



Отношения, пропорции и проценты

Теория и разобранные примеры

Отношения, пропорции и проценты — тема 3-го урока курса подготовки к профильному ЕГЭ с начального уровня. В этом уроке вы научитесь выбирать базу процента, составлять пропорции и рассчитывать последовательные изменения.

Здесь собраны объяснения основных правил, 7 подробных разборов и ответы на частые вопросы. После изучения переходите к отдельному тесту из 40 заданий.

Отношение: что с чем сравниваем

Отношение двух чисел — результат деления первого на второе. Запись $a:b$ означает $\frac{a}{b}$, где $b \neq 0$. Порядок важен: отношение 6 к 3 равно 2, а отношение 3 к 6 равно $\frac{1}{2}$. Перед сравнением одноимённых величин приведите их к одинаковым единицам: отношение 2 м к 50 см равно $200:50 = 4$.

Если красные и синие детали взяты в отношении 2:3, на каждые две красные приходятся три синие. Всего в таком наборе пять равных частей. Это не означает, что красных деталей обязательно две: их может быть 4, 20 или другое число, согласованное с отношением.

Как разделить число в заданном отношении

Для деления 60 в отношении 2:3 сначала находим число частей: $2 + 3 = 5$. Одна часть равна $60:5 = 12$. Получаем $12 \cdot 2 = 24$ и $12 \cdot 3 = 36$. Проверяем и сумму $24 + 36 = 60$, и отношение $24:36 = 2:3$.

Важно. Если отношение описывает две группы, доля первой во всём количестве равна $\frac{2}{2+3}$, а не $\frac{2}{3}$. Вторая дробь сравнивает первую группу только со второй.

Пропорции и зависимости

Пропорция — равенство двух отношений: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ при ненулевых знаменателях. Умножив обе части на bd , получаем $ad = bc$. Это свойство помогает найти неизвестное число, но сначала нужно правильно составить отношения из условия.

Прямая пропорциональность

При прямой пропорциональности увеличение одной величины в несколько раз увеличивает другую во столько же раз. Формула зависимости — $y = kx$. Например, при постоянной цене одного килограмма стоимость покупки прямо пропорциональна массе. Если 3 кг стоят 240 рублей, то 1 кг стоит 80 рублей, а 5 кг — 400 рублей.

Постоянным остаётся отношение $\frac{y}{x} = k$. Способ «сначала найти на одну единицу» часто понятнее механического составления пропорции.



Обратная пропорциональность

При обратной пропорциональности увеличение одной величины в несколько раз уменьшает другую во столько же раз: $y = \frac{k}{x}$, $x \neq 0$. Постоянным остаётся произведение $xy = k$.

Например, для одного и того же объёма работы 4 одинаково производительных работника могут потребовать 6 дней, а 8 работников — 3 дня: $4 \cdot 6 = 8 \cdot 3$. Такая модель применима, когда объём работы и производительность каждого работника не меняются. Сначала определите зависимость, затем выбирайте вычисление.

Три основные задачи на проценты

Процент — одна сотая целого: $1\% = 0,01$. Перед вычислением назовите величину, которую принимаете за 100%. Слово «процент» само по себе не определяет базу сравнения.

Что ищем	Действие	Пример
$p\%$ от числа A	$A \cdot \frac{p}{100}$	15% от 800 — это 120
Целое по известной части B	$B : \frac{p}{100}$	Если 120 — это 15%, целое равно 800
Сколько процентов составляет B от A	$\frac{B}{A} \cdot 100\%$	120 от 800 составляют 15%

При поиске целого доля должна быть ненулевой; при поиске процента ненулевой должна быть база A . В обычных задачах на цену, массу и количество эти величины положительны.

Повышение, скидка и последовательные изменения

После повышения на $p\%$ остаётся $100 + p$ процентов исходной величины. Поэтому её умножают на $1 + \frac{p}{100}$. При снижении на $p\%$ используют коэффициент $1 - \frac{p}{100}$. Например, скидка 15% превращает цену 2000 рублей в $2000 \cdot 0,85 = 1700$ рублей.

