



Чётность и делимость

Теория и разобранные примеры

Урок 29. Чётность и делимость. Объяснения с начального уровня, исходные примеры с пошаговыми решениями и отдельный тест для самостоятельной проверки.

От нескольких примеров к доказательству

Проверка нескольких чисел помогает заметить закономерность, но не доказывает её для всех натуральных чисел. Для утверждения «существует» достаточно одного подходящего примера. Для утверждения «невозможно» нужно рассуждение, охватывающее все допустимые случаи.

Чётность как остаток от деления на два

Любое целое число имеет вид $2k$ или $2k + 1$, где k — целое. Эти два случая исчерпывают все числа, включая отрицательные. Поэтому перебор двух вариантов является доказательством. Например, произведение двух соседних целых чисел чётно: одно из них обязательно имеет вид $2k$.

Для делимости на четыре одной чётности недостаточно. Квадрат чётного числа делится на четыре, а квадрат нечётного даёт остаток один: $(2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1$. Сумма двух нечётных квадратов поэтому даёт остаток два и на четыре не делится.

Как работать с остатками

Запись $a \equiv b \pmod{m}$ означает, что разность $a - b$ делится на m . Такие равенства можно складывать и умножать. Но сокращать общий множитель без условия взаимной простоты нельзя. Из $2a \equiv 2b \pmod{4}$ не следует $a \equiv b \pmod{4}$: например, $a = 1$, $b = 3$. После деления на два здесь можно сделать вывод только по модулю два.

Произведение последовательных чисел

В трёх последовательных числах есть число, кратное трём, и хотя бы одно чётное. Значит, произведение делится на шесть. Обоснование использует взаимную простоту двух и трёх. Делимость на четыре и на шесть сама по себе не гарантирует делимость на двадцать четыре; гарантирован делитель, равный их НОК, то есть двенадцать.

Проверяйте область задачи: натуральность, различие чисел и ограничения на цифры не следуют автоматически из доказанной делимости.



Подробные объяснения и разобранные примеры

1. Что проверяет пункт 19а

В пункте 19а требуется получить точный ответ и обосновать его. Одного примера достаточно только для утверждения о существовании. Чтобы доказать невозможность или всеобщность свойства, нужен общий аргумент: разбор чётности, делимости, остатков или структуры произведения.

ЛОГИКА ОТВЕТА

«Существует» доказывается корректным примером и проверкой всех условий. «Не существует» доказывается противоречием, перебором всех возможных остатков или другим исчерпывающим рассуждением.

2. Чётность

Операция	Результат
чётное $\pm$ чётное	чётное
нечётное $\pm$ нечётное	чётное
чётное $\pm$ нечётное	нечётное
произведение	чётно, если есть хотя бы один чётный множитель

Удобно записывать чётное число как $2k$, нечётное — как $2k + 1$. Такая запись превращает словесное свойство в доказательство. Например, квадрат нечётного числа имеет вид $(2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1$, значит, он нечётный.

Разбор 1. Чётность суммы и произведения

УРОВЕНЬ. База • старт

УСЛОВИЕ

Может ли сумма квадратов двух нечётных целых чисел делиться на 4? Обоснуйте ответ.

1. Квадрат любого нечётного числа сравним с 1 по модулю 4.
2. Сумма двух таких квадратов сравнима с 2 по модулю 4, поэтому на 4 не делится.

ОТВЕТ. Нет

3. Делимость и разложение на множители

Если нужно доказать делимость выражения, ищите явный множитель. Для разности степеней используйте разложение, для произведения последовательных чисел — тот факт, что среди них обязательно встречаются числа нужных остатков.



$$a^n - b^n = (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$
$$n(n+1)(n+2) : 6$$

Разбор 2. Делимость алгебраического выражения

УРОВЕНЬ. База

УСЛОВИЕ

Может ли разность квадратов двух последовательных натуральных чисел быть равна 2025? Обоснуйте ответ.

1. Для последовательных чисел $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$.
2. Уравнение $2n + 1 = 2025$ даёт $n = 1012$.
3. Действительно, $1013^2 - 1012^2 = 2025$.

