



ПРОФИЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА · УРОК 32

Практикум: первая часть и уравнения

Ответы и пошаговые решения

Базовая тренировка: задания 1-12

Задание 1

Тренировка. Прямоугольный треугольник

В прямоугольном треугольнике катеты равны 21 и 72. Найдите гипотенузу. Используйте рисунок.

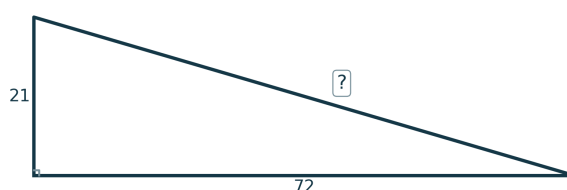


Рисунок к заданию.

Решение

1. По теореме Пифагора $c = \sqrt{21^2 + 72^2} = 75$.

ОТВЕТ: 75

Задание 2

Тренировка. Векторы

Найдите длину вектора $\vec{v} = (6; 8)$.

Решение

1. $|\vec{v}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

ОТВЕТ: 10



Задание 3

Тренировка. Объём цилиндра

Радиус основания цилиндра равен 6, высота — 4. Найдите $\frac{V}{\pi}$.

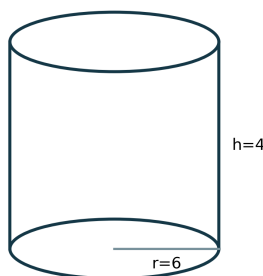


Рисунок к заданию.

Решение

1. $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 4 = 144\pi$, поэтому $\frac{V}{\pi} = 144$.

ОТВЕТ: 144

Задание 4

Тренировка. Вероятность

Из 30 лотерейных билетов 6 выигрышных. Найдите вероятность выигрыша при покупке одного билета.

Решение

1. $P = \frac{6}{30} = 0,2$.

ОТВЕТ: 0,2

Задание 5

Повторение. Вероятность

Вероятности попадания двух независимых стрелков равны 0,8 и 0,5. Найдите вероятность ровно одного попадания.

Решение

1. $P = 0,8 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,5 = 0,5$.

ОТВЕТ: 0,5



Задание 6

Повторение. Уравнение

Найдите меньший корень уравнения $x^2 - 9 = 0$.

Решение

1. $x = \pm 3$, меньший корень равен -3 .

ОТВЕТ: -3

Задание 7

Повторение. Модель и проверка

Вычислите $2^5 \cdot 4^{-1}$.

Решение

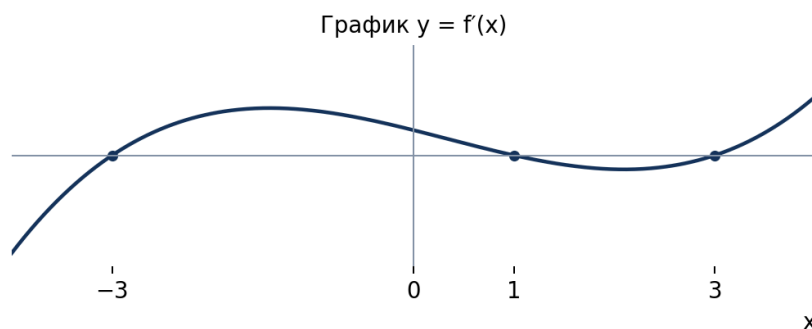
1. $32 \cdot \frac{1}{4} = 8$.

ОТВЕТ: 8

Задание 8

Повторение. Знак производной

На рисунке изображён график производной функции; её нули имеют абсциссы -3 , 1 , 3 . Сколько точек максимума имеет функция на показанном интервале?



Решение

1. Точка максимума функции соответствует переходу производной от положительных значений к отрицательным.

2. На графике такой переход происходит один раз — в средней отмеченной точке.

ОТВЕТ: 1



Задание 9

Тренировка. Модель и проверка

Плотность вычисляется по формуле $\rho = \frac{m}{V}$. Найдите плотность тела массой 780 г и объёмом 100 см³.

Решение

1. $\rho = \frac{780}{100} = 7,8$ г/см³.

ОТВЕТ: 7,8

Задание 10

Тренировка. Модель и проверка

Первый мастер выполняет работу за 6 часов, второй — за 3 часа. За сколько часов они выполнят её вместе?

Решение

1. Общая скорость равна $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ работы в час.

2. Время совместной работы равно 2 часа.

