



Текстовые задачи на движение

Задания, решения и ответы

40 заданий с пошаговыми решениями и ответами. Сначала выполните задание самостоятельно, затем сравните ход рассуждений с разбором.

01. Свойства и базовые методы: задания 1–10

Задание 1

Автобус проехал 240 км за 4 часа 30 минут, включая остановку на 30 минут. Во время движения его скорость была постоянной. Найдите скорость движения и среднюю скорость за всё время поездки.

Полное время $\frac{9}{2}$ ч, время движения $\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$ ч. Поэтому постоянная скорость движения $v = \frac{240}{4} = 60$ км/ч.

Средняя скорость учитывает и остановку: $v_{\text{ср}} = \frac{240}{\frac{9}{2}} = \frac{160}{3}$ км/ч. Она меньше 60, поскольку тот же путь делится на большее время. Путь остановки нулевой, но время не нулевое.

Ответ. 60 км/ч; $\frac{160}{3}$ км/ч.

Задание 2

Из городов А и В, расстояние между которыми 300 км, одновременно выехали навстречу два автомобиля со скоростями 70 и 80 км/ч. Найдите время и место встречи, указав расстояние от А.

Пусть $t \geq 0$ - часы до встречи. Сумма пройденных навстречу путей равна 300: $70t + 80t = 300$. Значит, $t = 2$ ч.

Автомобиль из А прошёл $70 \cdot 2 = 140$ км, из В - $80 \cdot 2 = 160$ км. Их сумма 300, оба пути лежат между нулём и длиной дороги. Встреча единственная до прибытия в противоположные города.

Ответ. Через 2 ч, в 140 км от А.



Встречное движение: пройденные навстречу пути составляют 300 км.

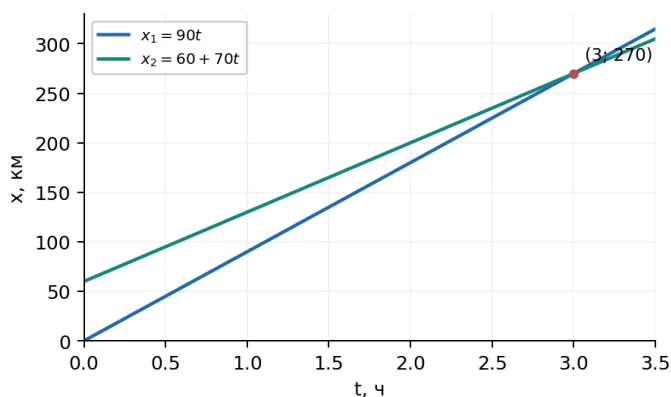
Задание 3

Два автомобиля едут по прямой в одном направлении. В начальный момент быстрый находится на 60 км позади медленного. Скорости равны 90 и 70 км/ч. Через сколько часов быстрый догонит медленного и какой путь он за это время пройдёт?

Разрыв уменьшается со скоростью $90 - 70 = 20$ км/ч. Время догоняния $t = \frac{60}{20} = 3$ ч, путь быстрого $90 \cdot 3 = 270$ км.

Проверка координат от начального положения быстрого: у него $x = 270$, у медленного $x = 60 + 70 \cdot 3 = 270$. Сумму скоростей использовать нельзя: оба движутся в одну сторону.

Ответ. 3 ч; 270 км.



Встреча графиков координат: $t = 3$ ч, $x = 270$ км.

Задание 4

Первый автомобиль выехал по прямой со скоростью 60 км/ч. Через 40 минут вслед за ним выехал второй со скоростью 90 км/ч. Через сколько времени после своего старта второй догонит первого? Оба продолжают движение без остановок.

Задержка $\frac{2}{3}$ ч, фора первого $60 \cdot \frac{2}{3} = 40$ км. Относительная скорость после второго старта $90 - 60 = 30$ км/ч.

Поэтому время второго до встречи $t = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$ ч, или 1 ч 20 мин. Первый к встрече едет $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$ ч; оба прошли 120 км. Отсчёт времени в ответе ведётся от второго, не от первого старта.

Ответ. Через 1 ч 20 мин.

Задание 5

Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 60 км/ч, вторую - 40 км/ч. Найдите среднюю скорость за весь путь, если остановок не было.

Пусть каждая половина равна $s > 0$ км. Полное время $\frac{s}{60} + \frac{s}{40} = \frac{s}{24}$ ч. Поэтому

$$v_{\text{ср}} = \frac{2s}{\frac{s}{24}} = 48.$$

Обычное среднее 50 неверно: на медленную половину ушло больше времени. Ответ не зависит от длины пути, поскольку s сокращается.

