

Урок 10. Функции и графики

График показывает, как значение функции зависит от аргумента. В этом уроке разберём область определения, нули, промежутки знакопостоянства, прямую, параболу и сдвиги графиков. На восьми примерах научимся читать рисунки и проверять вычисления.

01. Функция, аргумент и значение

Функция сопоставляет каждому допустимому значению аргумента x единственное значение y . Запись $y = f(x)$ означает, что результат зависит от выбранного x . Для $f(x) = 2x + 1$ значение $f(3)$ равно 7: вместо x подставляют 3.

Не путайте вопросы «найдите $f(3)$ » и «решите $f(x) = 3$ ». В первом известен вход, нужно вычислить выход. Во втором известен выход, нужно найти все подходящие входы.

График функции состоит из точек $(x; f(x))$. Чтобы проверить, принадлежит ли ему точка $(2; 5)$, подставьте $x = 2$ в формулу и сравните результат с 5. Для $y = 2x + 1$ равенство выполняется.

02. Область определения и множество значений

Область определения $D(f)$ - допустимые значения x . Множество значений $E(f)$ - все результаты y , которые функция действительно принимает. У $y = x^2$ область определения - все действительные числа, а множество значений - $[0; +\infty)$.

Для области определения учитывают все ограничения одновременно: знаменатель не равен нулю, подкоренное выражение неотрицательно, аргумент логарифма положителен.

Например, $\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ требует $x \geq -1$ и $x \neq 2$.

Если корень стоит в знаменателе, подкоренное выражение должно быть строго положительным: у $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ условие $x > 3$. Равенство нулю здесь запрещено именно из-за знаменателя.

03. Что можно узнать по графику

Нули функции - значения x , при которых $y = 0$: график пересекает ось Ox или касается её. Функция положительна там, где график выше этой оси, и отрицательна там, где ниже.

Для чтения $f(a)$ найдите a на горизонтальной оси и прочитайте высоту точки графика. Для решения $f(x) = b$ рассмотрите пересечения с горизонтальной прямой $y = b$ и выпишите их абсциссы.

Возрастание и положительность - разные свойства

На промежутке возрастания при движении слева направо значения становятся больше. Они могут оставаться отрицательными: например, на $(-\infty; 0)$ функция $y = x$ возрастает и при

этом отрицательна. Убывающая функция, наоборот, принимает всё меньшие значения при увеличении аргумента.

Координата точки максимума - значение x , а максимальное значение функции - соответствующее y . В ответе нужно указать именно то, что спрашивает условие.

04. Прямая и парабола

Линейная функция имеет вид $y = kx + b$. Коэффициент b - значение при $x = 0$, а k описывает изменение y при увеличении x на единицу. При $k > 0$ функция возрастает, при $k < 0$ убывает, при $k = 0$ постоянна.

Для двух точек с разными абсциссами $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Затем координаты любой из точек подставляют в $y = kx + b$ и находят b . Если прямая проходит через начало координат, $b = 0$.

Квадратичная функция имеет вид $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. При $a > 0$ ветви направлены вверх, при $a < 0$ - вниз. Абсцисса вершины равна $x_0 = -\frac{b}{2a}$, а ордината вычисляется как $y_0 = f(x_0)$.

Вершинная форма и сдвиги

В записи $y = a(x - h)^2 + k$ вершина сразу видна: $(h; k)$. Например, у $y = (x - 2)^2 - 3$ вершина $(2; -3)$. Знак внутри скобок нужно прочитать внимательно: квадрат равен нулю именно при $x = 2$.

Замена $f(x)$ на $f(x - h) + k$ сдвигает график на h вправо и на k вверх; отрицательные h и k означают противоположные направления. У $y = |x + 2| - 1$ вершина равна $(-2; -1)$. Умножение всех значений на -1 отражает график относительно оси Ox .

Нули параболы можно найти решением квадратного уравнения. Если известны два различных нуля r_1, r_2 , удобно записать $y = a(x - r_1)(x - r_2)$. Дополнительная точка графика позволяет найти коэффициент a .

