



Урок 21. Стереометрия первой части

Стереометрия первой части. Правила, способы проверки и восемь пошаговых разборов.

01. От плоского рисунка к пространственной модели

В пространственной задаче сначала нужно понять, где расположены данные отрезки. Ребро, высота и диагональ могут иметь разные длины, даже если на рисунке выглядят одинаково. Высота всегда перпендикулярна выбранному основанию. У наклонного тела боковое ребро обычно не является высотой.

Почему диагональ требует двух применений теоремы Пифагора

В прямоугольном параллелепипеде с рёбрами a, b, c диагональ основания d_0 удовлетворяет равенству $d_0^2 = a^2 + b^2$. Пространственная диагональ d - гипотенуза другого прямоугольного треугольника, у которого катеты d_0 и c . Поэтому $d^2 = d_0^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Эта формула относится именно к прямоугольному параллелепипеду: в произвольной призме углы нужно проверять отдельно.

Как не перепутать три высоты пирамиды

У правильной пирамиды высота тела соединяет вершину с центром основания. Апофема соединяет вершину с серединой стороны основания и является высотой боковой грани. Боковое ребро идёт от вершины пирамиды к вершине основания. Для площади боковой поверхности нужна апофема, для объёма - высота тела. В квадратном основании расстояние от центра до середины стороны равно половине стороны; расстояние до вершины равно половине диагонали.

Самопроверка через масштаб

Если все линейные размеры увеличить в k раз, площадь увеличится в k^2 , а объём - в k^3 . Но если увеличена только высота цилиндра, а радиус прежний, объём меняется пропорционально высоте. Не применяйте куб коэффициента к изменению одного размера. Перед ответом проверьте также единицы: квадратные для площади, кубические для объёма.

02. Как устроен пространственный чертёж

Стереометрический рисунок - это плоское изображение пространственного тела. Поэтому прямой угол на бумаге может выглядеть острым, равные рёбра могут казаться разными, а окружность основания цилиндра изображается эллипсом. Чертёж помогает увидеть связи между элементами, но числовые выводы разрешено делать только из условия, условных отметок и известных свойств тела.

На хорошем рисунке видимые рёбра проводят сплошной линией, а скрытые - штриховой. Штриховая линия не означает, что ребро короче или имеет особое значение: она только

показывает, что ребро закрыто поверхностью тела. Если внутренний отрезок, например высота пирамиды, проходит внутри фигуры, его тоже часто изображают штрихом. В решении нужно называть этот отрезок словами, а не угадывать его роль по виду линии.

Перед вычислениями назовите тело, его основание и высоту. Затем выпишите, что именно дано: ребро, диагональ, радиус, диаметр, площадь основания, площадь боковой поверхности или объём. После этого выделите плоскую фигуру, в которой выполняется вычисление. Для диагонали параллелепипеда это прямоугольный треугольник; для образующей конуса - осевое сечение; для апофемы правильной пирамиды - треугольник с катетами, равными высоте и половине стороны основания.

Единицы измерения - часть ответа. Длина измеряется в обычных единицах, площадь - в квадратных, объём - в кубических. Если в условии все размеры даны в сантиметрах, то ответ на вопрос о площади должен быть в квадратных сантиметрах, а об объёме - в кубических. Несовпадение размерности почти всегда выдаёт неверно выбранную формулу.

Полезно научиться читать обозначения вершин системно. У многогранника нижнее основание часто обозначают $ABCD$, а соответствующие вершины верхнего - $A_1B_1C_1D_1$. Тогда AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 - боковые рёбра, AC - диагональ основания, а AC_1 - пространственная диагональ. Такое чтение сразу показывает, какие точки лежат в одной грани. Например, AB_1 находится в прямоугольнике ABB_1A_1 , поэтому его можно найти по двумерной теореме Пифагора. Отрезок AC_1 уже не принадлежит этой грани: для него нужен треугольник ACC_1 или общая формула пространственной диагонали. Если ученик проговаривает плоскость, в которой лежит выбранный треугольник, риск использовать несуществующий прямой угол резко уменьшается.

Отметка прямого угла на пространственном чертеже относится только к названным лучам. Из того, что высота перпендикулярна плоскости основания, следует её перпендикулярность любой прямой основания, проходящей через основание высоты. Но обратный перенос свойств делать нельзя: два ребра, которые выглядят перпендикулярными на рисунке, не становятся такими без условия. Контрольный приём состоит из трёх вопросов: где лежит первый отрезок, где лежит второй и какое свойство гарантирует угол между ними. Этот короткий устный разбор особенно важен в пирамидах, где боковое ребро, апофема и высота внешне похожи, но участвуют в разных прямоугольных треугольниках.

$$V = S_{\text{осн}} h$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$

Ключевые правила

- Не измеряйте отрезки по рисунку и не доверяйте визуальному масштабу.
- Сначала назовите основание и высоту, затем выбирайте формулу.
- Любую пространственную задачу старайтесь свести к одной знакомой плоской фигуре.
- Перед записью ответа проверьте размерность: длина, площадь или объём.

03. Прямоугольный параллелепипед и куб

Прямоугольный параллелепипед имеет шесть прямоугольных граней. Три измерения обычно обозначают a , b и c . Объём равен произведению трёх измерений. Полная поверхность состоит из двух граней каждого типа: двух прямоугольников $a \times b$, двух $b \times c$ и двух $a \times c$. Поэтому в формуле площади обязательно появляется множитель 2.

