



Тригонометрические выражения

Теория и разобранные примеры

Свойства, условия применения и пошаговые объяснения. Используйте оглавление и закладки PDF для перехода к нужной теме.

Содержание

01. Радианная мера не является новой системой «для запоминания»	3
02. Синус и косинус - координаты	4
03. Основное тригонометрическое тождество	4
04. Знаки функций по четвертям	5
05. Тангенс и котангенс выводятся из координат	5
06. Табличные значения выводятся из двух треугольников	6
07. Чётность функций следует из отражения	7
08. Периодичность следует из полного оборота	7
09. Формулы сложения из поворота	8
10. Формулы разности	8
11. Формулы приведения не нужно учить таблицей	9
12. Двойной угол	9
13. Формулы половинного угла	10
14. Тангенс суммы и разности	10
15. Сумма в произведение	11
16. Произведение в сумму	11
17. Однородные выражения	12
18. Тройной угол как тренировка восстановления	12
19. Линейная комбинация синуса и косинуса	13
20. Полный разбор преобразования	14
21. Полный разбор приведения без таблицы	14
22. Универсальная проверка формулы	15
23. Формулы сложения: полное школьное доказательство	15
24. Формулы приведения как координаты одной точки	16
25. Табличные значения выводятся из двух треугольников	17

26. Двойной и половинный угол без заучивания	18
27. Сумма в произведение и произведение в сумму	19
28. Тангенс: каждое деление требует условия	19
29. Линейная комбинация синуса и косинуса	20
30. Четыре полноценных вычислительных разбора	21
31. Аудит формулы перед применением	22
32. Тождества для тангенса и котангенса	23
33. Доказательство составного тождества	23
34. Проверка формулы частными значениями	24
35. Тройной угол выводится из формул сложения	24
36. Замена $t = \sin x + \cos x$	25
37. Оценки из основного тождества	26
38. Лаборатория ошибок	26
39. Быстрая проверка понимания	27
40. Эталонный разбор 1 • Двойной угол и отбор на симметричном отрезке	27
41. Параметр и число корней на полном периоде	28
42. Параметр: допустимые значения замены и число углов	29

01. Радианная мера не является новой системой «для запоминания»

Определение. Радианная мера центрального угла равна отношению длины соответствующей дуги l к радиусу R :

$$\alpha = \frac{l}{R}.$$

Полная окружность имеет длину $2\pi R$, поэтому полный угол равен

$$\frac{2\pi R}{R} = 2\pi.$$

Отсюда последовательно:

$$360^\circ = 2\pi,$$

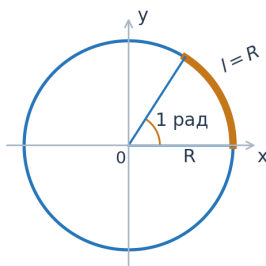
$$180^\circ = \pi,$$

$$90^\circ = \frac{\pi}{2}.$$

Формула перевода следует из пропорции:

$$\alpha_{\text{рад}} = \alpha_{\text{град}} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}.$$

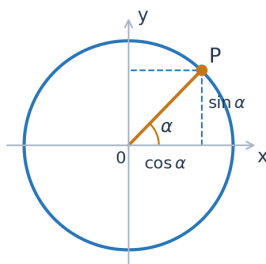
Радиан удобен тем, что связывает угол с длиной дуги без дополнительного коэффициента.



Один радиан: длина выделенной дуги равна радиусу окружности.

02. Синус и косинус - координаты

На единичной окружности отметим точку и обозначим её буквой P . Здесь P - только название точки. Точку получаем поворотом точки $(1; 0)$ на угол α .



На единичной окружности абсцисса точки P равна $\cos \alpha$, ордината равна $\sin \alpha$.

Определение.

$$P = (\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Косинус - абсцисса точки, синус - ордината. Из определения сразу видны диапазоны:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1,$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

Они следуют из того, что координата точки единичной окружности по модулю не превосходит радиуса.

03. Основное тригонометрическое тождество

Точка $P = (x, y)$ лежит на окружности радиуса 1, поэтому по теореме Пифагора

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Подставляя определения координат, получаем

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

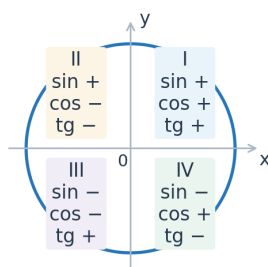
Это полное доказательство тождества. Оно не является отдельной формулой: это уравнение единичной окружности.

Следствие. Если известен синус, то

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Знак не выбирается автоматически. Его определяет четверть, то есть знак абсциссы точки.

04. Знаки функций по четвертям



Знаки функций по четвертям: синус читаем по вертикальной координате, косинус по горизонтальной.

Четверть	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	−	+
IV	−	+	−

Таблица не заучивается. Знаки синуса и косинуса читаются по координатам, а знак тангенса - по отношению этих координат.

05. Тангенс и котангенс выводятся из координат

Определения.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cos \alpha \neq 0,$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0.$$

Ограничения появляются из знаменателей, а не добавляются позднее.

