



Урок 15. Работа, трубы и смеси

В задачах на работу складывают производительности, а в задачах на смеси составляют баланс вещества. Разберём совместную и поэтапную работу, наполнение со сливом, разбавление, испарение и смешивание растворов.

В задачах производительности и скорости потоков постоянны; при наполнении бак первоначально пуст, если не сказано иное. Концентрация означает массовую долю одного и того же вещества. При испарении удаляется только вода.

01. Производительность и объём работы

В задачах на работу основная связь та же, что при движении: выполненный объём равен производительности, умноженной на время. Если весь заказ принят за единицу, исполнитель, работающий T часов, за один час выполняет $1/T$ заказа.

Производительность измеряется в заказах в час, деталях в день или литрах в минуту. Время и производительность - обратные величины только при фиксированном объёме. Складывать времена двух исполнителей для нахождения совместного времени нельзя.

$$p_{\text{вместе}} = p_1 + p_2, \quad T_{\text{вместе}} = \frac{1}{p_1 + p_2}.$$

Если один выполняет заказ за 6 часов, а второй за 3, их производительности равны $1/6$ и $1/3$. Вместе получается половина заказа в час, значит на весь заказ нужны 2 часа. Результат меньше времени каждого по отдельности, что согласуется со смыслом.

02. Поэтапная работа

Если исполнители подключаются в разные моменты, разделите процесс на этапы. Для каждого найдите выполненную часть, затем сложите эти части. Не используйте одну общую производительность для времени, когда один из участников ещё не работал.

После первого этапа остаток равен $1 - A_1$. Время второго этапа находится делением остатка на действующую производительность. Если спрашивают всю длительность, к этому времени прибавляют уже прошедшее время первого этапа.

При одинаковой производительности каждого рабочего число рабочих и время обратно пропорциональны. Пять рабочих за 12 дней выполняют 60 человеко-дней работы. Восемь таких рабочих выполняют этот объём за $60/8 = 7,5$ дня, если работа делится между ними без потерь эффективности.

03. Наполнение и слив

Наполняющая труба увеличивает объём, слив уменьшает. Поэтому их производительности имеют разные знаки: $p_{\text{чист}} = 1/T_{\text{нап}} - 1/T_{\text{слив}}$. Для наполнения пустого бака требуется положительная чистая производительность.

Если она равна нулю, уровень не растёт; если отрицательна, пустой бак при такой модели наполнить нельзя. При нескольких трубах складывайте вклады со знаком, а время находите уже по итоговой производительности.

Главное правило. Сначала посчитайте, сколько прибавляется за одну единицу времени. Затем делите нужный объём на этот результат.

04. Масса раствора и масса вещества

Раствор содержит вещество и растворитель. Массовая концентрация - доля вещества в общей массе: $c = m_{\text{вещ}}/m_{\text{раствора}}$. В уравнениях 20% записывается как 0,2.

В 300 г 20%-го раствора содержится 60 г вещества и 240 г растворителя. При смешивании складываются массы растворов и отдельно массы вещества. Новая концентрация равна отношению этих двух итогов, а не сумме исходных процентов.

$$c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}.$$

Среднее арифметическое процентов допустимо только при равных массах. В остальных случаях получается взвешенное среднее, которое лежит между исходными концентрациями и ближе к концентрации раствора большей массы.

05. Что сохраняется при изменении раствора

Действие	Масса вещества	Общая масса
Добавить x г воды	Не меняется	Увеличивается на x
Испарить x г воды	Не меняется	Уменьшается на x
Добавить x г чистого вещества	Увеличивается на x	Увеличивается на x
Добавить x г раствора доли c_2	Увеличивается на $c_2 x$	Увеличивается на x

Предполагается, что вещество не испаряется и химической реакции с потерей массы нет. Это модель данных учебных задач. Добавление чистого вещества меняет **и числитель, и знаменатель** дроби концентрации.

Если из 500 г 10%-го раствора испарить 100 г воды, вещества останется 50 г, общая масса станет 400 г и концентрация составит 12,5%. Если затем добавить те же 100 г воды, исходная концентрация восстановится.

06. Ограничения и точный ответ

Добавленная или удалённая масса неотрицательна. При испарении нельзя удалить больше воды, чем было в растворе. После добавления воды концентрация должна уменьшиться, после испарения воды - увеличиться. Эти проверки выявляют ошибки в модели ещё до вычислений.