Диагональ грани находят по теореме Пифагора. Например, диагональ прямоугольника со сторонами a и b равна $\sqrt{a^2 + b^2}$. Пространственная диагональ соединяет противоположные вершины тела. Сначала можно найти диагональ основания, а затем применить теорему Пифагора ещё раз с высотой. После объединения получается одна короткая формула.

Куб - частный случай параллелепипеда, у которого все рёбра равны a . Поэтому $V = a^3$, $S_{\text{полн}} = 6a^2$, диагональ грани равна $a\sqrt{2}$, а пространственная диагональ - $a\sqrt{3}$. Эти формулы полезно

не заучивать изолированно, а каждый раз видеть как следствия объёма, суммы шести квадратов и теоремы Пифагора.

Проверка здравого смысла: пространственная диагональ должна быть длиннее любого ребра и любой диагонали грани. Объём куба с ребром больше 1 должен численно превышать площадь одной его грани. Если из площади поверхности куба найдено a^2 , нельзя сразу объявлять это длиной ребра - необходимо извлечь положительный корень.

Формулу площади поверхности параллелепипеда удобно восстанавливать не по памяти, а по парам граней. Грани $a \times b$ дают $2ab$, грани $b \times c$ - $2bc$, грани $a \times c$ - $2ac$. Сумма равна $2(ab + bc + ac)$. Такой вывод помогает и в нестандартной формулировке: если коробка открыта сверху, из полной площади нужно убрать ровно одну грань соответствующего размера, а не делить результат на два. Если окрашены только четыре боковые грани, остаётся $2c(a + b)$. Полезно перед вычислением составить маленький список покрываемых граней; он надёжнее, чем попытка вспомнить отдельную формулу для каждой упаковки.

Обратные задачи проверяют понимание сильнее прямой подстановки. Если известны объём V и два ребра a, b , третье ребро равно $c = \frac{V}{ab}$. Если дана полная поверхность куба, сначала находят $a^2 = \frac{S}{6}$, затем положительное a и только после этого объём a^3 . Нельзя заменять эти три действия одним неясным извлечением корня. Независимая проверка выполняется обратной подстановкой: найденные размеры должны точно вернуть исходный объём или площадь. Для пространственной диагонали полезна ещё одна оценка: d больше наибольшего ребра, но меньше суммы трёх рёбер; значение вне этого диапазона невозможно.

$$V = abc$$

$$S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ac)$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$d_{\text{куба}} = a\sqrt{3}$$

Ключевые правила

- В формуле полной поверхности учитывайте все шесть граней.
- Для пространственной диагонали складываются квадраты трёх измерений.
- Ребро куба - положительная величина, поэтому из $a^2 = k$ берут $a = \sqrt{k}$.

Разбор 1. Пространственная диагональ

УСЛОВИЕ

Рёбра прямоугольного параллелепипеда равны 3, 4 и 12. Найдите пространственную диагональ.

1. Диагональ основания с катетами 3 и 4 равна $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
2. Пространственная диагональ, диагональ основания и высота 12 образуют прямоугольный треугольник.
3. По теореме Пифагора $d = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$.
4. Проверка: 13 больше каждого ребра и больше диагонали основания 5.

ОТВЕТ.

13

Близкий аналог для самостоятельной работы

Рёбра прямоугольного параллелепипеда равны 6, 8 и 24. Найдите пространственную диагональ.

Диагональ прямоугольного параллелепипеда

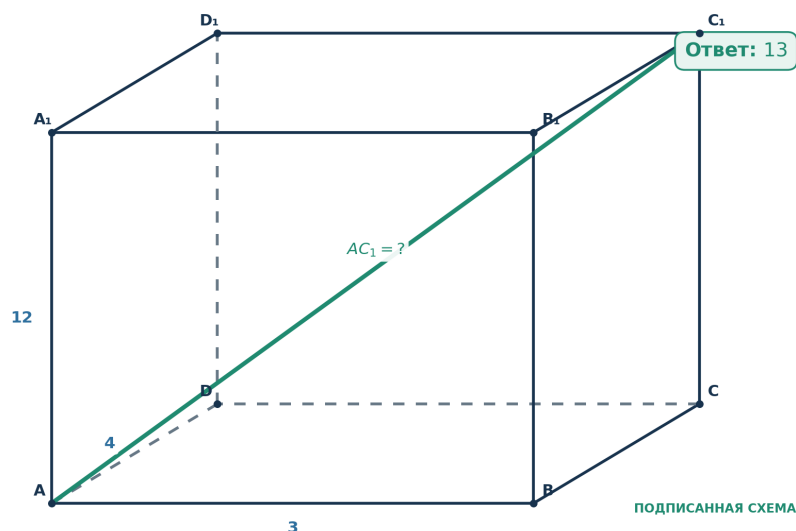


Figure 1: Разбор 1. Пространственная диагональ

Диагональ основания равна $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Получаем $d = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{676}$.

Положительная длина равна 26.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

26

04. Прямая призма: одна формула для разных оснований

Призма имеет два равных параллельных основания. Боковые грани прямой призмы - прямоугольники, а боковые рёбра перпендикулярны основаниям и равны высоте. Основанием может быть треугольник, четырёхугольник или другой многоугольник, но формула объёма не меняется: площадь основания умножается на высоту призмы.

Главная трудность короткой задачи - правильно найти площадь основания. Если основание является прямоугольным треугольником с катетами a и b , его площадь равна $\frac{ab}{2}$. Если дан равносторонний треугольник, используют $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Если площадь основания уже указана в условии, не нужно заново искать стороны: подставьте готовую величину.

