



Тригонометрические уравнения

Задания, решения и ответы

40 заданий с пошаговыми решениями и ответами. Сначала выполните задание самостоятельно, затем сравните ход рассуждений с разбором.

01. Основа метода: задания 1-10

Задание 1

Решите уравнение

$$\sin x = 0.$$

Шаг 1. На единичной окружности отмечаем точки с ординатой 0.

Шаг 2. Записываем соответствующие углы и учитываем период 2π .

Шаг 3. Получаем $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Задание 2

Решите уравнение

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Шаг 1. На единичной окружности отмечаем точки с ординатой $\frac{1}{2}$.

Шаг 2. Записываем соответствующие углы и учитываем период 2π .

Шаг 3. Получаем $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Задание 3

Решите $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Шаг 1. Для $u = 2x - \frac{\pi}{6}$ получаем $u = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $u = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$.

Шаг 2. Прибавляем $\frac{\pi}{6}$ и делим обе части на 2. Период по x становится равным π .

Ответ. $x = \pi k$ или $x = \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Задание 4

Решите уравнение

$$\sin x = 1.$$

Шаг 1. На единичной окружности отмечаем точки с ординатой 1.

Шаг 2. Записываем соответствующие углы и учитываем период 2π .

Шаг 3. Получаем $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Задание 5

Сколько решений имеет $\sin x = \frac{3}{2}$?

Для любого действительного x выполнено $-1 \leq \sin x \leq 1$. Значение $\frac{3}{2}$ не достигается. **Ответ.** Решений нет.

Задание 6

Решите уравнение

$$\cos x = 0.$$

Шаг 1. На единичной окружности ищем точки с абсциссой 0.

Шаг 2. Учитываем симметрию косинуса и его период 2π .

Шаг 3. Получаем $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Задание 7

Решите уравнение

$$\cos x = \frac{1}{2}.$$

Шаг 1. На единичной окружности ищем точки с абсциссой $\frac{1}{2}$.

Шаг 2. Учитываем симметрию косинуса и его период 2π .

Шаг 3. Получаем $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Задание 8

Решите $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$.

Шаг 1. $3x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$.

Шаг 2. Из каждой ветви отдельно выражаем x .

Ответ. $x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi k}{3}$ или $x = -\frac{11\pi}{36} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Задание 9

Решите $\cos^2 x = 1$.

Равенство означает $\cos x = 1$ или $\cos x = -1$. Две семьи $2\pi k$ и $\pi + 2\pi k$ объединяются в одну. **Ответ.** $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Задание 10

Решите $\sin^2 x + \cos x = 1$.

Подставляем $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Получаем $\cos x (1 - \cos x) = 0$. Каждая ветвь допустима. **Ответ.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

02. Преобразования и ограничения: задания 11-16**Задание 11**

Решите $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Тангенс равен нулю при аргументе πk . Поэтому $2x - \frac{\pi}{3} = \pi k$. Найденные значения не обращают косинус аргумента в нуль. **Ответ.** $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Задание 12

Решите $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$.

Шаг 1. ОДЗ: $\cos x \neq -1$, то есть $x \neq \pi + 2\pi k$.

Шаг 2. Числитель равен нулю при $x = \pi k$. Из этой семьи исключаем нечётные кратные π .

Ответ. $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Задание 13

Решите $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$.

Шаг 1. При $\cos x = 0$ левая часть равна 1. Таких корней нет, поэтому можно делить на $\cos^2 x$.

Шаг 2. При $t = \tan x$ получаем $(t - 2)(t + 1) = 0$.

Ответ. $x = \arctan 2 + \pi k$ или $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Задание 14

Решите $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$.

Левая часть равна $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Максимум достигается только при $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. **Ответ.** $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Задание 15

Решите уравнение

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0.$$

Шаг 1. Выбираем преобразование: перенос, разложение на множители или формулу суммы в произведение.

Шаг 2. Получаем равносильную запись $\cos x \neq 0$ и $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Шаг 3. Решаем каждое простейшее тригонометрическое уравнение отдельно.

Шаг 4. Проверяем, что деление не использовалось без контроля нулевого множителя.

