

Урок 11. Ответы и решения

Условия, ответы и пошаговые решения всех 40 заданий.

01. Начальный уровень: задания 1-20

Задание 1

Найдите значение производной функции в точке $x = 3$.

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

Ответ: 6

Задание 2

Найдите $f'(2)$.

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$$

Ответ: 12

Задание 3

Найдите производную функции.

$$f(x) = 5x - 7$$

$$f'(x) = 5$$

Ответ: 5

Задание 4

Чему равна производная постоянной функции?

$$f(x) = 9$$

Постоянная функция не меняется, поэтому скорость изменения равна нулю.

$$f'(x) = 0$$

Ответ: 0

Задание 5

Найдите $f'(1)$.

$$f(x) = x^2 - 4x$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(1) = 2 - 4 = -2$$

Ответ: -2

Задание 6

Касательная проходит через точки $A(0; -1)$ и $B(2; 3)$. Найдите её коэффициент наклона.

$$k = \frac{3 - (-1)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2$$

Ответ: 2

Задание 7

Касательная образует с положительным направлением оси Ox угол 45° . Найдите её коэффициент наклона.

$$k = \tan 45^\circ = 1$$

Ответ: 1

Задание 8

Что делает функция на промежутке, если $f'(x) > 0$?

Положительная производная означает положительный наклон касательных.

Функция возрастает.

Ответ: возрастает

Задание 9

Что делает функция на промежутке, если $f'(x) < 0$?

Отрицательная производная означает отрицательный наклон касательных.

Функция убывает.

Ответ: убывает

Задание 10

Чему равна производная в точке, где касательная горизонтальна?

У горизонтальной прямой коэффициент наклона равен нулю.

$$f'(x_0) = 0$$

Ответ: 0

Задание 11

По рисунку найдите значение производной в точке $x_0 = 1$.

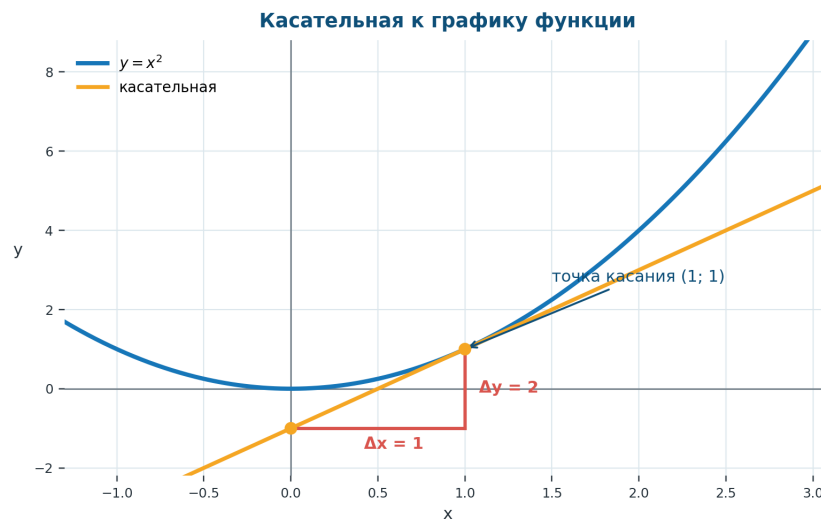


Рис. 1: Рисунок к заданию.

Берём две отмеченные точки касательной: $(0; -1)$ и $(1; 1)$.

$$f'(1) = k = \frac{1 - (-1)}{1 - 0} = 2$$

Ответ: 2

Задание 12

На рисунке дан график производной $f'(x) = x^2 - 4$. Найдите $f(0)$.