Боковая поверхность прямой призмы складывается из прямоугольников. Их общая ширина равна периметру основания, а общая высота - высоте призмы. Поэтому $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} h$. Для полной поверхности к боковой площади добавляют две площади основания.

На рисунке боковое ребро может быть наклонено из-за перспективы. В прямой призме оно всё равно является высотой. У наклонной призмы это неверно, но в коротких стандартных задачах вид тела обычно назван явно. Слово «прямая» - математическое условие, а не декоративное описание.

Для треугольной призмы название треугольника основания не всегда сразу даёт его площадь. У прямоугольного треугольника нужны катеты, у равностороннего - сторона, у произвольного можно использовать сторону и проведённую к ней высоту. Если в условии перечислены три стороны, сначала выясните, не образуют ли они прямоугольный треугольник: для набора 5, 12, 13 площадь быстро находится по катетам. В другой ситуации может понадобиться формула Герона, но для первой части экзамена данные обычно позволяют более короткий путь. Важный принцип: формула объёма призмы проста, а основная работа скрыта в корректном вычислении площади основания.

Для боковой поверхности прямой призмы можно мысленно разрезать развёртку вдоль одного

бокового ребра. Получится полоса прямоугольников одной высоты h ; сумма их ширин равна периметру основания. Поэтому $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} h$ справедлива для треугольного, четырёхугольного и любого другого многоугольного основания. Но эта логика не переносится без изменений на наклонную призму: её боковые грани - параллелограммы, а боковое ребро не является высотой. Если в условии сказано «прямая призма», это разрешает использовать боковое ребро как высоту; если слово отсутствует, нужно опираться на дополнительные сведения.

$$V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн}} h$$

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} h$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} a h_a$$

Ключевые правила

- В объёме призмы используется площадь одного основания.
- В полной поверхности оснований два.
- Для прямой призмы боковая площадь равна периметру основания, умноженному на высоту.

Разбор 2. Объём треугольной призмы

УСЛОВИЕ

Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Высота призмы равна 15. Найдите объём.

Прямая треугольная призма

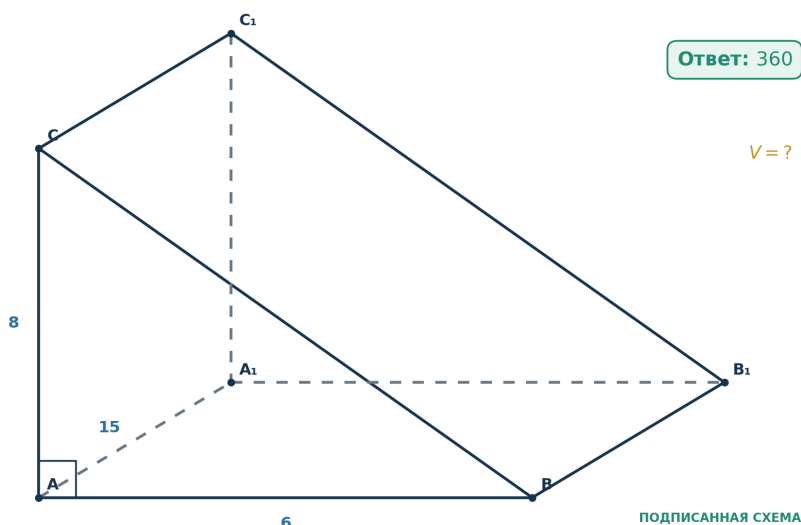


Figure 2: Разбор 2. Объём треугольной призмы

1. Площадь основания: $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.
2. Для прямой призмы $V = S_{\text{осн}} h$.
3. Подставляем: $V = 24 \cdot 15 = 360$.
4. Проверка размерности: площадь основания умножена на длину, поэтому получены кубические единицы.

ОТВЕТ.

360

Близкий аналог для самостоятельной работы

Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12, высота призмы 7. Найдите объём.

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30.$$

$$V = 30 \cdot 7.$$

$$V = 210.$$

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

210

05. Пирамида: почему появляется множитель одна треть

Пирамида имеет одно основание и вершину, не лежащую в плоскости основания. Её высота - перпендикуляр из вершины к плоскости основания. Высота не обязана совпадать с боковым ребром. В правильной пирамиде основание является правильным многоугольником, а высота проходит через его центр.

Объём пирамиды в три раза меньше объёма призмы с теми же основанием и высотой. Поэтому $V = \frac{S_{\text{осн}} h}{3}$. Именно множитель $\frac{1}{3}$ чаще всего теряют в коротких вычислениях. Полезная проверка: если из трёх одинаковых по основанию и высоте пирамид можно сложить призму, каждая занимает треть объёма.

Апофема правильной пирамиды - высота боковой грани. Для правильной четырёхугольной пирамиды она соединяет вершину пирамиды с серединой стороны квадрата. Апофема, высота пирамиды и расстояние от центра основания до середины стороны образуют прямоугольный треугольник. Если сторона квадрата равна a , это расстояние равно $\frac{a}{2}$.

Боковая поверхность правильной пирамиды состоит из равных треугольников. Сумма их оснований равна периметру основания, а общая высота каждого треугольника - апофема l . Отсюда $S_{\text{бок}} = \frac{P_{\text{осн}} l}{2}$. Для полной поверхности добавляют площадь единственного основания, а не двух.