Шаг 5. Объединяем серии: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Задание 16

Решите уравнение

$$\sin 2x = 0.$$

Шаг 1. Выбираем преобразование: перенос, разложение на множители или формулу суммы в произведение.

Шаг 2. Получаем равносильную запись $2x = \pi k$.

Шаг 3. Решаем каждое простейшее тригонометрическое уравнение отдельно.

Шаг 4. Проверяем, что деление не использовалось без контроля нулевого множителя.

Шаг 5. Объединяем серии: $x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

03. Повторение пройденного: задания 17-20**Задание 17**

Накопительное повторение. Решите

$$2^{x+1} = 16.$$

Шаг 1. $16 = 2^4$.

Шаг 2. Приравниваем показатели: $x + 1 = 4$.

Шаг 3. Получаем $x = 3$.

Ответ. 3

Задание 18

Накопительное повторение. Решите

$$\log_3(x - 1) = 2.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x > 1$.

Шаг 2. $x - 1 = 3^2 = 9$.

Шаг 3. $x = 10$ входит в ОДЗ.

Ответ. 10

Задание 19

Накопительное повторение. Найдите максимум $3 \sin x + 4 \cos x$.

Шаг 1. Амплитуда равна $\sqrt{3^2 + 4^2}$.

Шаг 2. Получаем 5.

Шаг 3. Представление через синус с фазовым сдвигом существует.

Шаг 4. Максимум синуса равен 1.

Шаг 5. Поэтому максимум равен 5.

Ответ. 5

Задание 20

Накопительное повторение. Решите

$$\sqrt{x+6} = x.$$

Шаг 1. Требуется $x \geq 0$.

Шаг 2. Квадрат даёт $x+6 = x^2$.

Шаг 3. $x^2 - x - 6 = 0$.

Шаг 4. Кандидаты 3 и -2.

Шаг 5. Условие знака оставляет 3.

Ответ. 3

04. Составные задачи: задания 21-30**Задание 21**

Решите уравнение

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Шаг 1. Выбираем преобразование: перенос, разложение на множители или формулу суммы в произведение.

Шаг 2. Получаем равносильную запись $2x - \frac{\pi}{3} = 2\pi k$.

Шаг 3. Решаем каждое простейшее тригонометрическое уравнение отдельно.

Шаг 4. Проверяем, что деление не использовалось без контроля нулевого множителя.

Шаг 5. Объединяем серии: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Задание 22

Решите уравнение

$$\sin x (2 \cos x - 1) = 0.$$

Шаг 1. Выбираем преобразование: перенос, разложение на множители или формулу суммы в произведение.

Шаг 2. Получаем равносильную запись $\sin x = 0$ или $\cos x = \frac{1}{2}$.

Шаг 3. Решаем каждое простейшее тригонометрическое уравнение отдельно.

Шаг 4. Проверяем, что деление не использовалось без контроля нулевого множителя.

Шаг 5. Объединяем серии: $x = \pi k$ или $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $x = \pi k$ или $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Задание 23

Решите $\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{\cos x} = 0$.

Шаг 1. ОДЗ: $\cos x \neq 0$.

Шаг 2. Числитель: $\sin x (2 \sin x - 1) = 0$. Отсюда $\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Шаг 3. Во всех найденных точках косинус отличен от нуля.

Ответ. $x = \pi k; x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Задание 24

Решите $\sin x + \cos x = \sin 2x + 1$.

Шаг 1. Вводим $t = \sin x + \cos x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Тогда $\sin 2x = t^2 - 1$.

Шаг 2. Уравнение принимает вид $t = t^2$. Оба значения $t = 0, 1$ допустимы.

Шаг 3. Для $t = 0$ имеем $\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Для $t = 1$ получаем две серии синуса.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k; x = 2\pi k; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Задание 25

Решите уравнение

$$\sin x + \sin 3x = 0.$$

Шаг 1. Выбираем преобразование: перенос, разложение на множители или формулу суммы в произведение.

Шаг 2. Получаем равносильную запись $2 \sin 2x \cos x = 0$.

