrightarrow{AM} = (5; 3)$ и $\overrightarrow{MB} = (5; 3)$.

Ответ: $M(1; 5)$

08. Скалярное произведение и перпендикулярность

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_1; y_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2)$ равно числу $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$. Это не новый вектор, а число. В вычислении сначала перемножают соответствующие координаты, затем складывают два произведения. Знаки особенно важны: произведение чисел разных знаков отрицательно.

Скалярное произведение связано с углом: $a \cdot b = |a||b| \cos \alpha$. Если ненулевые векторы перпендикулярны, $\alpha = 90^\circ$, $\cos \alpha = 0$, поэтому $a \cdot b = 0$. Обратно, если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, векторы перпендикулярны. Это быстрый координатный тест прямого угла.

Например, $\vec{a} = (2; 3)$, $\vec{b} = (-6; 4)$. Получаем $a \cdot b = 2 \cdot (-6) + 3 \cdot 4 = -12 + 12 = 0$. Значит, векторы перпендикулярны. Чертёж должен показывать один общий начальный пункт и прямой угол между направлениями; одиночная стрелка не иллюстрирует эту задачу.

- $(x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$.
- Ненулевые векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно 0.
- Положительное произведение соответствует углу меньше 90° , отрицательное углу больше 90° . У сонаправленных векторов угол равен 0° , у противоположно направленных 180° .
- При параметре составить уравнение $a \cdot b = 0$ и проверить подстановкой.

Разбор 4. Проверка перпендикулярности

Условие. Даны ненулевые векторы $\vec{a} = (2; 3)$ и $\vec{b} = (-6; 4)$. Докажите, что они перпендикулярны.

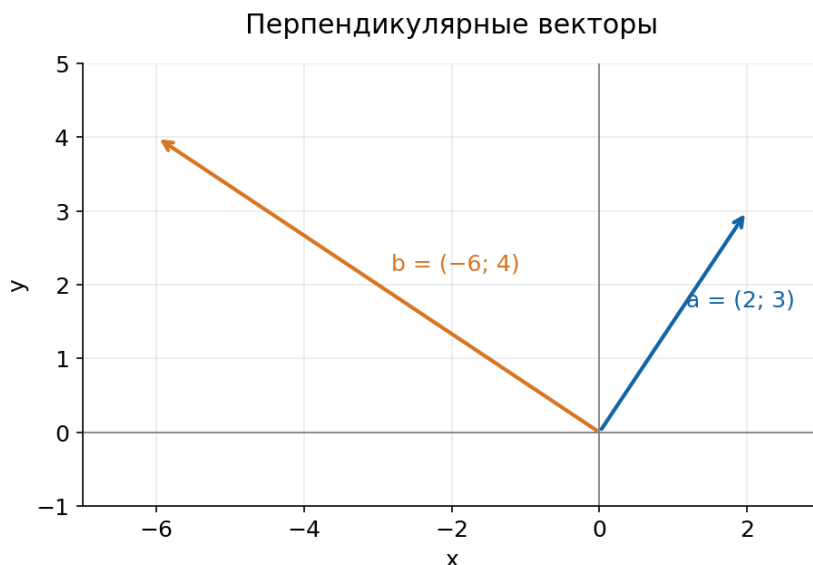


Рис. 2: Разбор 4. Проверка перпендикулярности.

Решение

1. Вычислим скалярное произведение заданных ненулевых векторов.
2. Вычисляем скалярное произведение: $a \cdot b = 2 \cdot (-6) + 3 \cdot 4$.
3. $a \cdot b = -12 + 12 = 0$.
4. Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю, поэтому $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Ответ: $\vec{a} \perp \vec{b}$

Проверка. оба вектора ненулевые; на координатном эскизе направления образуют прямой угол, что согласуется с нулевым скалярным произведением.

09. Угол, коллинеарность и площадь по координатам

Косинус угла между ненулевыми векторами вычисляют по формуле $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$. Порядок действий важен: отдельно находим скалярное произведение, отдельно две длины, затем делим. Значение косинуса обязано лежать от -1 до 1 . Если дробь вышла больше 1 по модулю, ошибка находится в длине или произведении.

Для узнаваемых углов достаточно таблицы: $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 90^\circ = 0$, $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 180^\circ = -1$. Если значение не табличное, в задачах часто просят сам косинус, а не градусную меру.