ОТВЕТ: 2

Задание 11

Тренировка. Линейная функция

На рисунке изображён график линейной функции, проходящей через точки (0; 9) и (1; 14). Найдите значение функции при $x = 3$.

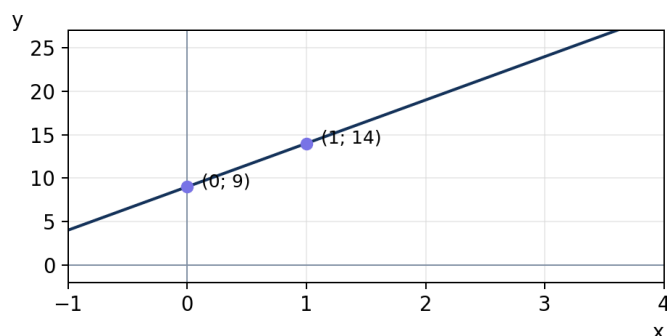


Рисунок к заданию.

Решение

1. По графику или по уравнению прямой $y = 5x + 9$ получаем $y(3) = 24$.

ОТВЕТ: 24



Задание 12

Тренировка. Модель и проверка

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = (x - 2)^2 + 4$ на отрезке $[5; 8]$.

Решение

1. На данном отрезке функция возрастает, поэтому минимум достигается при $x=5$.
2. $f(5) = 9 + 4 = 13$.

ОТВЕТ: 13

Подготовительные и экзаменационные задачи: задания 13-36

Задание 13

Тренировка. Уравнение

а) Решите уравнение $2 \sin^2(x + 5\pi) - 3 \sin(x + 5\pi) + 1 = 0$. **б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку** $\left[-\frac{11\pi}{2}; -3\pi\right]$.

Решение

1. Обозначим $y = x + 5\pi$. Разложим: $(2 \sin y - 1)(\sin y - 1) = 0$.
2. Получаем $y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ или $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
3. Возвращаемся к x и выполняем отбор на данном отрезке.
4. Подходящие корни: $-\frac{29\pi}{6}$, $-\frac{9\pi}{2}$, $-\frac{25\pi}{6}$.

Полное решение пункта а: $x = -\frac{29\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\frac{25\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\frac{9\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: а) $x = -\frac{29\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\frac{25\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\frac{9\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; **б)** $-\frac{29\pi}{6}$; $-\frac{9\pi}{2}$; $-\frac{25\pi}{6}$

Задание 14

Тренировка. Уравнение

а) Решите уравнение $4^x - 272 \cdot 2^x + 4096 = 0$. **б) Найдите корни, принадлежащие отрезку** $[3; 5]$.

Решение

1. Положим $t = 2^x > 0$. Получаем $t^2 - 272t + 4096 = 0$.
2. Корни квадратного уравнения: $t = 16$ и $t = 256$.
3. Следовательно, $x = 4$ или $x = 8$.
4. Условию пункта б удовлетворяет только $x = 4$.

Ответ: а) $x = 4; 8$; **б)** $x = 4$



Задание 15

Тренировка. Площадь трапеции

Основания трапеции равны 18 и 23, высота равна 3. Найдите площадь трапеции по рисунку.



Рисунок к заданию.

Решение

$$1. S = \frac{(18 + 23) \cdot 3}{2} = 61,5.$$

ОТВЕТ: 61,5

Задание 16

Тренировка. Векторы

Даны векторы $\vec{a} = (2; 2)$ и $\vec{b} = (3; 10)$. Найдите их скалярное произведение.

Решение

$$1. \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + (2) \cdot 10 = 26.$$

ОТВЕТ: 26



Задание 17

Тренировка. Объём тела

Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 3, 9 и 8. Найдите его объём.

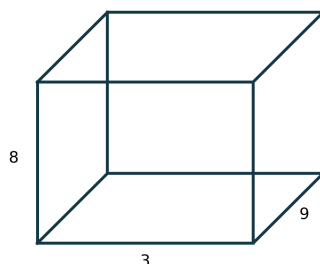


Рисунок к заданию.

Решение

1. $V = 3 \cdot 9 \cdot 8 = 216$.

ОТВЕТ: 216

Задание 18

Тренировка. Векторы

Найдите длину вектора $\vec{v} = (-5; 12)$.

Решение

1. $|\vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$.

ОТВЕТ: 13

Задание 19

Формат егэ. Вероятность

Вероятности попадания двух независимых стрелков равны 0,1 и 0,5. Найдите вероятность хотя бы одного попадания.