ОТВЕТ. Да

4. Остатки как короткий язык

Запись $a \equiv r \pmod{m}$ означает, что при делении a на m получается остаток r . Складывать и умножать сравнения можно. После каждой операции остаток удобно сразу приводить к одному из чисел от 0 до $m - 1$.

- если $a \equiv r \pmod{m}$ и $b \equiv s \pmod{m}$, то $a + b \equiv r + s \pmod{m}$;
- для произведения: $ab \equiv rs \pmod{m}$;
- для степеней ищите короткий цикл остатков;
- для квадратов часто достаточно модулей 4, 8 или 3.

Разбор 3. Пример существования

УРОВЕНЬ. Основной

УСЛОВИЕ

Существует ли натуральное n , для которого $n^2 + 1$ делится на 5? Обоснуйте ответ.

1. Возьмём $n = 2$: $2^2 + 1 = 5$ делится на 5.



ОТВЕТ. Да

5. Квадраты и суммы квадратов

Модуль	Возможные остатки квадрата	Когда полезно
3	0, 1	исключить остаток 2
4	0, 1	исключить остаток 3 у суммы двух квадратов
8	0, 1, 4	работа с нечётными квадратами
5	0, 1, 4	исключить остатки 2 и 3

Разбор 4. Невозможность по чётности

УРОВЕНЬ. Основной

УСЛОВИЕ

Может ли сумма трёх нечётных целых чисел быть равна 2026? Обоснуйте ответ.

- Сумма двух нечётных чисел чётна, а добавление третьего нечётного даёт нечётное число.
- Число 2026 чётно.

ОТВЕТ. Нет

6. НОД, НОК и взаимная простота

При нескольких условиях делимости полезно найти НОД или НОК. Если $\text{НОД}(a, b) = 1$ и произведение bc делится на a , то c делится на a . Условие взаимной простоты обязательно: например, $2 \cdot 3$ делится на 6, но ни 2, ни 3 не делится на 6.

Разбор 5. Несколько условий делимости

УРОВЕНЬ. Основной

УСЛОВИЕ

Существует ли натуральное n , при котором $3^n + 1$ делится на 8? Обоснуйте ответ.

- Если n нечётно, $3^n \equiv 3 \pmod{8}$, сумма даёт остаток 4.
- Если n чётно, $3^n \equiv 1 \pmod{8}$, сумма даёт остаток 2.

ОТВЕТ. Нет

7. Как оформлять обоснование

Сформулируйте, что именно нужно доказать: существование, невозможность или делимость.

Выберите один подходящий модуль или представление через $2k$ и $2k+1$.



Рассмотрите все возможные остатки, если доказываете невозможность.

Сделайте явный вывод теми же словами, что и вопрос условия.

Разбор 6. Полное краткое доказательство

УРОВЕНЬ. Основной

УСЛОВИЕ

Может ли сумма квадратов трёх нечётных чисел делиться на 8? Обоснуйте ответ.

1. Квадрат нечётного числа сравним с 1 по модулю 8.
2. Сумма трёх квадратов сравнима с 3 по модулю 8.

ОТВЕТ. Нет

8. Ошибки, которые обнуляют идею

- Несколько проверенных примеров выданы за доказательство для всех натуральных чисел.
- Пример удовлетворяет только части условий: делимости, но не ограничению на цифры или знак.
- Использован неверный обратный переход: из делимости произведения сделан вывод о делимости каждого множителя.
- Остаток оставлен отрицательным или большим модуля, из-за чего итог сравнивается неверно.
- Ответ «да/нет» дан без завершающего предложения, связывающего рассуждение с вопросом.

МИНИМУМ ГОТОВНОСТИ

- ☐ Умею различать пример и доказательство невозможности.
- ☐ Знаю остатки квадратов по модулям 3, 4, 5 и 8.
- ☐ Могу найти цикл последних цифр степени.
- ☐ Записываю финальный вывод, а не оставляю только вычисления.

9. Близкие аналоги к опорным разборам

Для каждого утверждения сначала выберите язык доказательства: чётность, остатки, разложение или явный пример. Только после этого выполняйте вычисления.

Близкий аналог 1

Найдите остаток числа $10^6 + 7$ при делении на 9.