У правильной четырёхугольной пирамиды есть три характерные наклонные длины. Высота SO идёт к центру квадрата. Апофема SM идёт к середине стороны, поэтому в треугольнике SOM катет $OM = \frac{a}{2}$. Боковое ребро SA идёт к вершине основания, и в треугольнике SOA катет OA

равен половине диагонали квадрата, то есть $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Отсюда апофема и боковое ребро находятся по разным формулам. Перед теоремой Пифагора полезно назвать конечную точку наклонного отрезка: середина стороны означает апофему, вершина квадрата - боковое ребро. Именно эта деталь устраняет типичную подстановку $\frac{a}{2}$ вместо $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Площадь боковой поверхности можно проверить двумя способами. Первый - формула через периметр и апофему. Второй - площадь одной боковой грани умножить на число граней. Для квадратной пирамиды одна грань имеет основание a и высоту l , поэтому четыре грани дают $\frac{4 \cdot al}{2} = 2al$; формула через периметр даёт $\frac{Pl}{2} = \frac{4al}{2} = 2al$. Совпадение двух вычислений подтверждает, что апофема выбрана верно. В полной поверхности добавляется квадрат основания. Если ответ меньше боковой площади или равен ей при ненулевом основании, значит основание потеряно.

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$$

$$l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} l$$

Ключевые правила

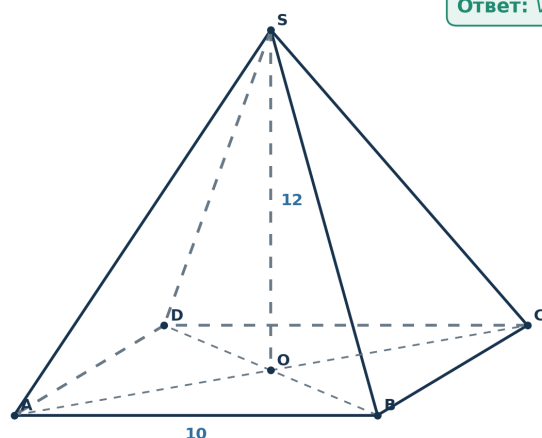
- Высота пирамиды перпендикулярна плоскости основания; боковое ребро обычно наклонно.
- В формуле объёма пирамиды обязателен множитель $\frac{1}{3}$.
- У пирамиды одно основание.
- Апофема относится к боковой грани, а высота - ко всему телу.

Разбор 3. Правильная квадратная пирамида

УСЛОВИЕ

В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 10, высота равна 12. Найдите объём и апофему.

Высота и апофема квадратной пирамиды



Ответ: $V = 400$, $l = 13$

$V, l = ?$

ПОДПИСАННАЯ СХЕМА

Figure 3: Разбор 3. Правильная квадратная пирамида

1. Основание - квадрат: $S_{\text{осн}} = 10^2 = 100$.
2. Объём: $V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400$.
3. Расстояние от центра квадрата до середины его стороны равно $\frac{10}{2} = 5$.
4. Апофема - гипотенуза: $l = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.
5. Проверка: апофема 13 длиннее высоты 12.

ОТВЕТ.

$$V = 400, l = 13$$

Близкий аналог для самостоятельной работы

Сторона основания правильной квадратной пирамиды равна 6, высота 4. Найдите объём и апофему.

$$S_{\text{осн}} = 36.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48.$$

$$l = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

$$V = 48, l = 5$$

06. Цилиндр: круг переносится вдоль высоты

Прямой круговой цилиндр можно представить как круг, перенесённый параллельно самому себе на высоту h . Основания - два равных круга радиуса r . Поэтому объём равен площади

круга, умноженной на высоту: $V = \pi r^2 h$.

Если мысленно разрезать боковую поверхность по образующей и развернуть её, получится прямоугольник. Одна его сторона равна высоте h , другая - длине окружности $2\pi r$. Поэтому боковая площадь равна $2\pi r h$. Полная поверхность содержит боковой прямоугольник и два круга: $2\pi r h + 2\pi r^2$.

Осевое сечение цилиндра проходит через ось. Оно является прямоугольником со сторонами $2r$ и h . Это позволяет переводить пространственный вопрос в обычную планиметрию: диагональ осевого сечения находится по теореме Пифагора, а его площадь равна $2rh$.

Радиус и диаметр нельзя подменять друг другом. Если дан диаметр d , сначала запишите $r = \frac{d}{2}$. В формулах площади и объёма радиус возводится в квадрат, поэтому ошибка в два раза превращается в ошибку в четыре раза.

Осевое сечение цилиндра - один из самых полезных переводов из пространства в плоскость. Его ширина равна диаметру $2r$, высота совпадает с высотой цилиндра, а диагональ равна $\sqrt{(2r)^2 + h^2}$. Если осевое сечение является квадратом, то $h = 2r$. Если его диагональ и одна сторона известны, вторую находят по Пифагору, после чего возвращаются к объёму или площади цилиндра. Важно не спутать площадь осевого сечения $2rh$ с боковой площадью $2\pi r h$: первая относится к плоскому прямоугольнику внутри тела, вторая - к изогнутой поверхности с длиной окружности $2\pi r$.