Чтобы восстановить прежнюю цену, новую цену делят на коэффициент изменения: $1700 : 0,85 = 2000$. Вычитать 15% из новой цены нельзя: это уже другая база.

Последовательные коэффициенты перемножают. Повышение на 10% и последующая скидка 10% дают $1,1 \cdot 0,9 = 0,99$: итог на 1% ниже исходного. Проценты не уничтожаются, потому что второе изменение относится к новой величине.

Проценты и процентные пункты

Если доля выросла с 20% до 25%, прибавка составляет 5 процентных пунктов. Относительный рост самой доли равен $\frac{25-20}{20} \cdot 100\% = 25\%$. Эти ответы описывают разные сравнения, поэтому читайте вопрос полностью.



Проценты в задачах на растворы

Массовая доля вещества равна отношению массы вещества к массе всего раствора. В 200 г раствора с концентрацией 15% содержится $200 \cdot 0,15 = 30$ г вещества. Остальные 170 г приходятся на растворитель.

При добавлении чистой воды масса вещества сохраняется, а общая масса растёт. При испарении только воды масса вещества также сохраняется, а общая масса уменьшается. Например, после добавления 100 г воды концентрация станет $\frac{30}{300} \cdot 100\% = 10\%$. Для смешения растворов сначала складывают массы вещества и массы растворов; простое среднее процентов годится лишь при равных массах смешиваемых растворов.

Самопроверка. Назовите базу каждого процента, подпишите единицы, оцените направление изменения и подставьте найденную величину обратно в условие.

Примеры с пошаговыми решениями

Разбор 1. Деление величины в заданном отношении

Уровень: База.

Условие

Разделите 30 тетрадей между двумя группами в отношении 2:3.

Короткое правило.

Отношение 2:3 означает не 2 и 3 предмета, а 2 одинаковые доли для первой группы и 3 такие доли для второй.

До вычислений.

Вторая группа должна получить больше. Обе части в сумме должны дать 30.

1. Находим общее число долей

$$2 + 3 = 5$$

Всё количество разбито на пять одинаковых долей.

2. Находим размер одной доли

$$30 : 5 = 6$$

Каждая условная доля содержит 6 тетрадей.

3. Находим обе части

$$6 \cdot 2 = 12, \quad 6 \cdot 3 = 18$$

Первая группа получает две доли, вторая — три.



Проверка. $12:18 = 2:3$ после сокращения; $12 + 18 = 30$.

Типичная ошибка. Разделить 30 сначала на 2, затем на 3 и получить две несвязанные величины.

Ответ. 12 тетрадей и 18 тетрадей.

12; 18

Разбор 2. Прямая пропорция

Уровень: База.

Условие

Для 6 порций требуется 450 г крупы. Сколько крупы требуется для 10 порций?

Короткое правило.

При прямой пропорциональности увеличение числа порций во столько же раз увеличивает количество продукта.

До вычислений.

10 порций больше 6, поэтому ответ должен быть больше 450 г.

1. Находим расход на одну порцию

$$450:6 = 75$$

Делим общий расход на число одинаковых порций.

2. Переходим к десяти порциям

$$75 \cdot 10 = 750$$

На каждую из десяти порций требуется по 75 г.

3. Записываем пропорцию как альтернативу

$$\frac{450}{6} = \frac{x}{10}, \quad x = 750$$

Отношение массы к числу порций остаётся постоянным.

Проверка. Коэффициент роста $10/6 = 5/3$; $450 \cdot 5/3 = 750$.

Типичная ошибка. Прибавить к 450 разницу $10-6$, не учитывая расход на одну порцию.

Ответ. 750 г.

750

Разбор 3. Обратная пропорция в задаче на работу

Уровень: Основной.

Условие

8 работников выполняют заказ за 15 дней. За сколько дней выполнят тот же заказ 12 работников при одинаковой производительности?

**Короткое правило.**

Для одного и того же объёма работы число работников и время обратно пропорциональны: работников больше — дней меньше.