Сначала назовите модуль или свойство делимости, которое работает для всех допустимых чисел.

1. $10 \equiv 1 \pmod{9}$, значит $10^6 + 7 \equiv 1 + 7 = 8$.

**ОТВЕТ К АНАЛОГУ. 8****Близкий аналог 2****Найдите НОД чисел 84 и 126.**

Сначала назовите модуль или свойство делимости, которое работает для всех допустимых чисел.

1. $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$; общий множитель $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ. 42**Близкий аналог 3****Может ли сумма квадратов двух целых чисел быть равна 2026? Приведите пример или докажите невозможность.**

Сначала назовите модуль или свойство делимости, которое работает для всех допустимых чисел.

1. Подходит конструкция $1^2 + 45^2 = 1 + 2025 = 2026$.
2. Оба слагаемых являются квадратами целых чисел.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ. Да; например, 1 и 45**Близкий аналог 4****Существует ли натуральное n , для которого $n^2 + 3$ делится на 4? Обоснуйте ответ.**

Сначала назовите модуль или свойство делимости, которое работает для всех допустимых чисел.

1. Возьмём нечётное n . Тогда $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$.
2. Следовательно, $n^2 + 3 \equiv 0 \pmod{4}$; например, $n = 1$.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ. Да**Близкий аналог 5****Может ли сумма трёх нечётных целых чисел быть равна 2026? Обоснуйте ответ.**

Сначала назовите модуль или свойство делимости, которое работает для всех допустимых чисел.

1. Сумма двух нечётных чисел чётна, а добавление третьего нечётного даёт нечётное число.
2. Число 2026 чётно.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ. Нет**Близкий аналог 6****Существует ли натуральное n , при котором $10^n + 1$ делится на 3? Обоснуйте ответ.**



Сначала назовите модуль или свойство делимости, которое работает для всех допустимых чисел.

1. По модулю 3: $10 \equiv 1$, поэтому $10^n + 1 \equiv 2 \pmod{3}$.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ. Нет

10. Итоговая карта урока

Навык	Признак готовности	Если не получилось
квантор	понятно, нужен пример или общий запрет	перечитать глагол в условии
модуль	выбран модуль с коротким набором остатков	выписать остатки квадратов или степеней
доказательство	аргумент охватывает все допустимые числа	заменить перебор общим свойством
вывод	последняя фраза отвечает ровно на вопрос	связать противоречие с исходным утверждением

11. Доказательства через остатки и делимость

Как выбрать доказательство, а не перебор

В пункте 19а сначала выясняют логическую форму вопроса. Для утверждения «может ли» положительный ответ требует одного полностью проверенного примера. Отрицательный ответ требует свойства, общего для всех допустимых чисел. Перебор десяти или ста случаев не доказывает невозможность, если множество вариантов бесконечно.

Модуль выбирают по выражению. Для квадратов особенно полезны 4 и 8: квадрат даёт по модулю 4 только 0 или 1, а квадрат нечётного числа по модулю 8 всегда равен 1. Для последней цифры работают модули 10, 5 и 2. Для суммы цифр — 9 и 3. Для степеней выбирают модуль, в котором быстро возникает короткий цикл остатков.

Например, число 2026 не может быть квадратом целого числа, потому что $2026 \equiv 2 \pmod{4}$, а квадрат никогда не даёт такого остатка. Здесь одна строка остатков заменяет бесконечный перебор. Но если вопрос спрашивает о сумме двух квадратов, нужно рассмотреть все возможные суммы остатков 0 и 1, а не переносить свойство одного квадрата без проверки.

Финальная запись доказательства состоит из трёх частей: выбранное общее свойство, его применение к условию и явный вывод. В конструктивной задаче к этому добавляется проверка каждого ограничения примера. В отрицательной задаче последняя фраза должна объяснять, почему противоречие исключает все случаи, а не только рассмотренные числа.