Следствие. Разделим основное тождество на $\cos^2 \alpha$, если $\cos \alpha \neq 0$:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Аналогично при $\sin \alpha \neq 0$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Каждое тождество хранит условие, при котором выполнялось деление.

06. Табличные значения выводятся из двух треугольников



Опорные прямоугольные треугольники: стороны 1, 1, $\sqrt{2}$ и 1, $\sqrt{3}$, 2.

Углы 45° и $\frac{\pi}{4}$

В равнобедренном прямоугольном треугольнике с катетами 1 гипотенуза по Пифагору равна $\sqrt{2}$. Поэтому

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Углы 30° и 60°

Высота равностороннего треугольника со стороной 2 делит его на два прямоугольных треугольника со сторонами 1, $\sqrt{3}$, 2. Поэтому

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Значения для 0 и $\frac{\pi}{2}$ читаются по координатам точек (1, 0) и (0, 1).

07. Чётность функций следует из отражения

Точки углов α и $-\alpha$ симметричны относительно оси Ox . Их абсциссы совпадают, ординаты противоположны. Поэтому

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

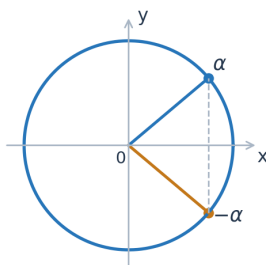
$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

Делением получаем

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

на общей области определения.

Косинус - чётная функция, синус и тангенс - нечётные. Это геометрические следствия, а не три отдельных правила.



Углы α и $-\alpha$: абсцисса сохраняется, ордината меняет знак.

08. Периодичность следует из полного оборота

Углы α и $\alpha + 2\pi k$ приводят к одной точке окружности. Поэтому

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin \alpha,$$

$$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha.$$

Для тангенса достаточно половины оборота: обе координаты меняют знак, их отношение сохраняется.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg} \alpha.$$

09. Формулы сложения из поворота

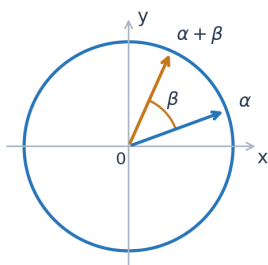
Введём две взаимно перпендикулярные единичные стрелки на координатной плоскости и обозначим их:

$$\mathbf{e}_\alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha),$$

$$\mathbf{n}_\alpha = (-\sin \alpha, \cos \alpha).$$

Вторая стрелка получается поворотом первой на $\frac{\pi}{2}$. Если из направления α повернуться ещё на β , координаты нового направления выражаются через эти две единичные стрелки с коэффициентами $\cos \beta$ и $\sin \beta$:

$$\mathbf{e}_{\alpha+\beta} = \cos \beta \mathbf{e}_\alpha + \sin \beta \mathbf{n}_\alpha.$$



Поворот направления α ещё на угол β даёт направление $\alpha + \beta$.

Сравним первые координаты:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Сравним вторые координаты:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Это доказательство обеих формул сложения. Все дальнейшие формулы урока выводятся из них.

10. Формулы разности

Подставим вместо β угол $-\beta$ и используем чётность косинуса и нечётность синуса:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Если знак забыт, не нужно вспоминать две похожие таблицы: достаточно взять формулу суммы и заменить β на $-\beta$.

11. Формулы приведения не нужно учить таблицей

Каждая формула приведения получается подстановкой специального угла в формулы сложения.

Пример.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{2} \sin \alpha = \cos \alpha.$$

Ещё пример.

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos \pi \cos \alpha + \sin \pi \sin \alpha = -\cos \alpha.$$

Поэтому алгоритм приведения имеет доказательное основание:

1. убрать полный период;
2. представить угол как сумму или разность со специальным углом;
3. применить формулу сложения;
4. подставить значения синуса и косинуса специального угла;
5. проверить знак по четверти.

Правило «на $\frac{\pi}{2}$ функция меняется» - лишь сокращённая версия этого вывода. Если оно забыто, формула сложения восстанавливает результат.

12. Двойной угол

Положим $\beta = \alpha$.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Используя $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, получаем ещё две формы:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1,$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

Выбор формы определяется известной функцией, но происхождение у всех трёх одно.

13. Формулы половинного угла

Из

$$\cos 2t = 1 - 2 \sin^2 t$$

следует

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}.$$

Подставляя $t = \frac{\alpha}{2}$, получаем

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

Аналогично из $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

После извлечения корня знак выбирается по четверти половинного угла:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Модуль и знак нельзя игнорировать.

14. Тангенс суммы и разности

Разделим формулы синуса и косинуса суммы:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

При ненулевых $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ делим числитель и знаменатель на $\cos \alpha \cos \beta$:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Нужно также, чтобы знаменатель итоговой дроби был ненулевым. Формула разности получается заменой β на $-\beta$:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

15. Сумма в произведение

Пусть

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad v = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Тогда $\alpha = u + v$, $\beta = u - v$. Складывая формулы синуса суммы и разности, получаем

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin u \cos v.$$

Возвращая u, v :

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Аналогично:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Ученик может восстановить весь блок, помня только формулы сложения и замену u, v .