Ответ. 48 км/ч.

Задание 6

Автомобиль половину всего времени движения ехал со скоростью 60 км/ч, другую половину - 40 км/ч. Найдите среднюю скорость; остановок нет. Объясните отличие от задачи о половинах пути.

Пусть каждый временной интервал равен $t > 0$ ч. Пройдено $60t + 40t = 100t$ км за $2t$ ч, поэтому средняя скорость 50 км/ч.

Здесь равны времена, поэтому веса скоростей одинаковы. При равных путях времена различались бы, и получилась бы гармоническая, а не арифметическая средняя.

Ответ. 50 км/ч.

Задание 7

Собственная скорость лодки 18 км/ч, течение 3 км/ч. Она проходит 63 км по течению, затем 45 км против течения без остановки. Найдите общее время и среднюю путевую скорость за весь маршрут.

Скорости относительно берега: по течению $18 + 3 = 21$, против $18 - 3 = 15$ км/ч; против течения движение возможно, так как $18 > 3$.

Времена $\frac{63}{21} = 3$ ч и $\frac{45}{15} = 3$ ч. Всего 6 ч, путь 108 км. Средняя скорость $\frac{108}{6} = 18$ км/ч. Она совпала с собственной из-за равенства времён, а не потому, что это верно для любого речного маршрута.

Ответ. 6 ч; 18 км/ч.

Задание 8

Плот без собственной скорости проплыл 24 км за 12 часов. Найдите скорость течения и время, за которое моторная лодка с собственной скоростью 10 км/ч пройдёт те же 24 км против течения.

Плот движется относительно берега со скоростью течения $u = \frac{24}{12} = 2$ км/ч. Против течения скорость лодки $10 - 2 = 8$ км/ч.

Время $t = \frac{24}{8} = 3$ ч. Проверка возможности: собственная скорость больше течения; при равенстве лодка стояла бы относительно берега и не прошла бы путь вверх по реке.

Ответ. 2 км/ч; 3 ч.

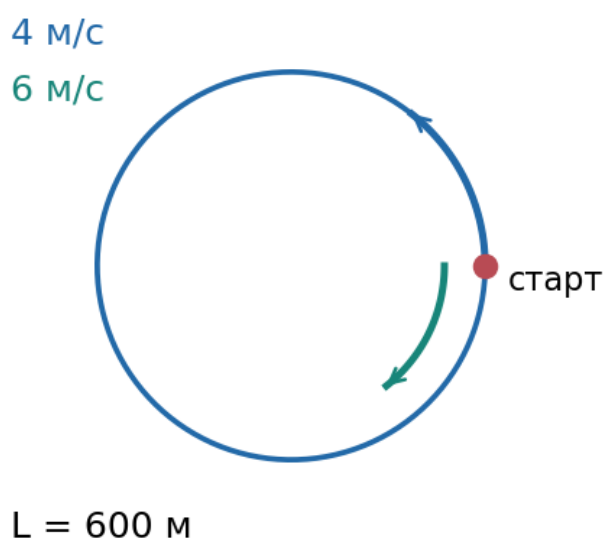
Задание 9

Два бегуна одновременно стартовали из одной точки круговой дорожки длиной 600 м в противоположных направлениях со скоростями 4 и 6 м/с. Через сколько секунд произойдёт первая встреча после старта?

После старта встреча наступает, когда сумма пройденных дуг равна одному полному кругу. Относительная скорость $4 + 6 = 10$ м/с.

Уравнение $10t = 600$ даёт $t = 60$ с. За это время пути 240 и 360 м составляют ровно круг. Начальное совпадение при $t = 0$ не считаем встречей после старта; меньшего положительного целого числа кругов нет.

Ответ. 60 с.



Бегуны движутся навстречу: суммарная пройденная дуга до первой встречи - один круг.

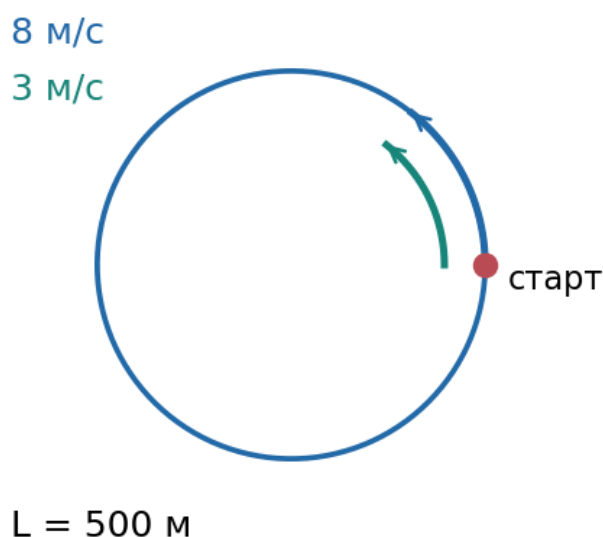
Задание 10

Два бегуна стартуют одновременно из одной точки круговой дорожки длиной 500 м в одном направлении со скоростями 8 и 3 м/с. Когда быстрый впервые снова окажется рядом с медленным?