Дробное число часов переводите в минуты умножением дробной части на 60: $1\frac{1}{3}$ часа - 20 минут. Если масса получилась дробной, не округляйте без требования условия. Точную дробь можно сопровождать приближением, но не заменять им.

07. Подробные объяснения и разобранные примеры

Разбор 1. Доля работы одного исполнителя

УСЛОВИЕ

Рабочий выполняет заказ за 12 часов. Какую часть заказа он выполнит за 5 часов?

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Если вся работа равна 1, за один час выполняется $1/T$, а за t часов - t/T .

ДО РЕШЕНИЯ.

За 5 часов из 12 будет выполнено меньше половины заказа.

1. Принимаем работу за единицу

$$A_{\text{вся}} = 1$$

Конкретное число деталей не требуется.

2. Находим производительность

$$p = \frac{1}{12}$$

За 12 часов выполняется одна работа.

3. Умножаем на время

$$A = pt = \frac{1}{12} \cdot 5 = \frac{5}{12}$$

Каждый час добавляется $1/12$ заказа.

4. Оцениваем

$$\frac{5}{12} < \frac{1}{2}$$

Результат согласуется с предварительной проверкой.

Проверка. За оставшиеся 7 часов выполнится $7/12$, вместе получится 1.

Типичная ошибка. Разделить 12 на 5 и получить время вместо доли работы.

ОТВЕТ.

$$\frac{5}{12}$$

Разбор 2. Совместная работа двух исполнителей**УСЛОВИЕ**

Первый выполняет работу за 12 часов, второй - за 18 часов. За сколько часов они выполнят её вместе?

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Складываем не времена, а доли работы, выполняемые за один час.

ДО РЕШЕНИЯ.

Совместное время должно быть меньше 12 часов - времени более быстрого исполнителя.

1. Записываем производительности

$$p_1 = \frac{1}{12}, \quad p_2 = \frac{1}{18}$$

Каждая дробь показывает часть работы за час.

2. Складываем

$$p = \frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} = \frac{5}{36}$$

При одновременной работе выполненные доли складываются.

3. Находим время

$$T = \frac{1}{p} = \frac{36}{5} = 7,2 \text{ ч}$$

Время одной работы - число, обратное производительности.

4. Переводим дробную часть часа

$$0,2 \cdot 60 = 12 \text{ мин}$$

При необходимости 7,2 часа = 7 часов 12 минут.

Проверка. $7,2 < 12$ и $7,2 < 18$ - совместная работа действительно быстрее.

Типичная ошибка. Сложить $12+18$ или найти среднее арифметическое времён.

ОТВЕТ.

7,2

Разбор 3. Труба и слив

УСЛОВИЕ

Труба наполняет пустой бассейн за 6 часов, а слив опустошает полный бассейн за 9 часов. За сколько часов наполнится пустой бассейн, если открыть и трубу, и слив?

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Наполняющий поток прибавляем, опустошающий - вычитаем.

ДО РЕШЕНИЯ.

Приток $1/6$ больше оттока $1/9$, поэтому бассейн наполнится, но медленнее чем за 6 часов.

1. Записываем потоки

$$p_{\text{вход}} = \frac{1}{6}, \quad p_{\text{слив}} = \frac{1}{9}$$

Это доли бассейна за час.

2. Находим чистую скорость

$$p = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{3}{18} - \frac{2}{18} = \frac{1}{18}$$

Слив действует в противоположном направлении.

3. Находим время

$$T = \frac{1}{1/18} = 18 \text{ ч}$$

За час наполняется $1/18$ бассейна.

4. Проверяем диапазон

$$18 > 6$$

Открытый слив замедляет наполнение.

Проверка. За 18 часов труба подаст 3 бассейна, слив удалит 2; останется ровно 1.

Типичная ошибка. Сложить $1/6$ и $1/9$, как будто обе трубы наполняют.

ОТВЕТ.

18

Разбор 4. План и фактическая производительность**УСЛОВИЕ**

По плану бригада должна была делать 24 детали в день. Фактически она делала 30 деталей и закончила заказ на 2 дня раньше. Сколько деталей было в заказе?

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Объём заказа одинаков в плане и по факту; разницу времени выражаем в обозначении.

ДО РЕШЕНИЯ.

Фактическая производительность выше, поэтому фактическое число дней должно быть меньше планового.

1. Обозначаем плановое время

x дней

Тогда фактическое время равно $x-2$.