16. Произведение в сумму

Сложим формулы косинуса суммы и разности:

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta.$$

Следовательно,

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

Вычитанием и аналогичными действиями выводятся:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2},$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

Эти формулы не выдаются отдельным листом для запоминания - они восстанавливаются за две строки.

17. Однородные выражения

Если все члены имеют одну степень по $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, выражение можно разделить на ненулевую степень одной функции.

Например, при $\cos \alpha \neq 0$

$$A \sin^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha = 0$$

после деления на $\cos^2 \alpha$ превращается в

$$A \operatorname{tg}^2 \alpha + B \operatorname{tg} \alpha + C = 0.$$

Условие $\cos \alpha \neq 0$ нужно проверить отдельно. Если $\cos \alpha = 0$ могло давать решения исходного выражения, их рассматривают до деления.

18. Тройной угол как тренировка восстановления

Формулу тройного угла не нужно хранить отдельной строкой. Выведем её из суммы $2\alpha + \alpha$.

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) \\ &= \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha. \end{aligned}$$

Подставляем

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

Тогда

$$\sin 3\alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha.$$

Используя $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, получаем

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

Аналогично

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

Пояснение. Если ученик умеет вывести формулу тройного угла из двух базовых формул, он действительно владеет системой, а не набором карточек памяти.

19. Линейная комбинация синуса и косинуса

Выражение

$$A \sin x + B \cos x$$

можно представить одной синусоидой. Положим

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Если $R > 0$, существуют φ такие, что

$$\cos \varphi = \frac{A}{R}, \quad \sin \varphi = \frac{B}{R},$$

потому что

$$\left(\frac{A}{R}\right)^2 + \left(\frac{B}{R}\right)^2 = 1.$$

Тогда по формуле синуса суммы

$$R \sin(x + \varphi) = R (\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi)$$

$$= A \sin x + B \cos x.$$

Отсюда сразу следует оценка

$$|A \sin x + B \cos x| \leq \sqrt{A^2 + B^2},$$

поскольку модуль синуса не превосходит 1. Равенство достигается при подходящем x , поэтому оценка точна.

Пример.

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5 \sin(x + \varphi),$$

где $\cos \varphi = \frac{3}{5}$, $\sin \varphi = \frac{4}{5}$. Следовательно, выражение принимает значения от -5 до 5 .

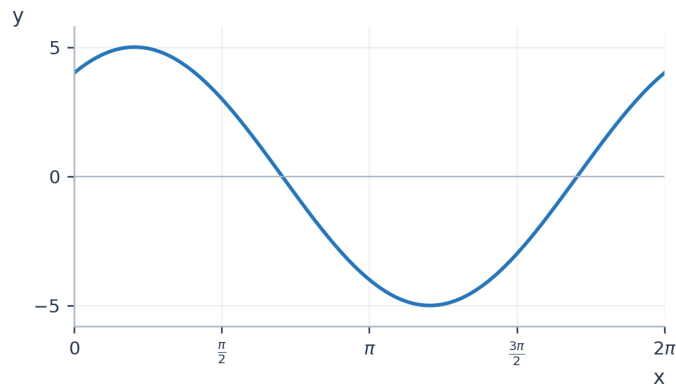


График $y = 3 \sin x + 4 \cos x$: минимум -5 и максимум 5 достигаются.

20. Полный разбор преобразования

Упростим

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}.$$

Используем доказанные формулы:

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x,$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

На исходной ОДЗ $\sin 2x \neq 0$, поэтому $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$. Сокращаем:

$$\frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Ответ $\operatorname{tg} x$ верен только на исходной ОДЗ. Упрощённая функция может быть определена в точках, где исходный знаменатель равнялся нулю; эти точки не возвращаются.

21. Полный разбор приведения без таблицы

Найдём

$$\sin \left(\frac{7\pi}{6} \right).$$

Представим угол как

$$\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}.$$

По формуле суммы

$$\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \pi \cos \frac{\pi}{6} + \cos \pi \sin \frac{\pi}{6}.$$

Подставляя $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, получаем

$$-\frac{1}{2}.$$

Проверка по окружности: угол лежит в III четверти, где синус отрицателен. Формула и геометрия согласуются.

22. Универсальная проверка формулы

Даже правильный вывод полезно быстро проверить.

- Подставить $\alpha = 0$ или $\beta = 0$.
- Проверить знак по четверти.
- Проверить диапазон: синус и косинус не выходят за $[-1, 1]$.
- Проверить ОДЗ тангенса и знаменателей.
- Сравнить чётность обеих частей при замене α на $-\alpha$.

Проверка не заменяет доказательство, но ловит ошибку знака.

23. Формулы сложения: полное школьное доказательство

Косинус разности через координаты и скалярное произведение

На единичной окружности рассмотрим точки углов α и β . Их радиус-векторы имеют координаты $(\cos \alpha; \sin \alpha)$ и $(\cos \beta; \sin \beta)$ и длину 1. Косинус угла между ними равен $\cos(\alpha - \beta)$; сама разность углов может быть отрицательной или выходить за $[0; \pi]$.