Шаг 3. Решаем каждое простейшее тригонометрическое уравнение отдельно.

Шаг 4. Проверяем, что деление не использовалось без контроля нулевого множителя.

Шаг 5. Объединяем серии: $x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Задание 26

Решите уравнение

$$\cos x - \cos 3x = 0.$$

Шаг 1. Выбираем преобразование: перенос, разложение на множители или формулу суммы в произведение.

Шаг 2. Получаем равносильную запись $2 \sin 2x \sin x = 0$.

Шаг 3. Решаем каждое простейшее тригонометрическое уравнение отдельно.

Шаг 4. Проверяем, что деление не использовалось без контроля нулевого множителя.

Шаг 5. Объединяем серии: $x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

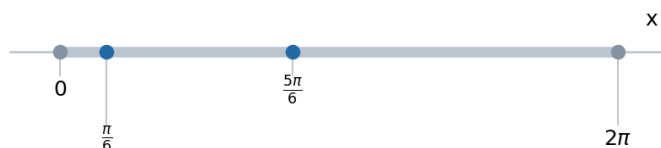
Ответ. $x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Задание 27

Найдите все решения $\sin x = \frac{1}{2}$ на $[0; 2\pi]$.

Шаг 1. Записываем общие серии. $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ и $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. Условия отбора дают $-\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{11}{12}$ и $-\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{7}{12}$. В обеих сериях только $k = 0$.

Ответ. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.



Синие точки - все отобранные корни; серым показан исходный промежуток.

Задание 28

Найдите все решения $\cos x = -\frac{1}{2}$ на $[-\pi; \pi]$.

Шаг 1. Записываем общие серии. $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ и $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. Диапазоны $-\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{1}{6}$ и $-\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{5}{6}$ содержат только $k = 0$.

Ответ. $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$.



Синие точки - все отобранные корни; серым показан исходный промежуток.

Задание 29

Найдите все решения $\tan x = 1$ на $[-\pi; \pi]$.

Шаг 1. Записываем общие серии. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$. Из $-\pi \leq x \leq \pi$ получаем $-\frac{5}{4} \leq k \leq \frac{3}{4}$, поэтому $k = -1, 0$. Точки $\pm \frac{\pi}{2}$ не входят в ОДЗ и среди найденных корней отсутствуют.

Ответ. $-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$.



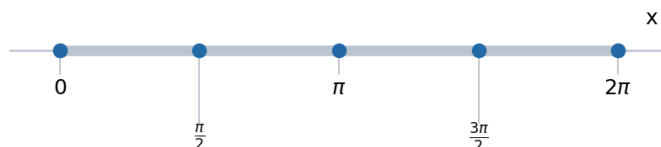
Синие точки - все отобранные корни; серым показан исходный промежуток.

Задание 30

Найдите все решения $\sin 2x = 0$ на $[0; 2\pi]$.

Шаг 1. Записываем общие серии. $x = \frac{\pi k}{2}$. Условие отбора даёт $0 \leq k \leq 4$, то есть $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Обе границы отрезка входят в ответ.

Ответ. $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.



Синие точки - все отобранные корни; серым показан исходный промежуток.

05. Развёрнутое решение: задания 31-36

Задание 31

а) Решите уравнение

$$2 \cos^2 x - 3 \sin x = 0.$$

б) Найдите все корни на отрезке $[-2\pi; 0]$.

Шаг 1. Подставим $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Получаем $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$.

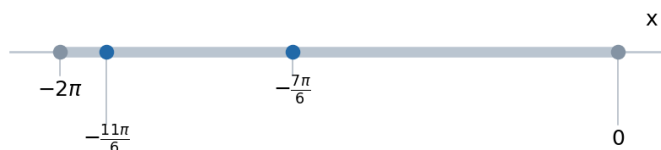
Шаг 2. При $t = \sin x$ корни равны $t = \frac{1}{2}$ и $t = -2$. Второе значение невозможно, поэтому $\sin x = \frac{1}{2}$.

Шаг 3. Общие решения: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Шаг 4. На $[-2\pi; 0]$ попадают $x = -\frac{11\pi}{6}$ и $x = -\frac{7\pi}{6}$.