05. Наибольшее и наименьшее значения на отрезке

Для параболы сравните значения на концах отрезка и в вершине, если вершина принадлежит отрезку. Например, у $f(x) = -(x - 1)^2 + 4$ на $[-2; 3]$ получаем $f(-2) = -5$, $f(3) = 0$, $f(1) = 4$. Минимум равен -5 , максимум - 4 .

Проверка только вершины нашла бы максимум, но пропустила бы минимум на левом конце. На открытом промежутке наибольшего или наименьшего значения может не быть: функция $y = x$ на $(0; 1)$ не достигает ни 0 , ни 1 .

06. Первое знакомство с производной

В последних разборах используется производная $f'(x)$. Она описывает скорость изменения функции и наклон касательной. Если производная положительна на промежутке, функция там возрастает; если отрицательна - убывает. Смена знака с плюса на минус указывает на локальный максимум, с минуса на плюс - на локальный минимум.

Для задач этого урока нужны правила:

- $(c)' = 0$ и $(x^n)' = nx^{n-1}$ для натурального n ;
- $(u + v)' = u' + v'$ и $(cu)' = cu'$;
- $(uv)' = u'v + uv'$;
- $(e^x)' = e^x$.

Для постоянного c также $(e^{x+c})' = e^{x+c}$: выражение $e^{x+c} = e^c e^x$ отличается от e^x постоянным множителем.

Число e - основание натуральной экспоненты, приблизительно 2,718. Значение e^x всегда положительно. Поэтому знак производной $e^x(1+x)$ определяется множителем $1+x$.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке, найдите внутренние точки, где производная равна нулю или не существует, если такие точки есть в области функции. Затем сравните значения функции в этих точках и на концах отрезка. Для рассматриваемых здесь гладких функций достаточно решить $f'(x) = 0$ и добавить концы.

Важно. Равенство $f'(x) = 0$ само по себе не доказывает экстремум. У $f(x) = x^3$ производная равна нулю при $x = 0$, но функция продолжает возрастать по обе стороны. Проверяйте смену знака или сравнивайте значения по условиям задачи.

07. Примеры с пошаговыми решениями

Разбор 1. Значение функции по формуле

Условие

Функция задана формулой $f(x) = 2x - 3$. Найдите $f(4)$.

$$f(x) = 2x - 3$$

Короткое правило.

Чтобы найти $f(a)$, подставляем a вместо каждого x и выполняем действия по порядку.

До решения.

При $x=4$ произведение $2x$ равно 8; после вычитания 3 ответ должен быть меньше 8.

1. Подставляем аргумент

$$f(4) = 2 \cdot 4 - 3$$

Число 4 заменяет переменную x .

2. Вычисляем

$$f(4) = 8 - 3 = 5$$

Сначала умножение, затем вычитание.

Проверка. Точка $(4;5)$ удовлетворяет уравнению прямой $y=2x-3$.

Типичная ошибка. Подставить 4 вместо f и решать уравнение $4=2x-3$ - это другой вопрос.

Ответ.

Разбор 2. Область определения: корень и знаменатель

Условие

Найдите область определения функции.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$$

Короткое правило.

Подкоренное выражение должно быть неотрицательным, знаменатель - ненулевым. Область определения - пересечение всех условий.

До решения.

Первое условие даст луч от -1 вправо; из него нужно удалить одну точку $x=2$.

1. Условие для корня

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

Квадратный корень определён для неотрицательного аргумента.

2. Условие для знаменателя

$$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$

На ноль делить нельзя.

3. Пересекаем условия

$$D(f) = [-1; 2) \cup (2; +\infty)$$

Берём $x \geq -1$ и исключаем точку 2.

Проверка. При $x=-1$ корень равен нулю и знаменатель ненулевой - граница входит; при $x=2$ функция не существует.

Типичная ошибка. Потребовать $x+1 > 0$ и ошибочно исключить $x=-1$.