2. Приравниваем объёмы

$$24x = 30(x - 2)$$

Количество деталей = деталей в день $\times$ число дней.

3. Решаем уравнение

$$24x = 30x - 60 \Rightarrow 6x = 60 \Rightarrow x = 10$$

Плановое время равно 10 дням.

4. Находим заказ

$$V = 24 \cdot 10 = 240$$

Вопрос требует число деталей, не число дней.

5. Проверяем по факту

$$30 \cdot (10 - 2) = 30 \cdot 8 = 240$$

Оба способа дают один объём.

Проверка. Фактически работали 8 дней, что ровно на 2 дня меньше 10.

Типичная ошибка. Записать 10 в ответ или поставить $x+2$ вместо $x-2$.

ОТВЕТ.

240

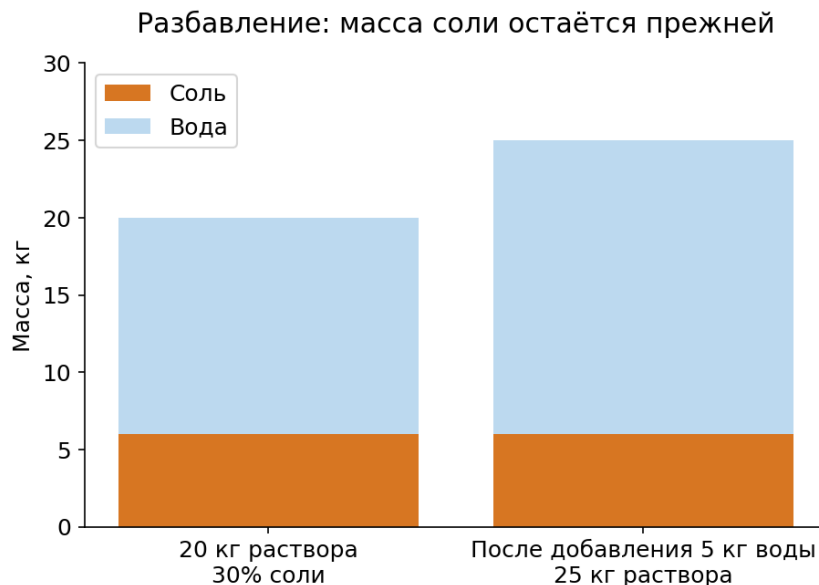
Разбор 5. Разбавление раствора водой**УСЛОВИЕ**

Рис. 1: Разбор 5. Разбавление раствора водой.

К 20 кг 30%-го раствора добавили 5 кг воды. Найдите концентрацию полученного раствора.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

При добавлении чистой воды масса растворённого вещества не меняется, а общая масса увеличивается.

ДО РЕШЕНИЯ.

Концентрация должна стать меньше 30%, потому что добавлена вода без вещества.

1. Переводим процент в долю

$$30\% = 0,30$$

В формуле концентрация используется как часть единицы.

2. Находим массу вещества

$$m_{\text{вещ}} = 20 \cdot 0,30 = 6 \text{ кг}$$

Вода не добавляет растворённого вещества.

3. Находим новую массу раствора

$$m_{\text{нов}} = 20 + 5 = 25 \text{ кг}$$

Складываем исходный раствор и воду.

4. Вычисляем новую долю

$$c = \frac{6}{25} = 0,24$$

Концентрация - отношение массы вещества к массе смеси.

5. Возвращаем проценты

$$0,24 = 24\%$$

Умножаем долю на 100%.

Проверка. $24\% < 30\%$, как и ожидалось после разбавления.

Типичная ошибка. Считать 30% от новой массы 25 кг: это изменило бы массу вещества, хотя добавлялась только вода.

ОТВЕТ.

24

Разбор 6. Два мастера выполняют заказ

УСЛОВИЕ

Один мастер выполняет заказ за 42 часа, другой - за 21 час. За сколько часов они выполнят заказ вместе?

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Складываем часовые производительности и берём обратное число.

ДО РЕШЕНИЯ.

Второй мастер вдвое быстрее первого; вместе они должны справиться быстрее чем за 21 час.

1. Записываем производительности

$$p_1 = \frac{1}{42}, \quad p_2 = \frac{1}{21} = \frac{2}{42}$$

Работу принимаем за 1.

2. Складываем

$$p = \frac{1}{42} + \frac{2}{42} = \frac{3}{42} = \frac{1}{14}$$

За час выполняется сумма долей.