Проверка полноты. Недопустимый корень $t = -2$ исключён до отбора; обе серии $\sin x = \frac{1}{2}$ рассмотрены.

Ответ. а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; б) $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$.



Синие точки - все отобранные корни; серым показан исходный промежуток.

Задание 32

а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \cos x.$$

б) Отберите корни на $[0; 2\pi]$.**Шаг 1.** Используем $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ и переносим всё влево:

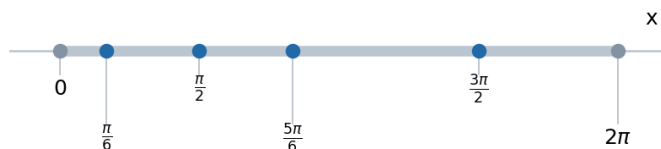
$$\cos x (2 \sin x - 1) = 0.$$

Шаг 2. Первая ветвь даёт $\cos x = 0$, то есть $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Вторая - $\sin x = \frac{1}{2}$, то есть $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

Шаг 3. На $[0; 2\pi]$ получаем $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ и $\frac{3\pi}{2}$.

Проверка полноты. Деления на $\cos x$ не было, поэтому ветвь $\cos x = 0$ не потеряна; все три серии отобраны независимо.

Ответ. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$.



Синие точки - все отобранные корни; серым показан исходный промежуток.

Задание 33

а) Решите уравнение

$$\cos 2x + \cos x = 0.$$

б) Найдите корни на $[-\pi; \pi]$.**Шаг 1.** Положим $t = \cos x$ и используем $\cos 2x = 2t^2 - 1$. Получаем $2t^2 + t - 1 = 0$.**Шаг 2.** Отсюда $t = \frac{1}{2}$ или $t = -1$. Поэтому $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ либо $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.**Шаг 3.** На $[-\pi; \pi]$ первая серия даёт $-\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$, а вторая - обе граничные точки $-\pi$ и π .**Проверка полноты.** Значения t допустимы для косинуса; обе равные по модулю, но разные точки закрытого отрезка учтены.**Ответ.** а) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi$.

Синие точки - все отобранные корни; серым показан исходный промежуток.

Задание 34

а) Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = 1.$$

б) Найдите корни на $[-\pi; 2\pi]$.

Шаг 1. Представим левую часть как $\sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Тогда

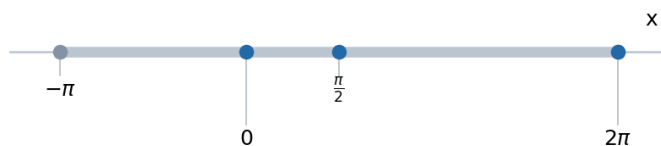
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Шаг 2. Получаем $x = 2\pi k$ или $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Шаг 3. На заданном отрезке лежат $0, \frac{\pi}{2}$ и 2π .

Проверка полноты. Обе стандартные серии для синуса учтены; правая граница 2π входит в отрезок.

Ответ. а) $x = 2\pi k$ или $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; б) $0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$.



Синие точки - все отобранные корни; серым показан исходный промежуток.

Задание 35

а) Решите уравнение

$$2 + 2 \cos(\pi - 2x) + \sqrt{8} \sin x = \sqrt{6} + \sqrt{12} \sin x.$$

б) Найдите корни на $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Источник: ФИПИ, демоверсия ЕГЭ-2026, профильная математика, вариант 2, задание 13.

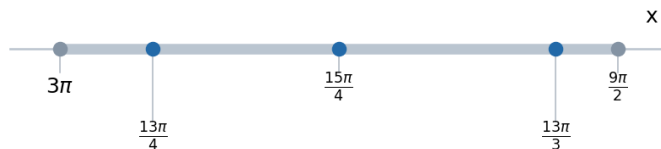
Шаг 1. Используем $\cos(\pi - 2x) = -\cos 2x$ и $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$. После переноса получаем

$$(2 \sin x - \sqrt{3})(2 \sin x + \sqrt{2}) = 0.$$

Шаг 2. Все серии:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Шаг 3. Условие $3\pi \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$ для четырёх серий даёт соответственно $\frac{4}{3} \leq k \leq \frac{25}{12}$; $\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{23}{12}$; $\frac{13}{8} \leq k \leq \frac{19}{8}$; $\frac{7}{8} \leq k \leq \frac{13}{8}$. Целые индексы: 2; ни одного; 2; 1.**Ответ.** а) четыре серии выше; б) $\frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{13\pi}{3}$.