Язык сравнений и классы остатков

Запись $a \equiv b \pmod{m}$ означает, что разность $a - b$ делится на m . Она позволяет заменить большое число его остатком и выполнять сложение, вычитание и умножение внутри класса. Например, если $a \equiv 2 \pmod{5}$ и $b \equiv 4 \pmod{5}$, то $a + b \equiv 1 \pmod{5}$, а $ab \equiv 3 \pmod{5}$. Деление по модулю допустимо не всегда: сокращать множитель можно только тогда, когда он взаимно прост с модулем или когда делимость обоснована отдельно.

Чтобы доказать утверждение для всех целых n , достаточно рассмотреть все возможные остатки n по выбранному модулю. Модуль выбирают по структуре цели: 2 — для чётности, 4 или 8 — для квадратов, 3 и 9 — для сумм цифр, 5 и 10 — для последних цифр. Полный перебор остатков — это доказательство, если классы не пропущены и для каждого выполнено корректное преобразование.

Чётность как первый фильтр

Чётность — частный случай арифметики остатков по модулю 2. Сумма имеет ту же чётность, что и число нечётных слагаемых: чётное количество нечётных даёт чётную сумму, нечётное — нечётную. Произведение чётно, если среди множителей есть хотя бы один чётный. В доказательстве важно формулировать обе стороны: не только «если один множитель чётен», но и почему в рассматриваемой ситуации такой множитель обязательно существует.

Квадрат сохраняет чётность исходного числа. Поэтому из нечётности n^2 следует нечётность n , а из делимости n^2 на 4 — чётность n . Однако обратные утверждения требуют проверки: чётное число не обязательно делится на 4, а квадрат числа, кратного 2, уже делится на 4. Такие уточнения предотвращают ложные переходы в задачах на невозможность.

Квадраты по модулям 4 и 8

По модулю 4 квадрат даёт только 0 или 1. Отсюда сумма двух квадратов не может иметь остаток 3, а разность квадратов не может быть сравнима с 2. По модулю 8 набор остатков шире: 0, 1 и 4. При этом квадрат нечётного числа всегда сравним с 1 по модулю 8. Это особенно эффективно в задачах о сумме нескольких нечётных квадратов.

Выбирайте минимальный модуль, который отделяет требуемое число от всех возможных остатков. Если число равно 2027, уже модуль 4 даёт противоречие для суммы двух квадратов. Если по модулю 4 запрета нет, переходите к 8, 3, 5 или другому модулю. Проверка одного неудачного модуля не доказывает существования; она лишь означает, что нужен пример или более тонкий фильтр.

Циклы степеней

Остатки степеней по фиксированному модулю периодичны, потому что возможных ненулевых остатков конечное число. Для основания 2 по модулю 7 получаем цикл 2, 4, 1 длины 3; для основания 3 по модулю 5 — цикл 3, 4, 2, 1 длины 4. Составляя цикл, прекращайте вычисления после первого возвращения к исходному состоянию, а не после случайного повторения одного промежуточного остатка.



В задаче с суммой двух степеней найдите периоды обоих слагаемых и рассмотрите общий период, равный НОК длин циклов. Затем проверьте все позиции внутри него. Ответ удобно записывать как условие на остаток показателя: например, $n \equiv 2 \pmod{4}$. Для доказательства необходимости и достаточности нужно сказать, что цикл повторяется, поэтому найденный список охватывает все натуральные n .

Разложения и делимость произведения

Формулы $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ и $n^3 - n = n(n - 1)(n + 1)$ переводят вопрос о сумме или разности степеней в вопрос о множителях. В произведении последовательных чисел гарантированно встречаются множители, кратные 2 и 3. Чтобы заключить делимость на 6, отметьте взаимную простоту 2 и 3. Для делимости на 12 одной фразы о чётности недостаточно — нужно обеспечить два множителя 2 и один множитель 3.

При разности квадратов множители $a - b$ и $a + b$ имеют одинаковую чётность. Если их произведение чётно, оба множителя чётны и произведение делится на 4. Это даёт быстрый запрет для чисел, сравнимых с 2 по модулю 4. Обратная сторона метода — построение примера через разложение заданного числа на множители одинаковой чётности, после чего $a = \frac{u+v}{2}$ и $b = \frac{v-u}{2}$.