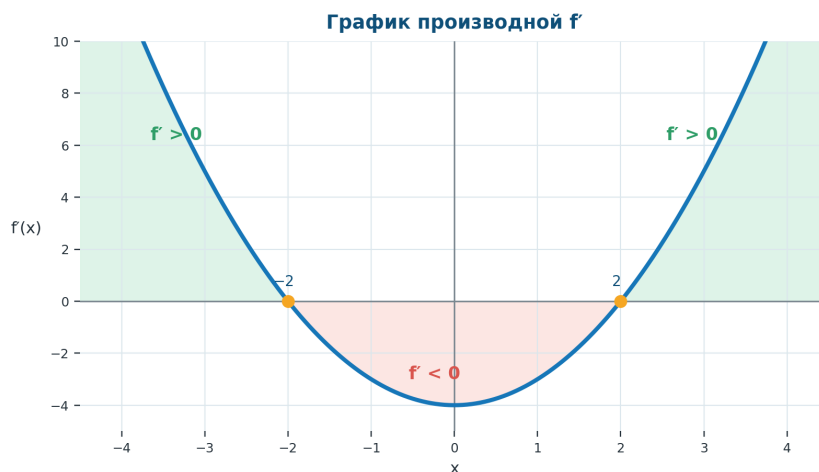


Рис. 2: Рисунок к заданию.

При $x = 0$ график имеет ординату -4 .

$$f'(0) = -4$$

Ответ: -4

Задание 13

Для каких x производная $f'(x) = x^2 - 4$ положительна?

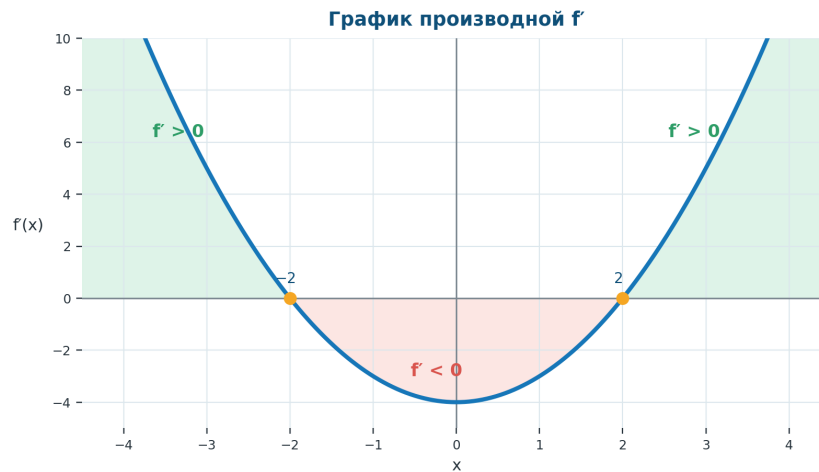


Рис. 3: Рисунок к заданию.

$$x^2 - 4 > 0$$

$$(x - 2)(x + 2) > 0$$

$$x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

Задание 14

Сколько нулей имеет производная?

$$f'(x) = x^2 - 4$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = -2 \text{ или } x = 2$$

Ответ: 2

Задание 15

Известно, что $f(2) = 5$ и $f'(2) = 3$. Запишите уравнение касательной.

$$y = 5 + 3(x - 2)$$

$$y = 3x - 1$$

Ответ: $y = 3x - 1$

Задание 16

Запишите уравнение касательной к графику $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 2$.

$$f(2) = 4, \quad f'(x) = 2x, \quad f'(2) = 4$$

$$y = 4 + 4(x - 2) = 4x - 4$$

Ответ: $y = 4x - 4$

Задание 17

Координата тела задана формулой $s(t) = t^2 + 2t$, где s - в метрах, t - в секундах. Найдите скорость в момент $t = 3$.

$$v(t) = s'(t) = 2t + 2$$

$$v(3) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$$

Ответ: 8 м/с

Повторение: функции и уравнения

Задание 18

Найдите $f(4)$.

$$f(x) = 2x - 3$$

$$f(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$$

Ответ: 5

Задание 19

Путь измеряется в километрах, время - в часах. В каких единицах измеряется производная пути по времени?

Делим единицы функции на единицы аргумента: километры на часы.

Ответ: км/ч

Повторение: функции и уравнения

Задание 20

Запишите область определения функции.

$$f(x) = \sqrt{5 - x}$$

$$5 - x \geq 0$$

$$x \leq 5$$

Ответ: $(-\infty; 5]$

02. Средний уровень: задания 21-35

Задание 21

Найдите $f'(1)$.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

$$f'(1) = 3 - 6 + 4 = 1$$

Ответ: 1

Задание 22

Найдите $f'(1)$.