Синие точки - все отобранные корни; серым показан исходный промежуток.

Задание 36

а) Решите уравнение

$$\tan x + \cot x = 4.$$

б) Найдите корни на $(0; \pi)$.

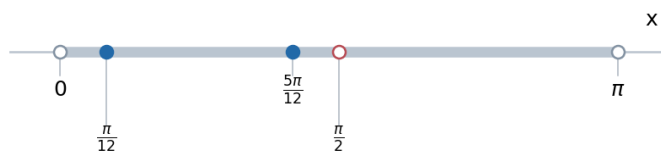
Шаг 1. ОДЗ: $\sin x \cos x \neq 0$. На ОДЗ $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$.

Шаг 2. Поэтому $\sin 2x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{12} + \pi k$ или $x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$.

Шаг 3. На $(0; \pi)$ остаются $\frac{\pi}{12}$ и $\frac{5\pi}{12}$; обе точки допустимы.

Проверка полноты. Формула получена только на ОДЗ; отбор по обеим сериям выполнен на открытом интервале.

Ответ. а) $x = \frac{\pi}{12} + \pi k$ или $x = \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$.



Синие точки - все отобранные корни; серым показан исходный промежуток.

06. Сложные задачи и параметры: задания 37-40

Задание 37

а) Решите уравнение

$$\sin 3x = \sin x.$$

б) Отберите корни на $[0; 2\pi]$.

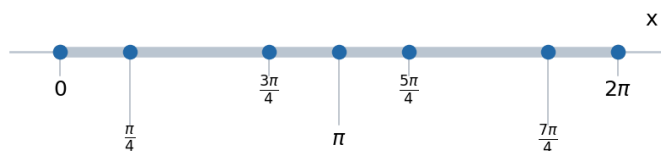
Шаг 1. По формуле разности $\sin 3x - \sin x = 2 \cos 2x \cdot \sin x$. Поэтому $\sin x = 0$ или $\cos 2x = 0$.

Шаг 2. Общие решения: $x = \pi k$ либо $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Шаг 3. На $[0; 2\pi]$ получаем $0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$.

Проверка полноты. Две ветви произведения не пересекаются на найденных точках и вместе исчерпывают все решения.

Ответ. а) $x = \pi k$ или $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; б) $0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$.



Синие точки - все отобранные корни; серым показан исходный промежуток.

Задание 38

а) Решите уравнение

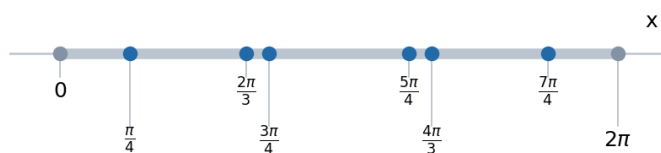
$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$$

б) Найдите корни на $[0; 2\pi]$.**Шаг 1.** Сгруппируем крайние слагаемые: $\cos x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos x$.**Шаг 2.** Тогда уравнение принимает вид $\cos 2x (2 \cos x + 1) = 0$.**Шаг 3.** Первая ветвь: $\cos 2x = 0$, то есть $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. Вторая: $\cos x = -\frac{1}{2}$, то есть $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$.**Шаг 4.** На $[0; 2\pi]$ получаем

$$\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}.$$

Проверка полноты. Равносильное разложение на множители не содержит деления; совпадений между двумя отобранными сериями нет.**Ответ.** а) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ или $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б)

$$\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}.$$



Синие точки - все отобранные корни; серым показан исходный промежуток.