Пример, контрпример и полнота доказательства

В вопросе «может ли» положительный ответ доказывается одним корректным примером, удовлетворяющим всем условиям. Отрицательный ответ требует рассуждения для всех возможных чисел. Нельзя заменить доказательство несколькими неудачными попытками. В вопросе «всегда ли» один контрпример опровергает утверждение, но подтверждение снова требует общего доказательства.

Записывайте пример как равенство, а не только называйте числа. Если требуется натуральное n , проверьте принятую в условии границу $n \geq 1$. Если числа должны быть различными, положительными или иметь заданное количество цифр, подтвердите и эти ограничения. Финальная строка должна отвечать на логический вопрос словами «да» или «нет», после чего приводится пример либо ссылка на полученное противоречие.

Одновременные сравнения

Систему двух сравнений удобно решать подстановкой. Из $x \equiv a \pmod{m}$ записываем $x = a + mk$ и подставляем во второе сравнение. После нахождения класса для k возвращаемся к x . Если модули взаимно просты, решения повторяются с периодом mn . На ограниченном промежутке нужно перечислить все представители класса, а не только наименьший положительный.

Проверка решения системы выполняется отдельно по каждому модулю. Такой контроль особенно важен при отрицательных остатках: остаток должен быть приведён к стандартному диапазону от 0 до $m-1$. В задачах на сумму всех решений сначала найдите первый и последний допустимые члены арифметической прогрессии, затем используйте формулу суммы; прямой перебор допустим только для очень короткого диапазона.



Взаимная простота и НОД

Два соседних целых числа взаимно просты: любой их общий делитель делил бы и разность, равную 1. Это простое наблюдение часто завершает доказательство делимости произведения. Если взаимно простые числа a и b входят в произведение и известно, что некоторый простой делитель делит ab , то он делит один из множителей. Но без взаимной простоты перенос делимости с произведения на отдельный множитель может быть ложным.

Алгоритм Евклида полезен не только для вычисления НОД. Равенство $\gcd(a, b) = \gcd(b, a - b)$ позволяет заменять большие выражения более простыми. Например, общий делитель n и $n+1$ обязан делить их разность. В задачах с параметром сначала преобразуйте НОД, затем применяйте условие о делимости. Обязательно различайте НОД и НОК: первый описывает общую часть множителей, второй — период совместных условий.

Доказательство от противного

Если нужно показать невозможность, удобно предположить существование требуемых чисел и вывести противоречие с остатками или чётностью. Предположение записывается точным равенством, например $a^2 - b^2 = 2026$. Затем используются свойства всех возможных a и b . Противоречие должно быть явным: одна и та же величина оказалась делящейся и не делящейся на 4, либо обязательный остаток не совпал с остатком правой части.

После получения противоречия вернитесь к исходному вопросу: неверным было именно предположение о существовании, поэтому ответ отрицательный. Нельзя считать противоречием просто неудобное уравнение или отсутствие найденного примера. Метод силён тогда, когда выбранное свойство охватывает все числа и не зависит от отдельных проверок.

Индукция и делимость

Некоторые утверждения о натуральном показателе можно доказать индукцией. Сначала проверяется база при минимальном n . Затем предполагается делимость выражения при $n=k$ и доказывается при $n=k+1$, причём разность соседних выражений должна раскрываться через уже известный множитель. Индукция особенно удобна для сумм и рекуррентных последовательностей, но для простого цикла остатков модульный метод обычно короче.

В переходе нельзя использовать утверждение для $k+1$ как уже доказанное. Явно отделяйте индукционное предположение от нового преобразования. После шага укажите, что утверждение верно для всех натуральных n . Если задача решается одним сравнением, не усложняйте её индукцией: экзаменационная запись ценит ясный минимальный аргумент.



Тренировка выбора модуля

Перед вычислениями составьте короткий список наблюдений о правой части: чётность, остаток по модулю 4, 8, 3, 5 и последняя цифра. Затем сравните с типовыми остатками левой части. Для квадратов сначала проверяются 4 и 8, для степеней — модуль, взаимно простой с основанием и имеющий короткий цикл, для суммы цифр — 3 или 9. Выбор модуля должен разделять возможные и требуемые остатки.