Ответ.

$$D(f) = [-1; 2) \cup (2; +\infty)$$

Разбор 3. Парабола в вершинной форме

Условие

Для функции $y=(x-2)^2-3$ укажите вершину, ось симметрии и нули.

$$y = (x - 2)^2 - 3$$

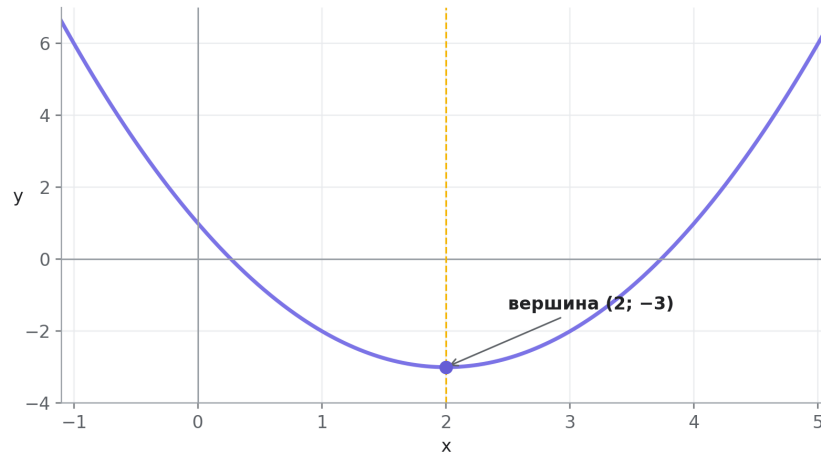


Рис. 1: Парабола $y=(x-2)^2-3$ с вершиной $(2; -3)$ и осью симметрии $x=2$.

Короткое правило.

В форме $y=(x-a)^2+b$ вершина имеет координаты $(a;b)$, ось симметрии $x=a$. Нули находим из уравнения $y=0$.

До решения.

Коэффициент перед квадратом положителен, поэтому ветви направлены вверх, а вершина - точка минимума.

1. Считываем вершину

$$(a; b) = (2; -3)$$

В скобках $x-2$, снаружи -3 .

2. Записываем ось

$$x = 2$$

Вертикальная прямая через вершину делит параболу симметрично.

3. Находим нули

$$(x - 2)^2 - 3 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 3$$

В точках пересечения с Ox значение y равно нулю.

4. Извлекаем корень

$$x = 2 \pm \sqrt{3}$$

Уравнение $z^2=3$ имеет два решения $z=\pm\sqrt{3}$.

Проверка. Нули симметричны относительно $x=2$, а их среднее равно 2.

Типичная ошибка. Записать вершину $(-2;-3)$, не учесть смену знака внутри скобок.

Ответ. вершина $(2; -3)$, ось $x=2$.

$$x_1 = 2 - \sqrt{3}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

Разбор 4. Нули и знак квадратичной функции

Условие

Найдите нули функции и промежутки, где $f(x)<0$.

$$f(x) = x^2 - 4x$$

Короткое правило.

Нули находим из $f(x)=0$. Знак квадратного трёхчлена можно определить разложением на множители или положением ветвей параболы.

До решения.

Старший коэффициент положителен, поэтому функция положительна далеко слева и справа и отрицательна между двумя различными корнями.

1. Разлагаем на множители

$$f(x) = x(x - 4)$$

Выносим общий множитель x .

2. Находим нули

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = 4$$

Произведение равно нулю при нуле одного множителя.

3. Определяем знак

$$f(x) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < 4$$

Между простыми корнями множители имеют разные знаки.

Проверка. $f(2)=4-8=-4<0$; $f(-1)=5>0$; $f(5)=5>0$.

Типичная ошибка. Включить нули 0 и 4 в решение строгого неравенства $f(x)<0$.

Ответ. нули: 0 и 4.

$$f(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in (0; 4)$$

Разбор 5. Наибольшее и наименьшее значения на отрезке

Условие

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-2; 3]$.

$$f(x) = -(x - 1)^2 + 4$$

Короткое правило.

На замкнутом отрезке проверяем вершину, если она входит в отрезок, и оба конца. Затем сравниваем полученные значения.

До решения.