Векторы коллинеарны, если лежат на одной или параллельных прямых. В координатах один вектор должен быть числовым множителем другого: $b = ka$. Например, $(-6; 9) = -3(2; -3)$,

поэтому векторы коллинеарны и направлены противоположно. Делить координаты неудобно при нуле; безопаснее проверить равенство $x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0$.

- $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$, где оба вектора ненулевые.
- Коллинеарность: $x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0$.
- $S_{\text{параллелограмма}} = |x_1 y_2 - y_1 x_2|$.
- Для угла при А использовать векторы АВ и АС с общим началом А.

Разбор 5. Угол между векторами

Условие. Даны векторы $\vec{a} = (\sqrt{3}; 1)$ и $\vec{b} = (\sqrt{3}; -1)$. Найдите угол между ними.

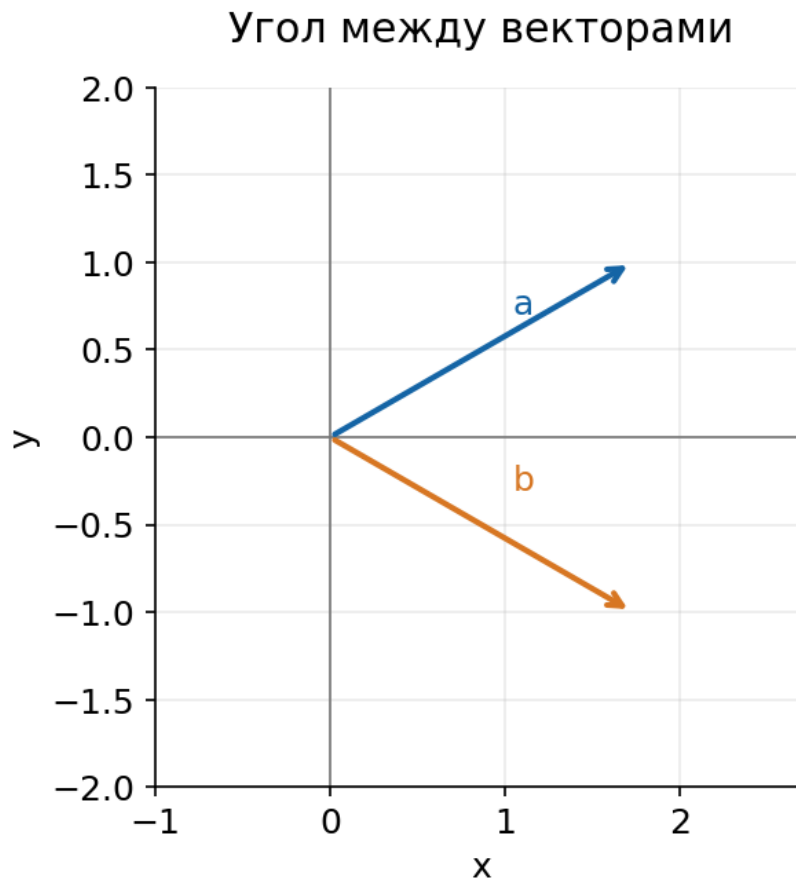


Рис. 3: Разбор 5. Угол между векторами.

Решение

1. $a \cdot b = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot (-1) = 3 - 1 = 2$.

2. $|\vec{a}| = \sqrt{3 + 1} = 2$; $|\vec{b}| = \sqrt{3 + 1} = 2$.

3. $\cos \alpha = \frac{2}{(2 \cdot 2)} = \frac{1}{2}$.

4. Для угла от 0° до 180° равенство $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ даёт $\alpha = 60^\circ$.

Ответ: 60°

Проверка. скалярное произведение положительно, поэтому угол должен быть острым; 60° действительно лежит между 0° и 90° .

10. Единый алгоритм и контроль рисунка

Перед решением определите, какой объект нужен: координаты вектора, длина, сумма, середина, скалярное произведение, косинус или площадь. Затем перепишите координаты точек в одну строку и только после этого подставляйте в формулу. Такой порядок предотвращает смешение формул длины и середины, которые обе содержат пары координат, но выполняют разные действия.

Типичная ошибка в АВ - вычесть конец из начала. Коррекция: проговорить «иду из А в В» и проверить направление по клеткам. Вторая ошибка - забыть возвести обе координаты в квадрат при длине. Третья - получить вектор вместо числа в скалярном произведении. Четвёртая - признать перпендикулярность по рисунку без проверки нулевого произведения.