Если модуль не дал противоречия, не делайте положительный вывод. Попробуйте построить пример через разложение, перебрать другой модуль или уточнить ограничения. Умение отказаться от бесполезного модуля — часть решения. В черновике допустимо проверить несколько вариантов, но в чистовой записи остаётся только тот аргумент, который действительно доказывает ответ.

Контрольный разбор: разность квадратов

Пусть требуется выяснить, может ли $a^2 - b^2$ равняться числу, которое при делении на 4 даёт остаток 2. Разложим разность: $(a - b)(a + b)$. Оба множителя имеют одинаковую чётность. Если произведение нечётно, оно даёт нечётный результат; если чётно, оба множителя чётны и произведение делится на 4. Остаток 2 невозможен. Этот вывод охватывает любые целые a и b и потому является доказательством, а не наблюдением по примерам.

Если заданное число делится на 4, модульный запрет исчезает, но существование ещё не доказано. Тогда разложите число на множители u и v одинаковой чётности и решите $a - b = u$, $a + b = v$. Получатся $a = \frac{u+v}{2}$ и $b = \frac{v-u}{2}$. Нужно выбрать u и v так, чтобы a и b удовлетворяли дополнительным ограничениям, например были натуральными и различными.

Контрольный разбор: цикл двух оснований

Рассмотрим выражение $3^n + 4^n$ по модулю 5. Остатки степеней 3 повторяются через четыре шага: 3, 4, 2, 1. Для 4 удобно использовать $4 \equiv -1 \pmod{5}$: при нечётном n остаток равен 4, при чётном — 1. Общий период равен 4, поэтому достаточно проверить n с остатками 1, 2, 3 и 0 по модулю 4. Нулевой остаток суммы возникает только во втором случае.

Полный ответ должен содержать необходимость и достаточность. Необходимость следует из таблицы четырёх остатков: других позиций периода нет. Достаточность проверяется подстановкой класса $n = 4k + 2$: оба остаточных цикла занимают нужные позиции при любом целом $k \geq 0$. Поэтому условие $n \equiv 2 \pmod{4}$ не просто даёт примеры, а описывает все натуральные решения.

Контрольный разбор: система сравнений

Пусть $x \equiv 2 \pmod{3}$ и $x \equiv 3 \pmod{5}$. Из второго сравнения записываем $x = 3 + 5k$. Подстановка в первое даёт $3 + 5k \equiv 2 \pmod{3}$, то есть $2k \equiv 2 \pmod{3}$. Поскольку 2 взаимно просто с 3, можно сократить и получить $k \equiv 1 \pmod{3}$. Следовательно, $k = 1 + 3t$ и $x = 8 + 15t$.



На отрезке от 1 до 50 берём $t=0,1,2$ и получаем 8, 23, 38. Значение $t=-1$ даёт отрицательное число, $t=3$ — число больше 50. Проверка каждого найденного числа по обоим модулям завершает решение. Если требуется сумма, это уже короткая арифметическая прогрессия; её можно сложить непосредственно или формулой.

Расчётные таблицы для объяснения и проверки

Таблицы ниже систематизируют остатки квадратов, циклы степеней и логическую форму доказательства.

Квадраты по модулю 8								
Подписанная версия — используйте для разбора								
Остаток n	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 \bmod 8$	=0	=1	=4	=1	=0	=1	=4	=1
Тип	чёт.	неч.	чёт.	неч.	чёт.	неч.	чёт.	неч.

Иллюстрация к условию задания.

Таблица 1. Подписанная версия для разбора.

Цикл степеней 3 по модулю 5						
Подписанная версия — используйте для разбора						
Показатель	1	2	3	4	5	6
$3^n \bmod 5$	=3	=4	=2	=1	=3	=4
Период	_____	_____	_____	=4	повтор	повтор

Иллюстрация к условию задания.

Таблица 2. Подписанная версия для разбора.



Логика ответа на вопрос «может ли»			
Подписанная версия — используйте для разбора			
Предположение	Инструмент	Проверка	Вывод
Да	пример	все условия	существует
Нет	остатки / делимость	все классы	невозможно
Всегда ли	доказательство	любой n	да
Не всегда	контрпример	одно нарушение	нет

Иллюстрация к условию задания.