Ветви направлены вниз, вершина $(1; 4)$ даст максимум. Минимум на отрезке будет на одном из концов.

1. Проверяем вершину

$$x = 1 \in [-2; 3], \quad f(1) = 4$$

Квадрат равен нулю, это вершина параболы.

2. Проверяем левый конец

$$f(-2) = -(-3)^2 + 4 = -5$$

Подставляем $x = -2$ в исходную формулу.

3. Проверяем правый конец

$$f(3) = -(2)^2 + 4 = 0$$

Подставляем $x = 3$.

4. Сравниваем

$$-5 < 0 < 4$$

Наименьшее значение -5 , наибольшее 4 .

Проверка. Левый конец дальше от оси $x=1$, чем правый, поэтому значение там ниже - это согласуется с ответом.

Типичная ошибка. Назвать вершину минимумом по привычке, не посмотреть на отрицательный коэффициент перед квадратом.

Ответ. наибольшее значение 4 при $x=1$; наименьшее -5 при $x=-2$.

$$f_{\max} = 4, \quad f_{\min} = -5$$

Разбор 6. Восстановление квадратичной функции по графику

Условие

На рисунке изображён график $f(x)=ax^2+bx+c$. По графику нули равны 1 и 4, а $f(0)=4$. Найдите $f(-2)$.

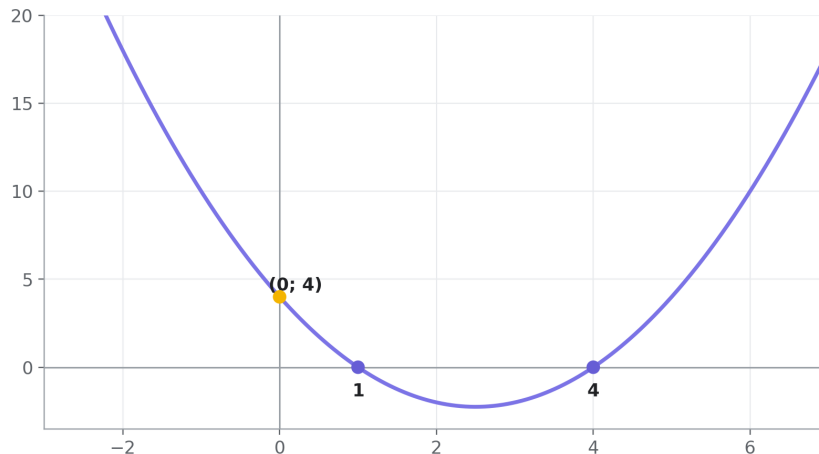


Рис. 2: Парабола с нулями 1 и 4 и отмеченной точкой (0; 4).

Короткое правило.

По нулям записываем $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, затем используем ещё одну точку графика для нахождения коэффициента a .

До решения.

Ветви направлены вверх, поэтому $a>0$. Значение $f(0)=4$ позволит найти a без системы из трёх уравнений.

1. Записываем функцию по нулям

$$f(x) = a(x - 1)(x - 4)$$

При $x=1$ и $x=4$ произведение обращается в ноль.

2. Используем точку (0;4)

$$4 = a(0 - 1)(0 - 4) = 4a$$

Подставляем известные координаты точки графика.

3. Находим коэффициент

$$a = 1, \quad f(x) = (x - 1)(x - 4)$$

Делим равенство $4=4a$ на 4.

4. Вычисляем требуемое значение

$$f(-2) = (-2 - 1)(-2 - 4) = (-3)(-6) = 18$$

Подставляем -2 в восстановленную формулу.

Проверка. Для $x < 1$ оба множителя отрицательны, поэтому $f(-2) > 0$; значение 18 согласуется с видом графика.

Типичная ошибка. Принять $f(0)=4$ за коэффициент a и не использовать точку для вычисления масштаба параболы.

Ответ.

18

Разбор 7. Точка максимума кубической функции

Условие

Найдите точку максимума функции.

$$y = x^3 - 108x + 23$$

Короткое правило.