- Назвать искомый объект → выбрать формулу → выполнить действия по координатам → проверить геометрический смысл.
- Каждый многошаговый результат получает отдельное обозначение.
- Рисунок обязан иметь правильные оси, масштаб, точки, направления и числа.
- Нельзя доказывать равенство, коллинеарность или перпендикулярность только внешним видом схемы.
- Косинус проверять по диапазону $[-1; 1]$, длину и площадь - по неотрицательности.

11. Типичные ошибки и способы их остановить

- Вычитают координаты начала из конца в одной координате и наоборот в другой.
- Путают точку $(x; y)$ и свободный вектор с координатами $(x; y)$.
- Забывают квадратный корень в формуле длины.
- Складывают длины вместо соответствующих координат векторов.
- Считают нулевое скалярное произведение признаком параллельности.
- Находят $\cos$ угла, но не проверяют его знак и тип угла по рисунку.

12. Дополнительные разборы

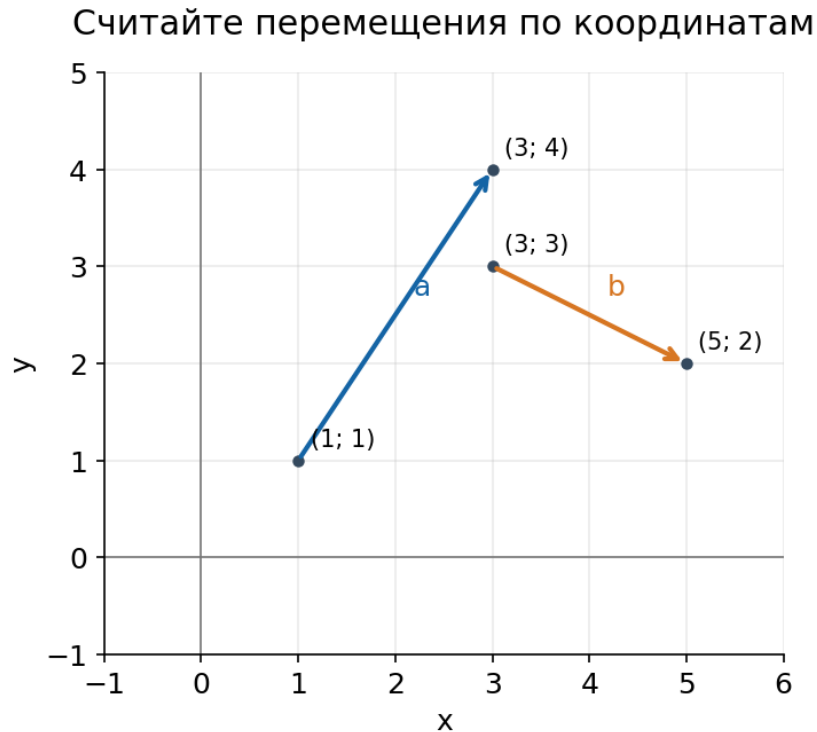
Разбор 6. Скалярное произведение по рисунку**УСЛОВИЕ**

Рис. 4: Разбор 6. Скалярное произведение по рисунку.

По координатной сетке на рисунке найдите скалярное произведение векторов **a** и **b**.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Координаты свободного вектора равны приращениям: конец минус начало.

ДО РЕШЕНИЯ.

Сначала читаем по клеткам горизонтальное и вертикальное смещение каждого вектора.

1. Читаем вектор **a**

$$\vec{a} = (3 - 1; 4 - 1) = (2; 3)$$

Он смещается на 2 клетки вправо и на 3 вверх.

2. Читаем вектор **b**

$$\vec{b} = (5 - 3; 2 - 3) = (2; -1)$$

Он смещается на 2 клетки вправо и на 1 вниз.

3. Вычисляем произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 1$$

Перемножаем одноимённые координаты и складываем.

Проверка. Произведение небольшое положительное: угол между векторами острый, но близок к прямому.

Типичная ошибка. Считать координатами вектора координаты его конца, не вычитая начало.

ОТВЕТ.

1

Разбор 7. Линейные комбинации векторов

УСЛОВИЕ

Даны векторы $a=(2;1)$ и $b=(2;-4)$. Найдите скалярное произведение векторов $a+b$ и $7a-b$.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Сначала выполняем линейные операции по координатам, затем считаем скалярное произведение.

ДО РЕШЕНИЯ.

Не раскрываем произведение формально, пока не получены обе пары координат.

1. Находим сумму

$$\vec{a} + \vec{b} = (2 + 2; 1 - 4) = (4; -3)$$

Складываем соответствующие координаты.