До вычислений.

12 работников больше 8, поэтому ответ обязан быть меньше 15 дней.

1. Фиксируем общий объём в человеко-днях

$$8 \cdot 15 = 120$$

Один и тот же заказ требует постоянного количества человеко-дней.

2. Делим объём на новое число работников

$$120 : 12 = 10$$

Каждый день 12 работников выполняют 12 человеко-дней работы.

Проверка. $12 \cdot 10 = 120$, как и $8 \cdot 15$. Ответ 10 меньше 15.

Типичная ошибка. Составить прямую пропорцию и получить 22,5 дня, хотя работников стало больше.

Ответ. 10 дней.

10

Разбор 4. Процент от числа и цена после скидки

Уровень: Основной.

Условие

Куртка стоит 2400 рублей. Магазин даёт скидку 15%. Найдите размер скидки и новую цену.

Короткое правило.

Сначала находим процент от исходной цены, затем вычитаем скидку. Процент всегда относится к указанной базе.

До вычислений.

10% — это 240 рублей, ещё 5% — 120 рублей. Скидка должна быть 360 рублей.

1. Переводим процент в дробь

$$15\% = \frac{15}{100} = 0,15$$

Процент — одна сотая часть величины.

2. Находим размер скидки

$$2400 \cdot 0,15 = 360$$

Берём 15 сотых от исходной цены.

3. Находим новую цену

$$2400 - 360 = 2040$$

Скидка уменьшает цену.



Проверка. Новая цена равна 85% от старой: $2400 \cdot 0,85 = 2040$.

Типичная ошибка. Найти 15% и записать 360 как окончательную цену.

Ответ. скидка 360 рублей, новая цена 2040 рублей.

360; 2040

Разбор 5. Целое по известному проценту

Уровень: Основной.

Условие

42 ученика составляют 70% всех участников. Сколько участников всего?

Короткое правило.

Если известна часть и её процент, целое больше этой части. Удобно найти 1%, затем 100%.

До вычислений.

70% больше половины, поэтому общее число будет больше 42, но меньше 84.

1. Находим один процент

$$42 : 70 = 0,6$$

70 одинаковых процентных долей содержат 42 ученика.

2. Находим сто процентов

$$0,6 \cdot 100 = 60$$

Всё количество — это 100 процентных долей.

3. Записываем решение одним действием

$$42 : 0,70 = 60$$

Деление на 0,70 восстанавливает целое по его части.

Проверка. 70% от 60: $60 \cdot 0,7 = 42$.

Типичная ошибка. Умножить 42 на 0,7 и получить величину ещё меньше известной части.

Ответ. 60 участников.

60

Разбор 6. Процентное изменение

Уровень: Экзамен.

Условие

Цена выросла с 800 до 920 рублей. На сколько процентов она увеличилась?

Короткое правило.

Процент изменения считают от начального значения, а не от нового.



До вычислений.

Рост равен 120 рублей. Это немного больше десятой части от 800, поэтому ожидается около 15%.

1. Находим абсолютное изменение

$$920 - 800 = 120$$

Сначала выделяем именно прибавку.

2. Сравниваем прибавку с исходной ценой

$$\frac{120}{800} = 0,15$$

База сравнения — 800 рублей, то есть значение до изменения.

3. Переводим долю в проценты

$$0,15 \cdot 100\% = 15\%$$

Чтобы получить проценты, долю умножают на 100%.

Проверка. 15% от 800 равно 120; $800 + 120 = 920$.

Типичная ошибка. Разделить 120 на 920 и считать процент от нового значения.

Ответ.