По геометрическому определению скалярного произведения произведение длин векторов умножается на косинус угла между ними. Поэтому оно равно $\cos(\alpha - \beta)$.

По координатной формуле то же произведение равно $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

Сравнивая две записи, получаем

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Это доказательство использует только координаты точки на окружности и школьное скалярное произведение.

Косинус суммы

Заменим β на $-\beta$. Косинус - чётная функция, а синус - нечётная:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Синус суммы

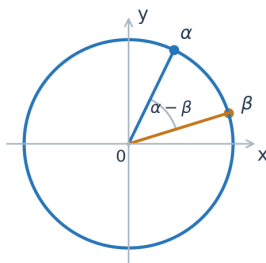
Используем связь $\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ и уже доказанную формулу косинуса разности:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

После замены β на $-\beta$ получаем формулу синуса разности:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Проверка структуры. В формуле косинуса участвуют произведения одноимённых функций. В формуле синуса - разноимённых. Знак суммы у синуса сохраняется, у косинуса меняется. Это следствие вывода, а не отдельная мнемоника.



Два единичных радиус-вектора: их скалярное произведение равно $\cos(\alpha - \beta)$.

24. Формулы приведения как координаты одной точки

Формулы приведения удобно восстанавливать не по таблице, а двумя вопросами: в какой четверти находится новый угол и какая координата точки стала первой или второй после поворота.

Поворот на π

При добавлении π точка переходит в диаметрально противоположную. Обе координаты меняют знак:

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha.$$

Отражение относительно вертикальной оси

Углы α и $\pi - \alpha$ задают точки с одинаковой второй координатой и противоположными первыми координатами:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha.$$

Поворот на $\frac{\pi}{2}$

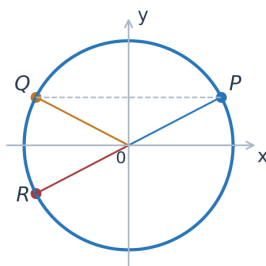
После поворота точки $(x; y)$ на 90° её координаты становятся $(-y; x)$. Поэтому

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha.$$

Для $\frac{\pi}{2} - \alpha$ можно использовать формулы разности или симметрию относительно биссектрисы первой четверти:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.$$

Важно. Ученик сначала рисует четверть и знак координаты, затем решает, меняется ли название функции. Запоминание длинной таблицы заменяется одним рисунком окружности.



Точки P, Q, R соответствуют углам α , $\pi - \alpha$ и $\pi + \alpha$. У Q и P одинаковая ордината; у R обе координаты противоположны координатам P.

25. Табличные значения выводятся из двух треугольников

Угол 45°

Возьмём прямоугольный равнобедренный треугольник с катетами 1 и 1. По теореме Пифагора гипотенуза равна $\sqrt{2}$. Поэтому отношение каждого катета к гипотенузе равно $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Углы 30° и 60°

Разделим равносторонний треугольник со стороной 2 высотой пополам. Получится прямоугольный треугольник с гипотенузой 2, коротким катетом 1 и вторым катетом $\sqrt{3}$.

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Значения тангенса получаются только после проверки ненулевого косинуса:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{tg} 45^\circ = 1, \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Значения для других четвертей не требуют новых треугольников. Модули координат сохраняются, а знак определяется четвертью.

26. Двойной и половинный угол без заучивания

Двойной угол

Подставим $\beta = \alpha$ в формулы сложения:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Используя $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, получаем ещё две равные формы:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha.$$

Выбор формы зависит от того, какую функцию нужно исключить. Все три записи - не разные формулы, а одно равенство после подстановки основного тождества.

Половинный угол

Перенесём слагаемые в двух последних формулах:

$$\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

$$\sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

При извлечении квадратного корня обязательно появляется выбор знака:

$$\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Знак определяется четвертью, в которой лежит угол $\frac{\alpha}{2}$. Формула без знака плюс-минус верна только после дополнительного ограничения на угол.

Контрпример. При $\alpha = 3\pi$ получаем $\frac{\alpha}{2} = \frac{3\pi}{2}$ и $\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) = -1$. Правая часть $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ равна 1. Поэтому без выбора знака равенство неверно.

27. Сумма в произведение и произведение в сумму

Сумма синусов

Положим $p = \frac{\alpha + \beta}{2}$ и $q = \frac{\alpha - \beta}{2}$. Тогда $\alpha = p + q, \beta = p - q$. По формулам синуса суммы и разности:

$$\sin \alpha + \sin \beta = \sin(p + q) + \sin(p - q).$$

После раскрытия слагаемые $\cos p \sin q$ уничтожаются, а одинаковые $\sin p \cos q$ складываются:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

Разность синусов

При вычитании, наоборот, уничтожаются слагаемые $\sin p \cos q$:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

Сумма и разность косинусов

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

Формулы произведения в сумму получаются тем же выводом в обратную сторону. Например, складывая $\cos(\alpha - \beta)$ и $\cos(\alpha + \beta)$, получаем $2 \cos \alpha \cos \beta$.

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta).$$

Проверка знака в разности косинусов. Возьмём $\alpha = \pi, \beta = 0$. Левая часть равна -2 . Правая часть с минусом также равна -2 ; без минуса получился бы неверный знак.