Развёртка даёт также практическую проверку. Для этикетки, закрывающей только боковую поверхность банки, нужен прямоугольник высоты h и длины $2\pi r$. Для изготовления закрытой банки добавляют два круга, а для открытого стакана - один. Если есть нахлёст или припуск, его учитывают после вычисления геометрической площади. В экзаменационной задаче такие слова определяют модель не меньше, чем числа. Сначала перечислите реально покрываемые части, затем сложите их площади; это предотвращает автоматическое использование полной поверхности там, где требуется только боковая.

$$V = \pi r^2 h$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h$$

$$S_{\text{полн}} = 2\pi r(r + h)$$

Ключевые правила

- В объёме цилиндра радиус возводится в квадрат.
- Боковая развёртка - прямоугольник $2\pi r \times h$.
- В полной поверхности учитываются два основания.

Разбор 4. Цилиндр без путаницы площадей

УСЛОВИЕ

Радиус цилиндра равен 4, высота 9. Найдите объём и полную площадь поверхности.

1. Объём: $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 9 = 144\pi$.
2. Боковая площадь: $S_{\text{бок}} = 2\pi r h = 2\pi \cdot 4 \cdot 9 = 72\pi$.
3. Площади двух оснований: $2\pi r^2 = 2\pi \cdot 16 = 32\pi$.
4. Полная площадь: $S_{\text{полн}} = 72\pi + 32\pi = 104\pi$.
5. Проверка: полная площадь больше боковой площади.

ОТВЕТ.

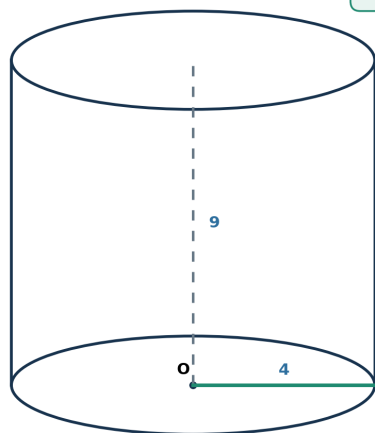
$$V = 144\pi, S_{\text{полн}} = 104\pi$$

Близкий аналог для самостоятельной работы

Радиус цилиндра равен 3, высота 8. Найдите объём и полную площадь поверхности.

Цилиндр: объём и полная поверхность

Ответ: $V = 144\pi$, $S = 104\pi$



$V, S = ?$

ПОДПИСАННАЯ СХЕМА

Figure 4: Разбор 4. Цилиндр без путаницы площадей

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi.$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot 3 \cdot 8 = 48\pi.$$

$$S_{\text{полн}} = 48\pi + 2\pi \cdot 9 = 66\pi.$$

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

$$V = 72\pi, S_{\text{полн}} = 66\pi$$

07. Конус: радиус, высота и образующая

Конус имеет круглое основание и вершину. Высота соединяет вершину с центром основания и перпендикулярна основанию. Образующая соединяет вершину с точкой окружности основания. В прямом конусе радиус r , высота h и образующая l образуют прямоугольный треугольник.

Объём конуса равен трети объёма цилиндра с теми же основанием и высотой: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Смысл множителя $\frac{1}{3}$ тот же, что у пирамиды. Это полезная пара: призма и цилиндр имеют коэффициент 1, пирамида и конус - коэффициент $\frac{1}{3}$.

Боковая поверхность конуса при развёртке становится сектором круга радиуса l . Её площадь равна $\pi r l$. Полная поверхность состоит из этого сектора и одного круга основания: $\pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$.

Осевое сечение конуса - равнобедренный треугольник с основанием $2r$, высотой h и боковыми сторонами l . Поэтому многие задачи удобно решать в этом треугольнике. Проверка: образующая должна быть длиннее и радиуса, и высоты, потому что она является гипотенузой.

Осевое сечение прямого конуса - равнобедренный треугольник. Его основание равно $2r$, высота - h , боковые стороны - образующие l . Проведённая к основанию высота делит треугольник пополам, поэтому возникает прямоугольный треугольник с катетами r и h . Это объясняет формулу $l^2 = r^2 + h^2$ и одновременно показывает, почему в ней стоит радиус, а не диаметр.

Если в условии дана площадь осевого сечения, она равна $\frac{(2r)h}{2} = rh$. Получив произведение rh , нельзя автоматически восстановить каждый множитель: для этого требуется ещё одно независимое условие.

Развёртка боковой поверхности конуса - сектор радиуса l . Длина его дуги равна длине окружности основания $2\pi r$. Поэтому доля полного круга в секторе равна $\frac{r}{l}$, а площадь сектора - $(\frac{r}{l}) \cdot \pi l^2 = \pi r l$. Этот вывод полезен, потому что связывает формулу с картинкой и не позволяет заменить образующую высотой. При полной поверхности к сектору добавляют

один круг πr^2 . Проверка по величинам: $l > r$, значит боковая площадь $\pi r l$ больше площади основания πr^2 у любого невырожденного прямого конуса.

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$S_{\text{бок}} = \pi r l$$

$$S_{\text{полн}} = \pi r(l + r)$$

Ключевые правила

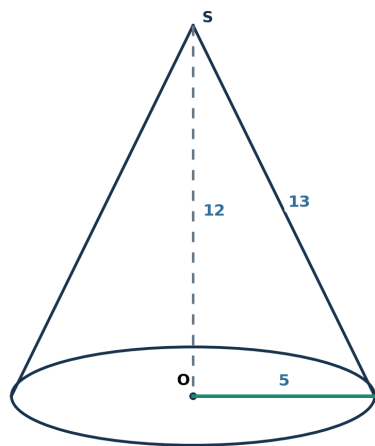
- В прямом конусе $l^2 = r^2 + h^2$.
- В объёме конуса есть множитель $\frac{1}{3}$.
- У конуса одно основание, поэтому в полной поверхности добавляется один круг.