2. Находим вторую комбинацию

$$7\vec{a} - \vec{b} = (14; 7) - (2; -4) = (12; 11)$$

При вычитании отрицательная вторая координата b меняет знак.

3. Считаем произведение

$$(4; -3) \cdot (12; 11) = 48 - 33 = 15$$

Используем формулу $x_1x_2 + y_1y_2$.

Проверка. Прямое раскрытие даёт $7|a|^2 + 6a \cdot b - |b|^2 = 35 + 0 - 20 = 15$.

Типичная ошибка. Записать вторую координату $7a-b$ как $7-4=3$ вместо $7-(-4)=11$.

ОТВЕТ.

15

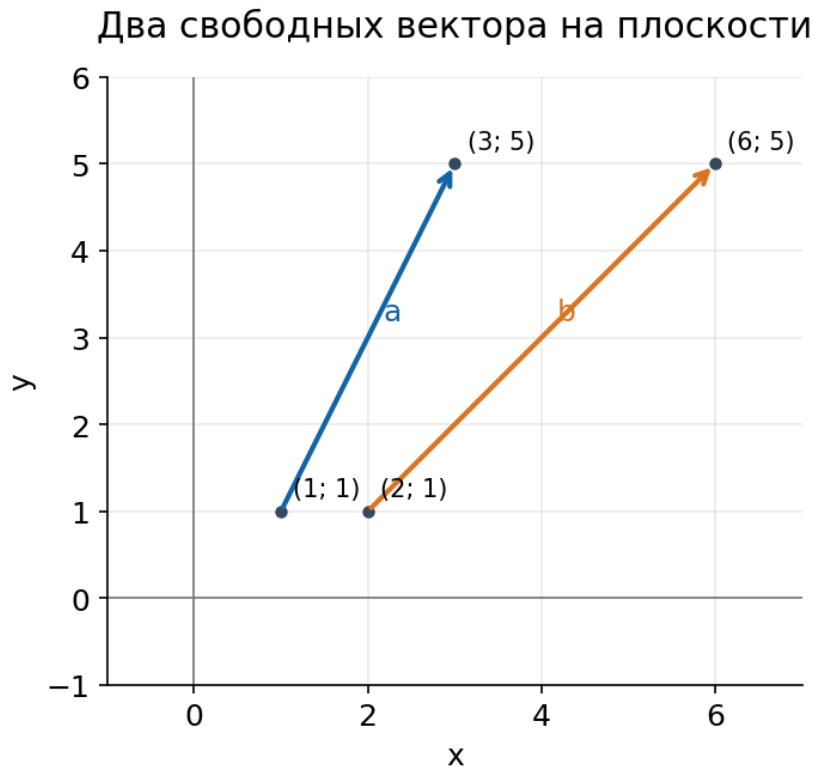
Разбор 8. Длина суммы по координатной сетке**УСЛОВИЕ**

Рис. 5: Разбор 8. Длина суммы по координатной сетке.

По координатной сетке на рисунке найдите длину вектора $a+b$.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Сначала читаем координаты обоих векторов, затем складываем и применяем теорему Пифагора.

ДО РЕШЕНИЯ.

Оба вектора направлены вправо и вверх, поэтому обе координаты суммы положительны.

1. Читаем a

$$\vec{a} = (3 - 1; 5 - 1) = (2; 4)$$

Две клетки вправо и четыре вверх.

2. Читаем b

$$\vec{b} = (6 - 2; 5 - 1) = (4; 4)$$

Четыре клетки вправо и четыре вверх.

3. Складываем

$$\vec{a} + \vec{b} = (6; 8)$$

Суммируем одноимённые координаты.

4. Находим длину

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

Получаем треугольник 6-8-10.

Проверка. Длина 10 меньше суммы длин исходных векторов и больше каждой их проекции.

Типичная ошибка. Сложить длины векторов вместо их координат.

ОТВЕТ.

10

13. Вопрос по теме

Почему из координат конца вычитают координаты начала?

Вектор описывает перемещение от начала к концу. Поэтому к координатам начала нужно прибавить найденные разности, чтобы получить конец. При обратном направлении обе координаты меняют знак.

14. Самостоятельная работа

В тесте 40 заданий. Начните с заданий 1-20, затем переходите к 21-35 и 36-40. Решите самостоятельно и только после этого откройте объяснение. Задания на повторение отмечены отдельно.

Перейти к тестовым заданиям урока 19

Предыдущий урок: Вероятность: несколько событий.