28. Тангенс: каждое деление требует условия

Тангенс определён как отношение синуса к косинусу, поэтому любая формула с tg требует ненулевых соответствующих косинусов. Это условие нельзя дописывать после сокращения: оно определяет область, на которой преобразование имеет смысл.

Тангенс суммы

Делим формулу синуса суммы на формулу косинуса суммы, а затем числитель и знаменатель - на $\cos \alpha \cos \beta$. Такое деление разрешено при $\cos \alpha \neq 0$ и $\cos \beta \neq 0$:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Дополнительно знаменатель $1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$ не должен быть равен нулю: это соответствует $\cos(\alpha + \beta) = 0$, когда тангенс суммы не определён.

Тангенс двойного угла

Подставляя $\beta = \alpha$, получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Ограничения: $\cos \alpha \neq 0$ и $\cos 2\alpha \neq 0$. Формула не расширяет область определения исходного тангенса.

Пример преобразования

Задача. Упростите $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$. Используем формулы двойного угла:

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$$

Равенство верно там, где исходный знаменатель не равен нулю. Условие $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x \neq 0$ совпадает с $\cos x \neq 0$, то есть с областью определения $\operatorname{tg} x$.

29. Линейная комбинация синуса и косинуса

Выражение $A \sin x + B \cos x$ можно представить одной тригонометрической функцией. Это не отдельный вузовский приём, а прямое применение формулы синуса суммы.

Разбор $3 \sin x + 4 \cos x$

Числа 3 и 4 являются катетами прямоугольного треугольника с гипотенузой 5. Выберем угол φ так, чтобы $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ и $\sin \varphi = \frac{4}{5}$. Тогда

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5(\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi) = 5 \sin(x + \varphi).$$

Поскольку синус принимает значения от -1 до 1 , всё выражение лежит от -5 до 5 . Эти границы достигаются, поэтому максимум равен 5, минимум -5 .

Общий вывод

Для $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ выбираем $\cos \varphi = \frac{A}{R}$ и $\sin \varphi = \frac{B}{R}$. Основное тождество гарантирует, что такой угол существует, потому что сумма квадратов выбранных координат равна 1.

$$A \sin x + B \cos x = R \sin(x + \varphi), \quad R = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Задача. Найдите наибольшее значение $5 \sin x - 12 \cos x$. Амплитуда равна $\sqrt{25 + 144} = 13$, поэтому максимум 13. Для доказательства достижимости представим выражение как $13 \sin(x - \varphi)$ при подходящем φ .

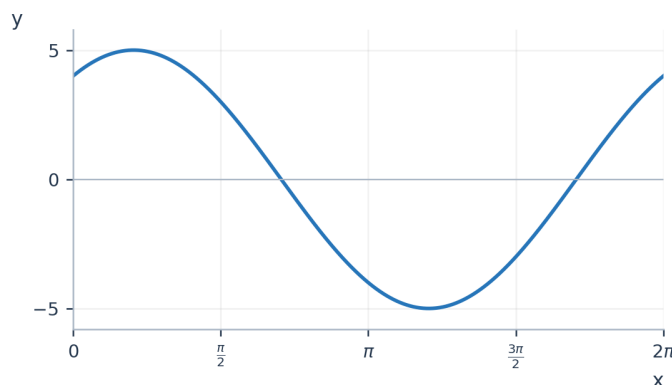


График $y = 3 \sin x + 4 \cos x$: минимум -5 и максимум 5 достигаются.

Если $A = B = 0$, выражение тождественно равно нулю. Деление на R используется только при $R > 0$.

30. Четыре полноценных вычислительных разбора

Значение $\sin 75^\circ$

Разложим 75° как $45^\circ + 30^\circ$ и применим формулу суммы:

$$\sin 75^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Проверка знака и величины: угол в первой четверти, ответ положителен и меньше 1.

Значение $\cos 15^\circ$

Представим $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$:

$$\cos 15^\circ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Одинаковые ответы не случайны: $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$ как значения дополнительных углов.

Преобразование дроби

Задача. Упростите $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$. По формулам двойного угла числитель равен $2\sin^2 \alpha$, знаменатель - $2\sin \alpha \cos \alpha$. На исходной ОДЗ $\sin 2\alpha \neq 0$, поэтому оба множителя $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ ненулевые:

$$\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Однородное выражение

Задача. Упростите $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}$. Если $\sin x \cos x \neq 0$, делим числитель и знаменатель на $\cos^2 x$:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x.$$

Альтернативно числитель равен $-\cos 2x$, а знаменатель - $\left(\frac{1}{2}\right) \sin 2x$, поэтому выражение равно $-2\operatorname{ctg} 2x$. Обе формы равны на общей ОДЗ; выбор зависит от следующего шага задачи.

31. Аудит формулы перед применением

1. Назвать исходную геометрическую модель: координаты на единичной окружности.
2. Проверить четверть и знак каждой функции.
3. Если есть деление, выписать условия ненулевых знаменателей до сокращения.
4. Если извлекается корень в формуле половинного угла, определить знак по четверти.
5. Сделать контроль при простом угле: $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ или при $\alpha = \beta$.
6. Сравнить структуру: степени, число слагаемых и тип функций в каждом произведении.