Разбор 5. Конус и треугольник 5-12-13

УСЛОВИЕ

Радиус основания конуса равен 5, высота 12. Найдите образующую, объём и площадь боковой поверхности.

Осевое сечение конуса



Ответ: $l = 13$, $V = 100\pi$

$V, S = ?$

ПОДПИСАННАЯ СХЕМА

Figure 5: Разбор 5. Конус и треугольник 5-12-13

1. В осевом сечении r , h и l образуют прямоугольный треугольник.
2. $l = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.
3. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot 12 = 100\pi$.
4. $S_{\text{бок}} = \pi r l = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi$.
5. Проверка: образующая 13 длиннее радиуса и высоты.

ОТВЕТ.

$l = 13$, $V = 100\pi$, $S_{\text{бок}} = 65\pi$

Близкий аналог для самостоятельной работы

Радиус конуса равен 3, высота 4. Найдите образующую, объём и боковую площадь.

$$l = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi.$$

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi.$$

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

$$l = 5, V = 12\pi, S_{\text{бок}} = 15\pi$$

08. Шар и сфера: различаем поверхность и тело

Сфера - поверхность, все точки которой находятся на одинаковом расстоянии r от центра. Шар - тело, ограниченное этой сферой. Поэтому говорят о площади сферы и объёме шара. В школьных задачах слова иногда употребляют рядом, но формулы относятся к разным величинам.

Площадь сферы равна $4\pi r^2$, а объём шара - $\frac{4\pi r^3}{3}$. Радиус входит во вторую или третью степень, поэтому сначала особенно важно перевести диаметр в радиус. Если диаметр равен d , то $r = \frac{d}{2}$.

Любое сечение шара плоскостью является кругом. Наибольший круг получается, когда плоскость проходит через центр; его называют большим кругом. Радиус большого круга равен радиусу шара. Если плоскость находится на расстоянии a от центра, радиус сечения ρ находят из прямоугольного треугольника: $\rho^2 + a^2 = r^2$.

Проверка размерности особенно полезна. В площади степень радиуса равна 2, в объёме - 3. Если радиус увеличили в два раза, площадь возрастает в четыре раза, а объём - в восемь. Эта связь помогает быстро проверить результат без повторного вычисления.

Сечение шара удобно представлять через прямоугольный треугольник. Пусть O - центр шара, H - проекция центра на секущую плоскость, а A - точка окружности сечения. Тогда OH перпендикулярен плоскости, поэтому треугольник OHA прямоугольный: $OA = r$, $OH = a$, $HA = \rho$. Получается $\rho = \sqrt{r^2 - a^2}$. Чем дальше плоскость от центра, тем меньше круг сечения; при $a = 0$ возникает большой круг радиуса r , а при $a = r$ сечение вырождается в точку. Эти предельные случаи служат быстрой проверкой формулы.

Масштабная проверка для шара особенно сильна. При увеличении радиуса в 2 раза площадь сферы умножается на $2^2 = 4$, а объём шара - на $2^3 = 8$. Если известны отношения площадей или объёмов, сначала извлекают соответственно квадратный или кубический корень, чтобы получить отношение радиусов. Например, отношение объёмов 27 означает отношение радиусов 3, а не 27. Такая обратная логика часто заменяет громоздкую подстановку формул с π , которое всё равно сократится.

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi r^2$$

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\rho = \sqrt{r^2 - a^2}$$

Ключевые правила

- Площадь относится к сфере, объём - к шару.
- Диаметр вдвое больше радиуса.
- При изменении масштаба в k раз площадь меняется в k^2 раз, объём - в k^3 раз.

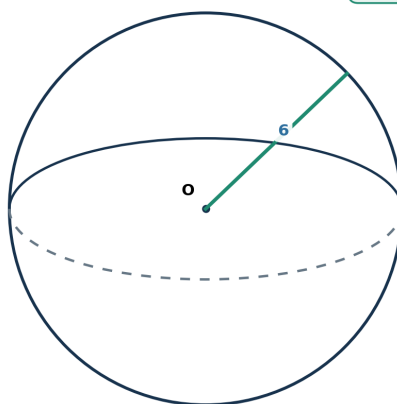
Разбор 6. Шар: площадь и объём

УСЛОВИЕ

Радиус шара равен 6. Найдите площадь сферы и объём шара.

Радиус шара и большой круг

Ответ: $S = 144\pi$, $V = 288\pi$



$S, V = ?$

ПОДПИСАННАЯ СХЕМА

Figure 6: Разбор 6. Шар: площадь и объём

1. $S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi$.
2. $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3$.
3. $6^3 = 216$, поэтому $V = \frac{4}{3} \cdot 216\pi = 288\pi$.
4. Проверка: в площади степень радиуса равна 2, в объёме - 3.

ОТВЕТ.

$$S = 144\pi, V = 288\pi$$

Близкий аналог для самостоятельной работы

Диаметр шара равен 10. Найдите площадь сферы и объём шара.

Радиус равен 5.

$$S = 4\pi \cdot 25 = 100\pi.$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 125 = \frac{500\pi}{3}.$$

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

$$S = 100\pi, V = \frac{500\pi}{3}$$

09. Комбинации тел и перевод в плоскую модель

В короткой задаче тело может быть вписано в другое тело или составлено из нескольких частей. Не начинайте с редкой готовой формулы. Нарисуйте осевое или диагональное сечение и назовите отношения в нём. Вписанный шар в куб касается всех граней, поэтому диаметр шара равен ребру куба. Цилиндр, вписанный в прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием, имеет диаметр, равный стороне квадрата.