Находим критические точки из $f'(x)=0$ и определяем знак производной на промежутках. Максимум соответствует переходу f' : плюс $\rightarrow$ минус.

До решения.

Производная будет квадратным выражением с двумя нулями. Нужно выбрать не любой ноль производной, а именно точку перехода от возрастания к убыванию.

1. Находим производную

$$f'(x) = 3x^2 - 108 = 3(x - 6)(x + 6)$$

Производная x^3 равна $3x^2$, производная $-108x$ равна -108 .

2. Находим критические точки

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -6; 6$$

Каждый линейный множитель может быть равен нулю.

3. Определяем знаки производной

$$\begin{array}{ccccc} (+) & | & (-) & | & (+) \\ & -6 & & 6 & \end{array}$$

Квадратичное выражение с положительным старшим коэффициентом положительно вне корней и отрицательно между ними.

4. Выбираем максимум

$$f'(x) : + \rightarrow - \text{ при } x = -6$$

Функция сначала возрастает, затем убывает.

Проверка. В точке $x=6$ знак меняется с минуса на плюс, поэтому там минимум, а не максимум.

Типичная ошибка. Записать оба нуля производной или выбрать $x=6$ без таблицы знаков.

Ответ.

$$-6$$

Разбор 8. Точка минимума произведения с экспонентой

Условие

Найдите точку минимума функции.

$$y = (8x^2 - 40x + 40) e^{x+4}$$

Короткое правило.

Применяем правило производной произведения. Положительный множитель $e^{(x+4)}$ не влияет на знак производной.

До решения.

После дифференцирования выражение должно вынести общий множитель $e^{(x+4)}$ и свестись к произведению двух линейных множителей.

1. Дифференцируем произведение

$$f'(x) = (16x - 40)e^{x+4} + (8x^2 - 40x + 40)e^{x+4}$$

Используем $(uv)' = u'v + uv'$ и $(e^{(x+4)})' = e^{(x+4)}$.

2. Выносим общий множитель

$$f'(x) = 8e^{x+4}x(x - 3)$$

В скобках остаётся $8x^2 - 24x = 8x(x - 3)$.

3. Находим критические точки

$$x = 0; 3$$

Экспонента всегда положительна и в ноль не обращается.

4. Определяем знак

$$\begin{array}{ccccc} (+) & | & (-) & | & (+) \\ & 0 & & 3 & \end{array}$$

Знак совпадает со знаком $x(x-3)$.

5. Выбираем минимум

$$f'(x) : - \rightarrow + \text{ при } x = 3$$

В точке 3 функция переходит от убывания к возрастанию.

Проверка. При $x=0$ знак меняется $+\rightarrow-$, поэтому это точка максимума; единственная точка минимума - $x=3$.

Типичная ошибка. Приравнять к нулю $e^{(x+4)}$ или не применить правило производной произведения.

Ответ.

3

08. Основные формулы

$$D\left(\frac{\sqrt{g(x)}}{h(x)}\right) : g(x) \geq 0, h(x) \neq 0$$

$$y = (x - a)^2 + b \Rightarrow \text{вершина } (a; b)$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ возрастает}, \quad f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ убывает}$$

$$f'(x) : - \rightarrow + \Rightarrow \text{точка минимума } f$$

09. Вопросы по теме

Чем нуль функции отличается от значения при $x = 0$?

Нуль функции - аргумент, при котором результат равен нулю. Значение при $x = 0$ - высота графика на вертикальной оси; оно может быть любым допустимым числом.

Что записывать в ответ: точку максимума или максимальное значение?

Если спрашивают точку максимума, в таких заданиях указывают её абсциссу x . Если спрашивают наибольшее значение функции, указывают соответствующее значение y . Сверяйтесь с формулировкой.

10. Самостоятельная работа

Сначала решите задания 1-20 в тесте. После проверки переходите к заданиям 21-35, затем к 36-40. Задания на повторение выделены отдельно. К каждому ошибочному ответу запишите причину и повторите решение без подсказки.

Предыдущая тема: Неравенства и метод интервалов.

Следующая тема: Производная и касательная.