Критерий сильной группы. Ученик не обязан хранить в памяти всю таблицу преобразований. Он обязан за 30-90 секунд восстановить нужную формулу из единичной окружности, основного тождества и формул сложения, а затем назвать её ОДЗ.

32. Тождества для тангенса и котангенса

Разделим основное тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ на $\cos^2 \alpha$. Такое деление разрешено при $\cos \alpha \neq 0$:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Если вместо этого разделить на $\sin^2 \alpha$ при $\sin \alpha \neq 0$, получим

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Эти формулы часто ошибочно учат как отдельные. На самом деле обе восстанавливаются за одну строку из основного тождества, а условия существования появляются из выполненного деления.

Пример

Задача. Известно $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ и угол α находится в первой четверти. Найдите $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$. Из $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ получаем $1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$, поэтому $\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$. В первой четверти косинус положителен: $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Тогда $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Если четверть не указана, по одному значению тангенса нельзя выбрать знаки синуса и косинуса: в первой и третьей четвертях тангенс положителен.

33. Доказательство составного тождества

Задача. Докажите тождество

$$(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

Решение. Раскроем квадраты. Сумма $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ равна 1, так же для β . Смешанные члены дают $2(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta)$. По формуле косинуса разности выражение в скобках равно $\cos(\alpha - \beta)$.

$$\text{Левая часть} = 2 + 2 \cos(\alpha - \beta).$$

По формуле двойного угла $1 + \cos t = 2 \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right)$. Поэтому $2 + 2 \cos(\alpha - \beta) = 4 \cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$, что и требовалось доказать.

Почему доказательство надёжно. Каждый переход является тождественным и не содержит деления, поэтому дополнительных ограничений ОДЗ нет: равенство верно при любых действительных α и β .

34. Проверка формулы частными значениями

Частное значение не доказывает тождество, но быстро обнаруживает ошибку. Для каждой восстановленной формулы ученик выбирает два теста: нулевой угол и угол, при котором знак заранее понятен.

Проверка формулы $\sin(\alpha + \beta)$. При $\beta = 0$ она должна превратиться в $\sin \alpha$. При $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ левая часть равна $\sin \pi = 0$, а правая - $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

Проверка формулы $\cos(\alpha + \beta)$. При $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ левая часть равна $\cos \pi = -1$. Это сразу показывает, что между произведениями должен стоять минус: $0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$.

Проверка формулы суммы косинусов. При $\alpha = \beta$ правая часть должна дать $2 \cos \alpha$. Подстановка в $2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ даёт $2 \cos \alpha \cdot 1$.

Итог. Проверка частными значениями - это контроль после доказательства, а не замена доказательства. В ЕГЭ она помогает за несколько секунд найти потерянный знак или коэффициент 2.

35. Тройной угол выводится из формул сложения

Представим 3α как $2\alpha + \alpha$ и применим формулу синуса суммы:

$$\sin 3\alpha = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha.$$

Подставим $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ и $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$:

$$\sin 3\alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha.$$

Заменяем $\cos^2 \alpha$ на $1 - \sin^2 \alpha$ и приводим подобные:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

Для косинуса используем $\cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha$. После подстановки и приведения получаем

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

Проверка при $\alpha = 0$ даёт $0 = 0$ и $1 = 1$. При $\alpha = \frac{\pi}{3}$ формула косинуса даёт

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right) = -1, \text{ что совпадает с } \cos \pi.$$

36. Замена $t = \sin x + \cos x$

Если в выражении симметрично встречаются синус и косинус одного угла, полезно обозначить $t = \sin x + \cos x$. Возводим равенство в квадрат:

$$t^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x.$$

Следовательно,

$$\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Сумма кубов

По формуле суммы кубов

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x).$$

Подставляя найденное произведение, получаем

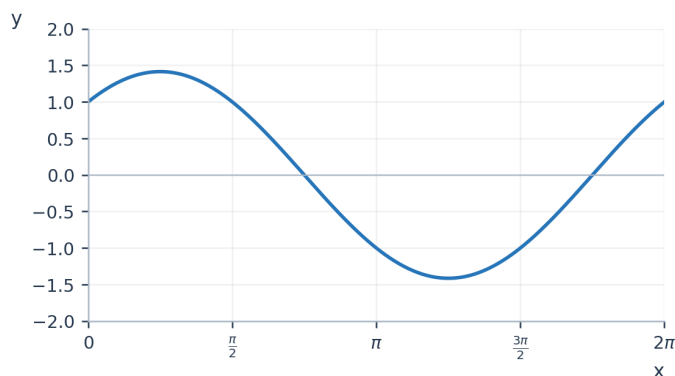
$$\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3t - t^3}{2}.$$

Задача. Если $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$, то сумма кубов равна $\frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{8}}{2} = \frac{11}{16}$.

Допустимые значения замены

Из представления $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ следует $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$. Поэтому не каждое значение t , появившееся после решения алгебраического уравнения, соответствует реальному углу x .