Если сосуд состоит из цилиндра и полушара, общий объём равен сумме объёмов частей. Если из тела вырезали отверстие, объём отверстия вычитают. При сложении и вычитании сначала убедитесь, что все размеры даны в одних единицах и формулы описывают неперекрывающиеся части.

Плоская модель должна содержать искомое и достаточное количество данных. Для диагонали параллелепипеда нужна диагональ основания и высота. Для образующей конуса - радиус и высота. Для апофемы квадратной пирамиды - высота и половина стороны основания. Лишние рёбра пространственного рисунка после этого можно мысленно убрать.

Если условие предлагает отношение объёмов подобных тел, вычислять каждый объём отдельно не обязательно. При коэффициенте подобия k объёмы относятся как k^3 , площади - как k^2 .

Однако для начинающего ученика безопасно сначала явно назвать, какая линейная величина увеличена в k раз.

При составном теле важно проверить, действительно ли части не перекрываются. Цилиндр с полушаровой крышкой складывается по объёмам, потому что их внутренние области соприкасаются только по кругу. Шар, вписанный в цилиндр, нельзя прибавлять к объёму цилиндра: он уже находится внутри. Если требуется объём пространства вне шара, но внутри цилиндра, используют разность. Полезно словами закончить формулу: «объём сосуда минус объём вставки» или «объём нижней части плюс объём крышки». Смысловая подпись позволяет заметить неверный знак до вычислений.

Во вписанных конфигурациях равенства размеров выводятся из точек касания. Шар, вписанный в куб, касается двух противоположных граней, поэтому расстояние между ними равно диаметру шара. Конус, вписанный в цилиндр с общими основанием и высотой, имеет тот же радиус и высоту, поэтому его объём втрое меньше. Цилиндр, вписанный в прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием, имеет диаметр, равный стороне квадрата. Эти связи лучше отметить на плоском осевом сечении, где касания становятся обычными касаниями окружности со сторонами прямоугольника.

$$V_{\text{составного}} = V_1 + V_2 - V_{\text{выреза}}$$

$$\frac{S_2}{S_1} = k^2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = k^3$$

Ключевые правила

- Составное тело разбивайте на неперекрывающиеся стандартные части.
- Вписывание переводите в равенства радиуса, диаметра, ребра или высоты.
- Для подобных тел различайте коэффициенты изменения длины, площади и объёма.

10. Единицы, развёртки и практический смысл

Литр связан с кубическими единицами: 1 л равен 1 дм³, а 1 мл равен 1 см³. Если размеры сосуда даны в сантиметрах, объём сначала получается в кубических сантиметрах. Для перевода в литры результат делят на 1000. Перевод линейных единиц нельзя выполнять после возведения в квадрат или куб без учёта степени.

Развёртка помогает понять площадь поверхности. У прямоугольного параллелепипеда это шесть прямоугольников, у призмы - два основания и полоса боковых прямоугольников, у цилиндра - два круга и прямоугольник. У конуса боковая поверхность является сектором, а у шара обычной плоской развёртки без искажения нет.

В практической задаче площадь поверхности может означать количество материала, а объём - вместимость. Если коробка открыта сверху, одна грань отсутствует, и формулу полной поверхности использовать нельзя. Если окрашивают только боковую поверхность цилиндра, круги оснований не учитываются. Слова «полная», «боковая», «без крышки» и «снаружи» определяют состав вычисляемой площади.

Оценка результата защищает от грубых ошибок. Объём коробки $3 \times 4 \times 5$ не может быть меньше 5. Объём конуса с теми же основанием и высотой, что у цилиндра, должен быть втрое меньше. Полная поверхность цилиндра всегда больше площади двух оснований и больше боковой площади по отдельности.

Перевод единиц выполняют до подстановки. Если радиус дан в сантиметрах, а высота в метрах, сначала приводят обе длины к одной единице; иначе произведение $\pi r^2 h$ не имеет понятной размерности. Для площади коэффициент перевода возводится в квадрат: $1 \text{ м}^2 = 10\,000 \text{ см}^2$. Для объёма - в куб: $1 \text{ м}^3 = 1\,000\,000 \text{ см}^3$. Ошибка «в одном метре сто сантиметров, значит в

кубическом метре сто кубических сантиметров» неверна именно потому, что масштаб действует по трём независимым направлениям.

В задачах на вместимость полезно различать геометрический объём и фактически налитое количество. Если сосуд заполнен на 80 процентов, сначала находят полный объём, затем умножают на 0,8. Если после этого часть жидкости перелили, операция выполняется в указанном порядке. Площадь материала также может отличаться от площади поверхности из-за отверстий, крышки или дна. Поэтому рядом с каждой формулой кратко подпишите объект: «внутренний объём», «боковая этикетка», «дно», «крышка». Это превращает набор формул в осмысленную модель.

$$1 \text{ л} = 1 \text{ дм}^3 = 1000 \text{ см}^3$$

$$1 \text{ м}^3 = 1000 \text{ л}$$

Ключевые правила

- $1 \text{ л} = 1 \text{ дм}^3 = 1000 \text{ см}^3$.
- Формулу площади выбирают по реально покрываемым частям поверхности.
- После вычисления сравните ответ с простой нижней или верхней оценкой.