3. Находим время

$$T = \frac{1}{p} = 14$$

При производительности $1/14$ вся работа занимает 14 часов.

4. Проверяем

$$\frac{14}{42} + \frac{14}{21} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

За 14 часов вместе выполнена целая работа.

Проверка. $14 < 21 < 42$, совместное время меньше обоих индивидуальных.

Типичная ошибка. Складывать 42 и 21 или делить их сумму на 2.

ОТВЕТ.

14

Разбор 7. Находим время одного работника по совместному

УСЛОВИЕ

Катя и Настя пропалывают грядку вместе за 24 минуты, а Настя одна - за 42 минуты. За сколько минут прополет грядку одна Катя?

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Производительность Кати равна совместной производительности минус производительность Насти.

ДО РЕШЕНИЯ.

Катя должна работать дольше 24 минут, но её точное время может быть и больше 42 минут.

1. Записываем известные скорости работы

$$p_{\text{вместе}} = \frac{1}{24}, \quad p_{\text{Н}} = \frac{1}{42}$$

Единицы - грядки в минуту.

2. Вычитаем

$$p_{\text{К}} = \frac{1}{24} - \frac{1}{42}$$

Совместная скорость равна сумме скоростей девушек.

3. Приводим к общему знаменателю

$$p_{\text{К}} = \frac{7}{168} - \frac{4}{168} = \frac{3}{168} = \frac{1}{56}$$

$\text{НОК}(24, 42) = 168$.

4. Переходим ко времени

$$T_{\text{К}} = 56 \text{ мин}$$

Если за минуту выполняется $1/56$, вся работа требует 56 минут.

Проверка. $1/56 + 1/42 = 3/168 + 4/168 = 7/168 = 1/24$.

Типичная ошибка. Вычесть времена $42 - 24 = 18$ вместо производительностей.

ОТВЕТ.

56

Разбор 8. Смешивание двух медных сплавов**УСЛОВИЕ**

Первый сплав содержит 60% меди, второй - 10%. Масса второго сплава на 90 кг больше массы первого. После смешивания получили сплав с 20% меди. Найдите массу полученного сплава.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Составляем баланс меди: масса меди до смешивания равна массе меди в полученном сплаве.

ДО РЕШЕНИЯ.

Итоговые 20% ближе к 10%, поэтому второго, более слабого сплава должно быть заметно больше - это согласуется с условием.

1. Обозначаем массы

$$m_1 = x, \quad m_2 = x + 90$$

Второго сплава на 90 кг больше.

2. Записываем массу меди

$$0,6x + 0,1(x + 90) = 0,2(2x + 90)$$

Слева медь в компонентах, справа - в смеси.

3. Решаем уравнение

$$0,7x + 9 = 0,4x + 18 \Rightarrow 0,3x = 9 \Rightarrow x = 30$$

Первая масса равна 30 кг.

4. Находим вторую массу

$$m_2 = 30 + 90 = 120$$

Используем условие о разности.

5. Отвечаем на вопрос

$$m_{\text{смеси}} = 30 + 120 = 150 \text{ кг}$$

Требуется общая масса полученного сплава.

Проверка. $0,6 \cdot 30 + 0,1 \cdot 120 = 18 + 12 = 30$ кг меди; $30/150 = 0,2 = 20\%$.

Типичная ошибка. Записать 30 в ответ: это масса первого сплава, а не всей смеси.

ОТВЕТ.

08. Опорные формулы

$$p = \frac{1}{T}, \quad A = pt, \quad \frac{1}{T_{\text{вместе}}} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$$

$$p_{\text{итог}} = p_{\text{выход}} - p_{\text{слив}} \text{ для противоположных потоков}$$

$$V = p_{\text{план}} t_{\text{план}} = p_{\text{факт}} t_{\text{факт}}$$

$$m_{\text{вещ}} = c m_{\text{смеси}}, \quad c = \frac{m_{\text{вещ}}}{m_{\text{смеси}}}$$

09. Вопрос по теме

Почему нельзя сложить время двух работников?

Время не складывается: за каждый час работники выполняют свои доли общего заказа. Складывайте доли за час, затем делите остаток работы на полученную производительность.

10. Самостоятельная работа

В тесте 40 заданий. Начните с заданий 1-20, затем переходите к 21-35 и 36-40. Решите самостоятельно и только после этого откройте объяснение. Задания на повторение отмечены отдельно.

Перейти к тестовым заданиям урока 15

Предыдущий урок: Текстовые задачи: движение.