Решение

1. Вероятность двух промахов: $(1 - 0,1)(1 - 0,5) = 0,45$.

2. Искомая вероятность: $1 - 0,45 = 0,55$.

ОТВЕТ: 0,55



Задание 20

Формат егэ. Вероятность

В лотерее 50 билетов, из них 7 призовых. Какова вероятность получить приз с одним билетом?

Решение

1. $P = \frac{7}{50} = 0,14$.

ОТВЕТ: 0,14

Задание 21

Формат егэ. Вероятность

Два независимых датчика срабатывают с вероятностями 0,9 и 0,7. Найдите вероятность, что сработает ровно один.

Решение

1. $P = 0,9 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,7 = 0,34$.

ОТВЕТ: 0,34

Задание 22

Формат егэ. Уравнение

Найдите сумму корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Решение

1. По теореме Виета сумма корней равна 5.

ОТВЕТ: 5

Задание 23

Формат егэ. Модель и проверка

Вычислите $9^{\frac{3}{2}}$.

Решение

1. $9^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^3 = 27$.

ОТВЕТ: 27



Задание 24

Формат егэ. Движение

Автомобиль ехал 4 ч со скоростью 70 км/ч и затем 5 ч со скоростью 75 км/ч. Найдите весь путь.

Решение

1. $S = 70 \cdot 4 + 75 \cdot 5 = 655$ км.

ОТВЕТ: 655

Задание 25

Формат егэ. Модель и проверка

Масса вычисляется по формуле $m = \rho V$. Найдите массу при $\rho = 2,7$ г/см³ и $V = 40$ см³.

Решение

1. $m = 2,7 \cdot 40 = 108$ г.

ОТВЕТ: 108

Задание 26

Формат егэ. Модель и проверка

Одна труба наполняет бассейн за 4 часа, другая — за 12 часов. За сколько часов они наполнят бассейн вместе?

Решение

1. $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$ бассейна в час.

2. Бассейн заполнится за 3 часа.

ОТВЕТ: 3

Задание 27

Формат егэ. Уравнение

а) Решите уравнение $2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$. **б) Найдите корни на отрезке** $[0; 2\pi]$.

Решение

1. Обозначим $y = x$. Разложим: $(2 \cos y - 1)(\cos y + 1) = 0$.

2. При $\cos y = \frac{1}{2}$: $y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; при $\cos y = -1$: $y = \pi + 2\pi n$.

3. Возвращаемся к x и отбираем корни на заданном отрезке.

4. Подходящие корни: $\frac{\pi}{3}$, π , $\frac{5\pi}{3}$.

Полное решение пункта а: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: а) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ **или** $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; **б)** $\frac{\pi}{3}$; π ; $\frac{5\pi}{3}$



Задание 28

Формат егэ. Модель и проверка

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = (x + 3)^2 - 1$ на отрезке $[-1; 2]$.

Решение

1. Вершина $x = -3$ лежит левее отрезка, поэтому функция на отрезке возрастает.
2. $f(-1) = 4 - 1 = 3$.

ОТВЕТ: 3

Задание 29

Формат егэ. Прямоугольный треугольник

В прямоугольном треугольнике катеты равны 6 и 8. Найдите гипотенузу. Используйте рисунок.

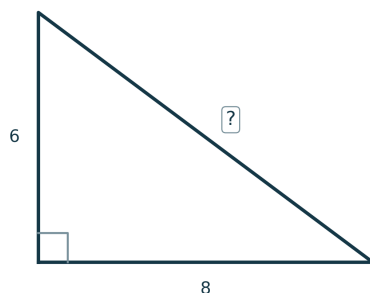


Рисунок к заданию.

Решение

1. По теореме Пифагора $c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

ОТВЕТ: 10

Задание 30

Формат егэ. Векторы

Даны векторы $\vec{a} = (3; 3)$ и $\vec{b} = (3; 2)$. Найдите их скалярное произведение.

Решение

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 3 + (3) \cdot 2 = 15$.

ОТВЕТ: 15



Задание 31

Формат егэ. Объём цилиндра

Радиус основания цилиндра равен 2, высота — 5. Найдите $\frac{V}{\pi}$.

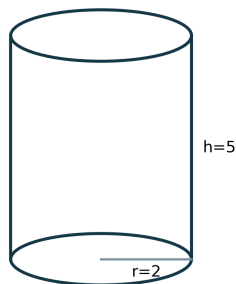


Рисунок к заданию.