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(1) = 4 - 4 = 0$$

Ответ: 0

Задание 23

Найдите $f'(2)$.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(2) = -\frac{1}{4}$$

Ответ: $-\frac{1}{4}$

Задание 24

Найдите $f'(4)$.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(4) = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$

Задание 25

Касательная проходит через точки $(-1; 2)$ и $(3; 10)$. Найдите значение производной в точке касания.

$$f'(x_0) = k = \frac{10 - 2}{3 - (-1)} = \frac{8}{4} = 2$$

Ответ: 2

Задание 26

Известно, что $f(1) = 2$ и $f'(1) = -3$. Запишите уравнение касательной.

$$y = 2 - 3(x - 1)$$

$$y = -3x + 5$$

Ответ: $y = -3x + 5$

Задание 27

Запишите уравнение касательной к $f(x) = x^2 + 1$ в точке $x_0 = -1$.

$$f(-1) = 2, \quad f'(x) = 2x, \quad f'(-1) = -2$$

$$y = 2 - 2(x + 1) = -2x$$

Ответ: $y = -2x$

Задание 28

Известно, что $f(x) = (x + 3)(x - 1)$. На каких промежутках функция возрастает?

Функция возрастает там, где производная положительна.

$$(x + 3)(x - 1) > 0$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$

Задание 29

На рисунке дан график f' . Сколько точек максимума имеет функция f ?

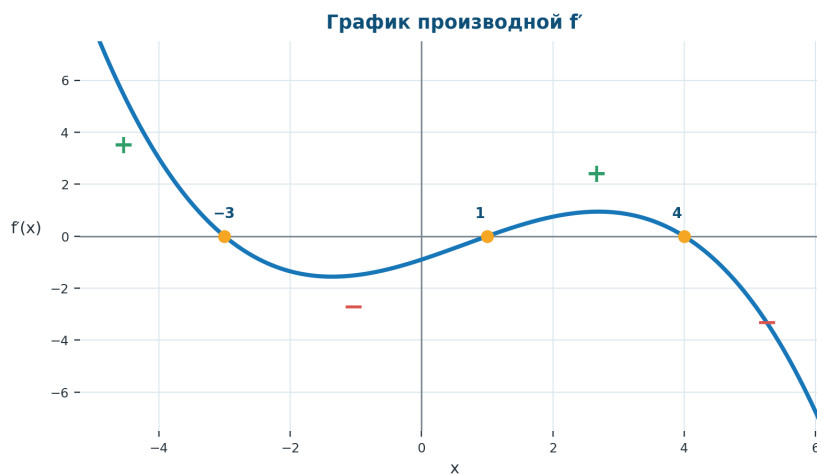


Рис. 4: Рисунок к заданию.

Максимум возникает при смене знака производной с «+» на «-». Это происходит при $x = -3$ и $x = 4$.

Ответ: 2

Задание 30

На рисунке дан график f' . Сколько точек минимума имеет функция f ?

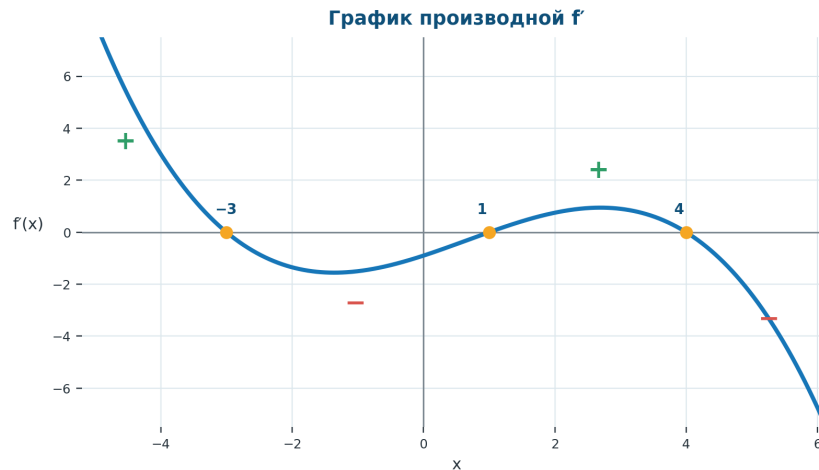


Рис. 5: Рисунок к заданию.