Важно. Тригонометрическая замена всегда сопровождается областью значений новой переменной, так же как $t = x^2$ требует $t \geq 0$, а $t = a^x - t > 0$.



Сумма $\sin x + \cos x$ принимает все значения от $-\sqrt{2}$ до $\sqrt{2}$.

37. Оценки из основного тождества

Из $(\sin x - \cos x)^2 \geq 0$ получаем $\sin^2 x + \cos^2 x \geq 2 \sin x \cos x$, то есть $1 \geq 2 \sin x \cos x$. Аналогично квадрат $(\sin x + \cos x)^2 \geq 0$ даёт $1 \geq -2 \sin x \cos x$.

$$-\frac{1}{2} \leq \sin x \cos x \leq \frac{1}{2}.$$

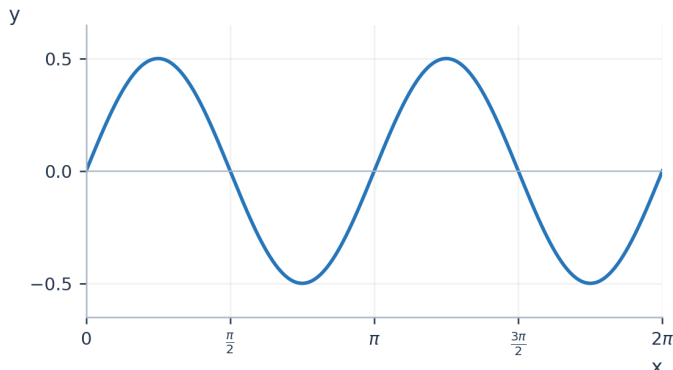
Верхняя граница достигается при $\sin x = \cos x$, например при $x = \frac{\pi}{4}$. Нижняя - при $\sin x = -\cos x$, например при $x = -\frac{\pi}{4}$. Поэтому это точные, а не приближительные оценки.

Так как $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, тот же результат равносильно привычной оценке $-1 \leq \sin 2x \leq 1$. Мы вывели её из квадрата и основного тождества.

Пример на максимум

Задача. Найдите наибольшее значение $3 + 4 \sin x \cos x$. Поскольку $\sin x \cos x \leq \frac{1}{2}$, выражение не больше $3 + 2 = 5$. При $x = \frac{\pi}{4}$ равенство достигается, поэтому максимум равен 5.

Полный ответ на максимум содержит две части: доказательство верхней границы и конкретное значение угла, при котором эта граница достигается.



Произведение $\sin x \cos x$ принимает значения от $-1/2$ до $1/2$.

38. Лаборатория ошибок

Ошибка	Откуда она возникает	Как восстановить факт
знак выбирают после вычислений	окружность не используется	сначала координаты и четверть
путают $\sin(\alpha \pm \beta)$	две формулы выучены отдельно	выразить координаты точки после поворота
приведение угадывают по таблице	забыто происхождение	подставить специальный угол в формулу сложения

Ошибка	Откуда она возникает	Как восстановить факт
$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ берут со знаком плюс	потеряна четверть	вспомнить $\cos \alpha = \pm \sqrt{\dots}$
делят на $\cos \alpha$ без проверки	забыта ОДЗ	отдельно проверить случай $\cos \alpha = 0$
период тангенса берут 2π как минимальный	не замечено одновременное изменение знаков координат	сравнить отношение после поворота на π

39. Быстрая проверка понимания

Вопрос ученику	Критерий полного ответа
Почему $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$?	Координаты точки лежат на единичной окружности.
Откуда берутся знаки по четвертям?	Из знаков абсциссы и ординаты.
Почему функции периодичны?	Полный оборот возвращает ту же точку.
Как вывести $\cos(\alpha + \beta)$?	Повернуть точку на окружности и сравнить первую координату.
Как получить двойной угол?	Подставить $\beta = \alpha$ в формулы сложения.
Как проверить забытую формулу?	Проверить ноль, чётность, четверть и численную точку.

Следующие разборы показывают переход от преобразований к отбору корней и к исследованию параметра.

40. Эталонный разбор 1 • Двойной угол и отбор на симметричном отрезке

Условие

- а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin x$.
 б) Укажите корни на $[-\pi; \pi]$.

Решение с обоснованием

Шаг 1. Заменим $\cos 2x$ на $1 - 2 \sin^2 x$. При $t = \sin x$ получаем $2t^2 + t - 1 = 0$.

Шаг 2. Корни $t = \frac{1}{2}$ и $t = -1$ допустимы. Поэтому $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ либо $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

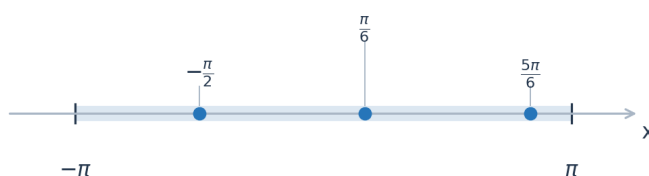
Шаг 3. На $[-\pi; \pi]$ попадают $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$.

Шаг 4. Каждая серия отбирается отдельно по целому k ; объединение сортируем по возрастанию.