11. Универсальный алгоритм короткой задачи

Шаг 1. Назовите тело и выпишите только данные из условия. Шаг 2. Определите, что требуется найти: длину, площадь или объём. Шаг 3. Подчеркните основание, высоту, радиус, диаметр или образующую. Шаг 4. Выберите плоское сечение, если нужна неизвестная длина. Шаг 5. Запишите общую формулу до подстановки чисел.

Шаг 6. Подставьте числа вместе с единицами, но вычисляйте отдельно. Шаг 7. Проверьте положительность, порядок величин и размерность. Шаг 8. Запишите краткий ответ в требуемом формате. Такой порядок кажется длинным только в начале; после тренировки он занимает несколько секунд и предотвращает типичные потери балла.

Если вы не помните формулу, восстановите её из смысла. У призмы и цилиндра одинаковая логика: площадь основания умножается на высоту. У пирамиды и конуса появляется одна треть. Боковая поверхность прямой призмы - периметр основания на высоту; цилиндра - длина окружности на высоту.

Если вычисления получаются громоздкими, остановитесь и проверьте модель. Короткое задание первой части обычно рассчитано на несколько прозрачных действий. Длинное выражение часто означает, что радиус перепутан с диаметром, дважды учтено основание или вместо готовой площади основания заново вычисляются лишние элементы.

Полезная финальная запись короткой задачи состоит из четырёх строк: модель, формула, подстановка, ответ с единицами. Если требуется промежуточная длина, добавляется отдельный плоский треугольник и ссылка на теорему Пифагора. Такая структура достаточна для проверки и не перегружена рассуждениями. Даже когда экзамен просит только число, черновая запись должна сохранять названия величин: иначе легко подставить площадь основания вместо периметра или высоту вместо образующей.

Самопроверка выполняется независимо от основного пути. Для прямой задачи можно сделать оценку порядка величины; для обратной - подставить найденное значение обратно; для площади поверхности - перечислить грани; для диагонали - сравнить с рёбрами; для подобия - проверить степень коэффициента. Если оба способа повторяют одну и ту же ошибочную формулу, проверка бесполезна. Именно поэтому независимый контроль выбирают другого типа: смысловой, размерностный, геометрический или обратной подстановкой.

тело → основание и высота → формула → проверка

Ключевые правила

- Сначала общая формула, потом числа.
- Одна задача - одна главная модель и, при необходимости, один прямоугольный треугольник.
- Проверка ответа входит в решение, а не выполняется только при наличии времени.

12. Типичные ошибки и способы самопроверки

- Считать длины по перспективному рисунку вместо использования условия.
- Принимать боковое ребро пирамиды или наклонную образующую за высоту.
- Забывать множитель $\frac{1}{3}$ в объёме пирамиды или конуса.
- Добавлять два основания к полной поверхности пирамиды или конуса, хотя основание одно.
- Подставлять диаметр вместо радиуса в формулы с r^2 и r^3 .
- Путать площадь боковой и полной поверхности.
- Использовать апофему пирамиды как её вертикальную высоту.
- Записывать квадратные единицы для объёма или кубические единицы для площади.
- Не проверять, что диагональ или образующая длиннее соответствующих катетов.

13. Дополнительные разборы

Разбор 7. Шар, вписанный в цилиндр

УСЛОВИЕ

Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 30. Найдите площадь поверхности шара.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО. Для вписанного шара радиус цилиндра равен R , а высота цилиндра равна $2R$.

ДО РЕШЕНИЯ. Нужно сравнить две площади через одну и ту же величину πR^2 .

1. Записываем размеры

$$r = R, \quad h = 2R$$

Шар касается обеих оснований и боковой поверхности цилиндра.

2. Выражаем поверхность цилиндра

$$S_{\text{цил}} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 6\pi R^2$$

Складываем два основания и боковую поверхность.

3. Находим πR^2

$$6\pi R^2 = 30 \Rightarrow \pi R^2 = 5$$

Удобно не вычислять R отдельно.

4. Находим поверхность шара

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2 = 20$$

Подставляем найденное значение πR^2 .

Проверка. Отношение площадей шара и цилиндра равно $4/6=2/3$; $30 \cdot 2/3=20$.

Типичная ошибка. Взять высоту цилиндра равной R , а не диаметру шара $2R$.

ОТВЕТ. 20

Разбор 8. Цилиндр в прямоугольном параллелепипеде

УСЛОВИЕ

Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания и высота цилиндра равны 2. Найдите объём параллелепипеда.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО. Основание вписанного цилиндра касается четырёх сторон прямоугольника, поэтому это квадрат со стороной, равной диаметру.

ДО РЕШЕНИЯ. Диаметр цилиндра равен 4, высота параллелепипеда совпадает с высотой цилиндра.

1. Находим сторону основания

$$a = 2r = 4$$

Окружность радиуса 2 вписана в квадрат основания.

2. Находим площадь основания

$$S_{\text{осн}} = 4^2 = 16$$

Основание параллелепипеда - квадрат.

3. Умножаем на высоту

$$V = 16 \cdot 2 = 32$$

Объём прямоугольного параллелепипеда равен площади основания, умноженной на высоту.

Проверка. Размеры коробки $4 \times 4 \times 2$, поэтому объём 32.

Типичная ошибка. Использовать площадь круга πr^2 вместо площади квадратного основания коробки.

ОТВЕТ. 32