Таблица 3. Подписанная версия для разбора.

Источники и ориентиры

- ФИПИ. Методические рекомендации обучающимся по организации самостоятельной подготовки к ЕГЭ-2026 по математике. [Открыть источник](#)
- ФИПИ. Навигатор самостоятельной подготовки к ЕГЭ-2026: математика, профильный уровень. [Открыть источник](#)
- ФИПИ. Открытый банк заданий ЕГЭ: математика, профильный уровень. [Открыть источник](#)
- ФИПИ. Открытые варианты КИМ ЕГЭ-2026. [Открыть источник](#)

Разборы экзаменационных задач

КАК РАБОТАТЬ С РАЗДЕЛОМ

Это разборы 7 и 8. Условия пересказаны без изменения математической модели; рядом указан первоисточник. Сначала закройте решение и составьте собственную модель, затем сравните каждый шаг.

Разбор 7. Числа из семи цифр и делимость на 45

ИСТОЧНИК	УРОВЕНЬ	ТРЕНИРУЕМ
ФИПИ, открытый вариант КИМ ЕГЭ-2024, задача 19а; условие пересказано Открыть источник	официальный КИМ • задача 19а	признаки делимости и конструкция

Условие

Цифры 0, 1, 2, 3, 5, 7 и 9 используют по одному разу, составляя четырёхзначное и трёхзначное числа. Оба кратны 45.

Можно ли получить пару, сумма которой равна 2205?

**До решения: что заметить**

- Ответ «да» доказывается одним полностью проверенным примером.
- Кратность 45 означает одновременную кратность 5 и 9.
- Последние цифры двух чисел должны быть 0 и 5; сумма всех цифр равна 27.

Решение по шагам

Шаг 1. Строим пару. Подбираем четырёхзначное число на 5 и трёхзначное на 0:

$$1935 + 270 = 2205$$

Шаг 2. Проверяем цифры. В 1935 использованы 1, 9, 3, 5; в 270 — 2, 7, 0. Повторов и пропусков нет.

Шаг 3. Проверяем первое число. Сумма цифр равна 18, последняя цифра — 5:

$$1935 = 45 \cdot 43$$

Шаг 4. Проверяем второе число. Сумма цифр равна 9, последняя цифра — 0:

$$270 = 45 \cdot 6$$

Шаг 5. Делаем вывод. Все ограничения выполнены одновременно, значит такая пара существует.

Проверка

- Ноль не стоит в начале числа.
- Проверены оба множителя $45 = 5 \cdot 9$.

ТИПИЧНАЯ ОШИБКА

Проверить только сумму 2205. Нужно также показать использование всех цифр и кратность каждого числа.

ОТВЕТ. Да: 1935 и 270

Разбор 8. Одинаковые суммы цифр

ИСТОЧНИК	УРОВЕНЬ	ТРЕНИРУЕМ
ФИПИ, открытый вариант КИМ ЕГЭ-2026, задача 19а; условие пересказано Открыть источник	официальный КИМ • задача 19а	конструктивный ответ и контроль условий

Условие

Можно ли представить 2043 как сумму двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

До решения: что заметить

- Для ответа «да» достаточно примера; полный перебор не нужен.
- Удобно взять маленькое число с простой суммой цифр.
- Проверяем сумму, натуральность, различие и суммы цифр.



Решение по шагам

Шаг 1. Берём первое слагаемое. Число 9 имеет сумму цифр 9. Дополнение до 2043:

$$2043 - 9 = 2034$$

Шаг 2. Проверяем сумму цифр дополнения. Для 2034:

$$2 + 0 + 3 + 4 = 9$$

Шаг 3. Проверяем разложение. Оба числа натуральные и различны:

$$9 + 2034 = 2043$$

Шаг 4. Делаем вывод. Найден допустимый пример, значит представление возможно.

Проверка

- Суммы цифр равны 9 и 9.
- Ноль внутри записи 2034 допустим.

ТИПИЧНАЯ ОШИБКА

Написать только «да», не предъявив пару. В конструктивном пункте пример — часть доказательства.

ОТВЕТ. Да: 9 и 2034