Задание 39

В зависимости от a определите число различных корней на $[0; 2\pi)$:

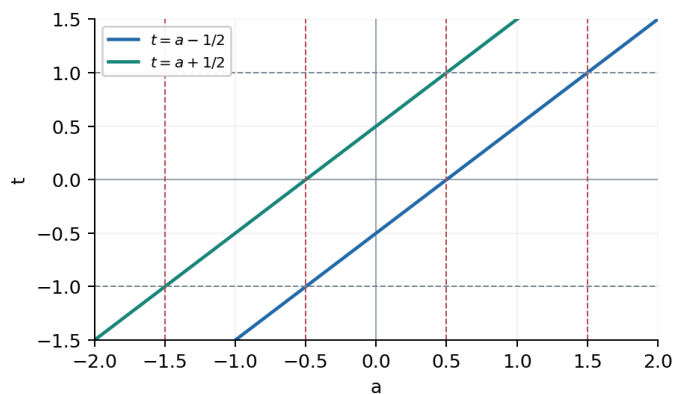
$$\cos^2 x - 2a \cos x + a^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Шаг 1. Уравнение равносильно $(\cos x - a)^2 = \frac{1}{4}$. Значения замены $t = \cos x$ равны $a - \frac{1}{2}$ и $a + \frac{1}{2}$ и всегда различны.

Шаг 2. Каждый уровень строго внутри $(-1; 1)$ даёт два угла; уровень -1 или 1 даёт один; вне $[-1; 1]$ углов нет. Точка 2π исключена.

Шаг 3. Уровни пересекают границы диапазона при $a = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. Суммируем числа углов для обоих уровней.

Ответ. 4 корня при $|a| < \frac{1}{2}$; 3 при $|a| = \frac{1}{2}$; 2 при $\frac{1}{2} < |a| < \frac{3}{2}$; 1 при $|a| = \frac{3}{2}$; 0 при $|a| > \frac{3}{2}$.



Допустимы уровни t между -1 и 1 ; крайние уровни дают по одному углу.

Задание 40

В зависимости от a определите число различных корней на $[0; 2\pi)$:

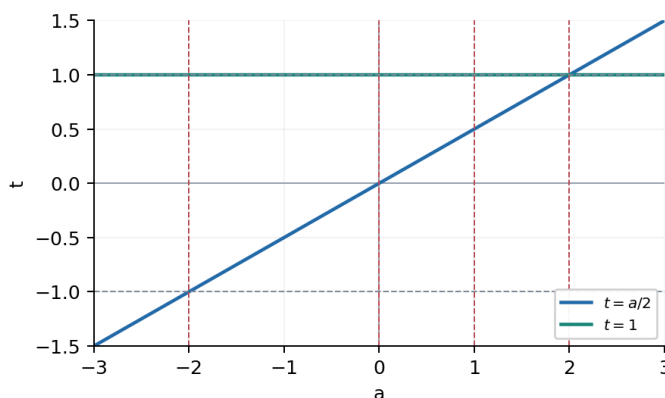
$$\frac{2 \sin^2 x - (a + 2) \sin x + a}{\sin x - a} = 0.$$

Шаг 1. Обозначим $t = \sin x$. Требуется $-1 \leq t \leq 1$ и $t \neq a$. Числитель равен $(2t - a)(t - 1)$.

Шаг 2. Уровень $t = 1$ даёт один угол, кроме случая $a = 1$, когда он запрещён. Уровень $t = \frac{a}{2}$ существует при $|a| \leq 2$, запрещён при $a = 0$ и совпадает с первым при $a = 2$.

Шаг 3. При $-2 < a < 2$ и $a \notin \{0; 1\}$ второй уровень даёт два угла, первый ещё один. При $a = -2$ получаем два крайних уровня, при $a = 1$ только $t = \frac{1}{2}$. При $a = 0$ остаётся $t = 1$; при $a = 2$ два уровня совпадают, поэтому корень один.

Ответ. 3 корня при $a \in (-2; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$; 2 при $a \in \{-2; 1\}$; 1 при $a \in (-\infty; -2) \cup \{0\} \cup [2; +\infty)$.



Уровни синуса: проверяем ОДЗ при $a = 0, 1$ и совпадение уровней при $a = 2$.