Решение

1. $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 20\pi$, поэтому $\frac{V}{\pi} = 20$.

ОТВЕТ: 20

Задание 32

Формат егэ. Вероятность

В коробке 1 красный и 9 синих шаров. Наугад выбирают один шар. Найдите вероятность выбрать красный шар.

Решение

1. Всего 10 равновозможных исходов, благоприятных — 1.

2. $P = \frac{1}{10} = 0,1$.

ОТВЕТ: 0,1

Задание 33

Формат егэ. Уравнение

а) Решите уравнение $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$. б) Найдите все корни на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Решение

1. Положим $t = \cos x$. Тогда $(2t - 1)(t + 1) = 0$.

2. Получаем $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -1$.

3. Общее решение: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

4. На заданном отрезке лежат $-\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ и π .

Полное решение пункта а: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: а) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \pi$



Задание 34

Формат егэ. Уравнение

а) Решите уравнение $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$. **б) Найдите корни, принадлежащие отрезку** $[0; 2]$.

Решение

1. Положим $t = 2^x > 0$. Получаем $t^2 - 10t + 16 = 0$.
2. Корни квадратного уравнения: $t = 2$ и $t = 8$.
3. Следовательно, $x = 1$ или $x = 3$.
4. Условию пункта б удовлетворяет только $x = 1$.

Ответ: а) $x = 1; 3$; б) $x = 1$

Задание 35

Формат егэ. Неравенство и ОДЗ

Решите неравенство $\frac{(x-2)(x-8)}{x-5} \geq 0$.

Решение

1. Критические точки: 2, 5, 8; точка 5 не входит в ОДЗ.
2. Расставляем знаки множителей на четырёх промежутках. Кратности всех нулей нечётные, поэтому знак меняется в каждой критической точке.
3. Выбираем нужные промежутки и получаем $[2; 5) \cup [8; +\infty)$.

ОТВЕТ: $[2; 5) \cup [8; +\infty)$

Задание 36

Формат егэ. Неравенство и ОДЗ

Решите неравенство $\log_3 (x-1) \geq 2$.

Решение

1. ОДЗ: $x > 1$.
2. Так как основание 3 больше единицы, знак неравенства сохраняется: $x - 1 \geq 3^2$.
3. С учётом ОДЗ получаем $[10; +\infty)$.

ОТВЕТ: $[10; +\infty)$



Повторение: задания 37–40

Задание 37

Повторение. Кредит и проценты

В июле банк выдал кредит в размере 900 тыс. рублей на 5 лет. Каждый январь долг увеличивается на 20%, после чего одним платежом уменьшается так, чтобы к июлю каждого следующего года долг становился на одну и ту же величину меньше. Найдите платёж в 4-й год. Ответ дайте в тысячах рублей.

Решение

1. Перед начислением процентов в 4-й год остаток равен 360 тыс. рублей.
2. Проценты составят $0,2 \cdot 360 = 72$ тыс. рублей.
3. Часть основного долга во всех платежах одинакова: $\frac{900}{5} = 180$.
4. Платёж: $180 + 72 = 252$ тыс. рублей.

ОТВЕТ: 252 тыс. рублей

Задание 38

Повторение. Делимость

Существует ли натуральное n , для которого $n^2 + 3$ делится на 4? Обоснуйте ответ.

Решение

1. Возьмём нечётное n . Тогда $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$.
2. Следовательно, $n^2 + 3 \equiv 0 \pmod{4}$; например, $n = 1$.

ОТВЕТ: Да

Задание 39

Повторение. Модель и проверка

Вклад 100 000 рублей размещён на 2 года под 10% годовых с ежегодной капитализацией. Найдите итоговую сумму.

Решение

1. Коэффициент роста за год: $q = 1,1$.
2. Итог: $S = 100000 \cdot 1,1^2 = 121000$ рублей.

ОТВЕТ: 121 000 рублей



Задание 40

Повторение. Неравенство и ОДЗ

Решите неравенство $\frac{(x-0)(x-6)}{x-3} \geq 0$.

Решение

1. Нули числителя: $x = 0$, $x = 6$; точка разрыва: $x = 3$.
2. На числовой прямой отмечаем точки в порядке возрастания и определяем знаки произведения.
3. Неотрицательные промежутки: $[0; 3) \cup [6; +\infty)$. Точка $x = 3$ исключается.

ОТВЕТ: $[0; 3) \cup [6; +\infty)$