Минимум возникает при смене знака производной с «-» на «+». Это происходит только при $x = 1$.

Ответ: 1

Задание 31

Координата тела $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$. Найдите скорость при $t = 1$.

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

$$v(1) = 3 - 12 + 9 = 0$$

Ответ: 0 м/с

Задание 32

В какой точке графика $f(x) = x^2$ касательная параллельна прямой $y = 4x - 7$? Укажите абсциссу.

Параллельные прямые имеют одинаковый коэффициент наклона.

$$f'(x) = 2x = 4$$

$$x = 2$$

Ответ: 2

Повторение: функции и уравнения

Задание 33

Решите уравнение.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x = 2 \text{ или } x = 3$$

Ответ: 2; 3

Задание 34

Найдите $f(1)$.

$$f(x) = (2x - 1)^2$$

$$f'(x) = 2(2x - 1) \cdot 2 = 4(2x - 1)$$

$$f'(1) = 4$$

Ответ: 4

Повторение: функции и уравнения

Задание 35

Решите уравнение.

$$\log_2 x = 3$$

$$x = 2^3 = 8$$

Ответ: 8

03. Сложный уровень: задания 36-40**Задание 36**

Касательная к параболе $y = x^2$ проходит через точку $(0; -4)$. Найдите сумму возможных абсцисс точек касания.

Пусть абсцисса точки касания равна a . Касательная имеет вид $y = 2ax - a^2$.

$$-a^2 = -4$$

$$a = \pm 2$$

$$(-2) + 2 = 0$$

Ответ: 0

Задание 37

Найдите точки графика, в которых касательная горизонтальна.

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

$$x = -1 \text{ или } x = 1$$

$$f(-1) = 2, \quad f(1) = -2$$

Ответ: $(-1; 2)$, $(1; -2)$

Задание 38

Найдите критические точки функции.

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$x \neq 0, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 = 1, \quad x = \pm 1$$

Ответ: -1 ; 1

Задание 39

Найдите ординату точки пересечения касательной с осью Оу, если касательная проведена к $f(x) = x^2 - 2x$ в точке $x_0 = 3$.

$$f(3) = 3, \quad f'(x) = 2x - 2, \quad f'(3) = 4$$

$$y = 3 + 4(x - 3) = 4x - 9$$

На оси Оу имеем $x = 0$, поэтому $y = -9$.

Ответ: -9

Задание 40

На рисунке дан график производной. Сколько точек экстремума имеет функция f на изображённом промежутке?

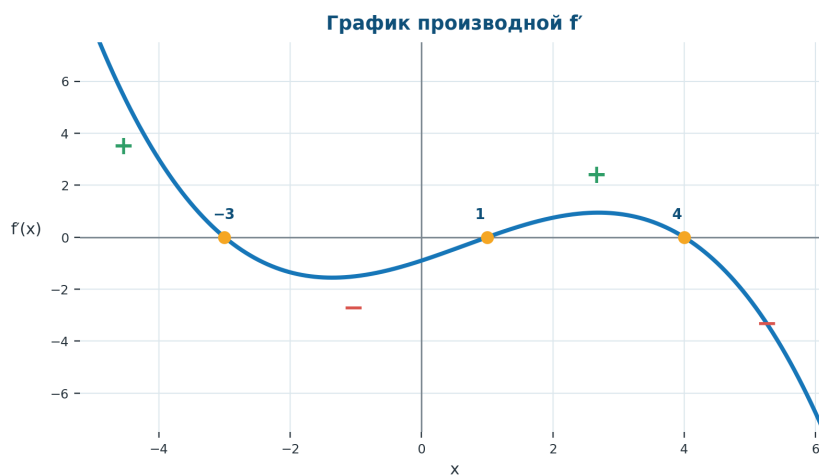


Рис. 6: Рисунок к заданию.

Во всех трёх нулях производная меняет знак. Значит каждый ноль соответствует экстремуму функции.

Ответ: 3

Вернуться к теории и разобранным примерам