Контроль полноты. Оба значения синуса допустимы и породили все стандартные серии; границы отрезка проверены.

Ответ. а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Экзаменационный акцент. В №13 оцениваются и общее решение, и отдельный пункт отбора.



Отбор корней уравнения $\cos 2x = \sin x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.

41. Параметр и число корней на полном периоде

Условие

В зависимости от a определите число решений уравнения $2\cos^2 x - 1 = a$ на $[0; 2\pi)$.

Решение

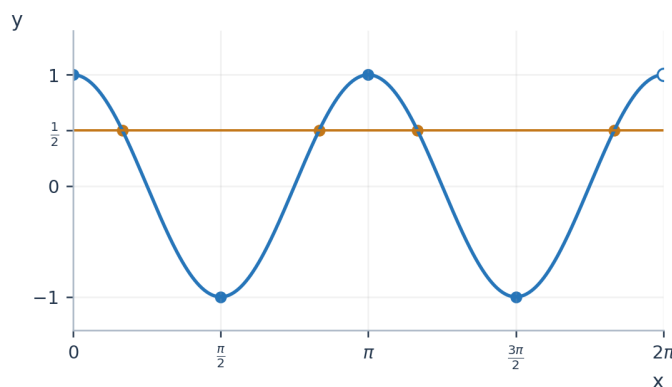
Шаг 1. Левая часть равна $\cos 2x$. При $|a| > 1$ решений нет.

Шаг 2. При замене $u = 2x$ промежуток превращается в $[0; 4\pi)$. Это два полных периода косинуса. При $-1 < a < 1$ на каждом периоде два корня, всего четыре.

Шаг 3. При $a = 1$ корни по x : $0, \pi$. При $a = -1$: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. В обоих случаях корней два. Точка 2π в исходный полуинтервал не входит.

Ответ. 0 корней при $|a| > 1$; 2 корня при $|a| = 1$; 4 корня при $|a| < 1$.

Переносить нужно не только формулу, но и границы промежутка: один и тот же отрезок по x может содержать несколько периодов новой функции.



Два периода $y = \cos 2x$ на $[0; 2\pi)$. При $a = 1/2$ пересечений четыре; при $a = \pm 1$ по два. Правый конец исключён.

42. Параметр: допустимые значения замены и число углов

Подсчёт корней квадратного уравнения по $t = \sin x$ ещё не даёт число углов x . Сначала оставляем только $t \in [-1; 1]$, затем возвращаемся к исходной переменной.

Уровень t	Число углов на $[0; 2\pi)$
$t < -1$ или $t > 1$	0
$t = -1$ или $t = 1$	1
$-1 < t < 1$	2

Например, $t = 0$ даёт ровно два угла: 0 и π . Значение 2π не входит в полуинтервал. Двойной корень квадратного уравнения считается одним значением t .

Разобранный пример

При каких a уравнение $\sin^2 x - \sin x + a = 0$ имеет четыре различных корня на $[0; 2\pi)$?

Шаг 1. Нужны два различных корня $t^2 - t + a = 0$ строго внутри $(-1; 1)$. Корни симметричны относительно $\frac{1}{2}$ и имеют вид

$$t_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}.$$

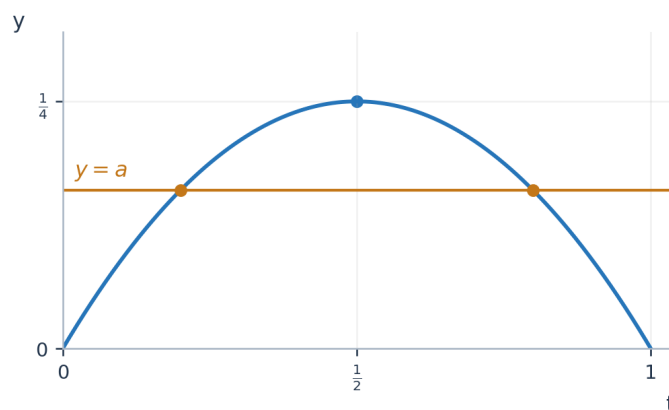
Шаг 2. Различность требует $a < \frac{1}{4}$. Условие $t_+ < 1$ равносильно $\sqrt{1 - 4a} < 1$, то есть $a > 0$. Тогда автоматически $0 < t_- < \frac{1}{2} < t_+ < 1$.

Шаг 3. Каждое из двух значений синуса даёт по два угла. Итого четыре при $0 < a < \frac{1}{4}$.

Границы проверяем отдельно. При $a = 0$ уровни $t = 0$ и $t = 1$ дают три угла. При $a = \frac{1}{4}$ остаётся один уровень $t = \frac{1}{2}$, то есть два угла.

Ответ. $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$.

В более сложной задаче границы случаев ищут по дискриминанту и по подстановкам $q(-1)$, $q(1)$: так обнаруживают слияние корней и выход из допустимого диапазона. В практике урока эти события нужно учесть отдельно.



При $0 < a < 1/4$ прямая $y = a$ пересекает $y = t - t^2$ в двух точках внутри $(0; 1)$.