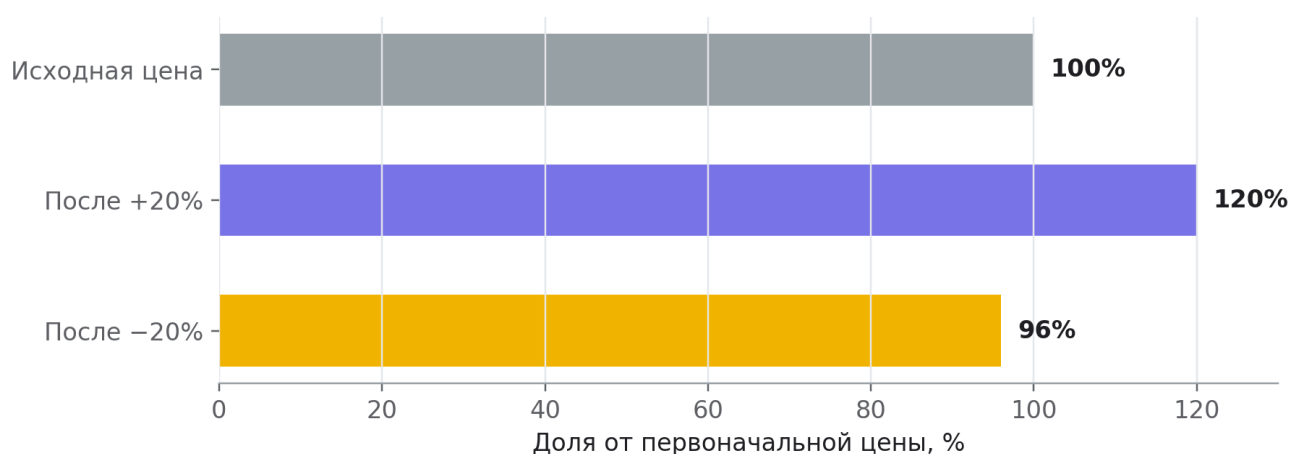
$$15\%$$

Разбор 7. Последовательные проценты

Уровень: Экзамен.

Условие

Цена 5000 рублей сначала выросла на 20%, а затем снизилась на 20%. Какой стала цена и на сколько процентов она отличается от первоначальной?



Цена после повышения на 20% и снижения на 20% составляет 96% исходной.

Короткое правило.

Каждый новый процент берётся от текущей базы. Поэтому повышение и снижение на одинаковый процент не взаимно уничтожаются.



До вычислений.

После повышения база станет 6000 рублей. Снижение на 20% теперь будет равно 1200, а не 1000.

1. Применяем коэффициент повышения

$$5000 \cdot 1,20 = 6000$$

После роста остаётся $100\% + 20\% = 120\%$ исходной цены.

2. Применяем коэффициент снижения

$$6000 \cdot 0,80 = 4800$$

После снижения остаётся 80% уже новой цены 6000 рублей.

3. Находим итоговое изменение

$$\frac{4800 - 5000}{5000} \cdot 100\% = -4\%$$

Разность сравнивается с первоначальной ценой 5000 рублей.

Проверка. Общий коэффициент $1,20 \cdot 0,80 = 0,96$, то есть осталось 96% исходной цены.

Типичная ошибка. Сложить $+20\%$ и -20% и сделать вывод, что цена не изменилась.

Ответ. 4800 рублей; цена стала на 4% ниже первоначальной.

$$4800; \quad -4\%$$

Основные формулы

$$\text{часть} = \text{целое} \cdot \frac{p}{100}$$

$$\text{целое} = \frac{\text{часть}}{p/100}$$

$$p = \frac{\text{изменение}}{\text{начальное значение}} \cdot 100\%$$

Вопросы по теме

Почему скидка и повышение на один процент не отменяют друг друга?

Каждое изменение считается от текущей величины. Например, коэффициенты повышения на 20% и снижения на 20% дают $1,2 \cdot 0,8 = 0,96$: остаётся 96% исходной величины.

Как выбрать между прямой и обратной пропорцией?

Уточните, что остаётся постоянным. При постоянной цене стоимость растёт вместе с количеством. При постоянной работе время уменьшается с ростом числа одинаково производительных работников.



Практика по теме

Проверьте понимание правил на отдельной странице: [40 заданий с ответами и решениями](#). Начните с первого уровня; к следующему переходите, когда можете объяснить каждый шаг.