Для нового совпадения быстрый должен выиграть у медленного один полный круг. Разность путей $(8 - 3)t = 5t$.

Первое положительное время удовлетворяет $5t = 500$, откуда $t = 100$ с. Пути 800 и 300 м различаются на длину круга, поэтому положения совпадают. При меньшем положительном времени разность меньше 500 и не равна ненулевому целому числу кругов.

Ответ. Через 100 с.



Бег в одну сторону: быстрый должен выиграть полный круг.

02. Поезда, графики и средняя скорость: задания 11-16**Задание 11**

Поезд длиной 180 м полностью проходит неподвижный столб за 12 секунд. Найдите его скорость в километрах в час.

От момента прохождения столба головой до момента прохождения хвостом весь поезд смещается на свою длину, 180 м.

Скорость $v = \frac{180}{12} = 15$ м/с. Перевод: $15 \cdot 3,6 = 54$ км/ч. Проверка: 54 км/ч за 12 с дают $54 \cdot \frac{12}{3600} = 0,18$ км, или 180 м.

Ответ. 54 км/ч.

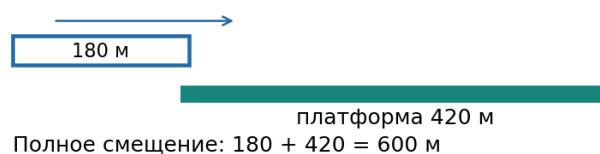
Задание 12

Поезд длиной 180 м проходит платформу длиной 420 м за 40 секунд: время считают от входа головы на платформу до выхода хвоста. Найдите скорость поезда в м/с.

Чтобы хвост покинул платформу, голова должна пройти длину платформы и ещё длину поезда. Путь равен $420 + 180 = 600$ м.

Следовательно, $v = \frac{600}{40} = 15$ м/с. Деление только 420 на 40 описывало бы движение головы от начала до конца платформы, а это другой временной интервал.

Ответ. 15 м/с.



От входа головы до выхода хвоста путь равен сумме длин.

Задание 13

Пешеход прошёл 12 км с постоянной скоростью 4 км/ч, сделав в пути остановку на 1 час. Найдите среднюю путевую скорость от начала до конца путешествия.

Время движения $\frac{12}{4} = 3$ ч. С остановкой полное время $3 + 1 = 4$ ч; пройденный путь остаётся 12 км.

Средняя скорость $\frac{12}{4} = 3$ км/ч. Нельзя усреднять числа 4 и 0 без учёта длительностей: движение и остановка занимали не равное время.

Ответ. 3 км/ч.

Задание 14

На графике показан пройденный путь s автомобиля в зависимости от времени t . Найдите скорость на каждом участке, продолжительность остановки и среднюю скорость за первые 4 часа.

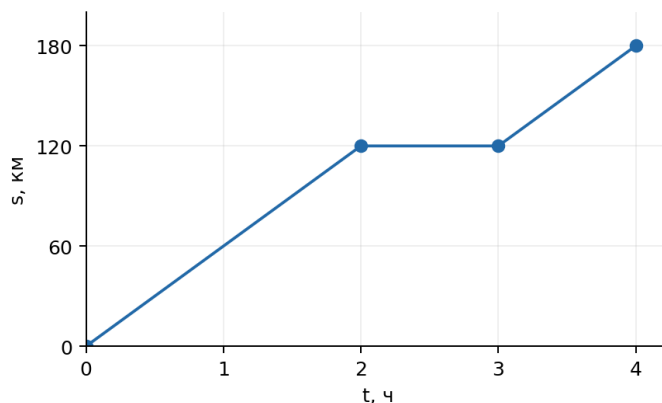


График пути: вершины (0; 0), (2; 120), (3; 120), (4; 180).

На участке от 0 до 2 ч путь увеличивается с 0 до 120 км, скорость $\frac{120}{2} = 60$ км/ч. От 2 до 3 ч путь постоянен, скорость нулевая: остановка 1 ч.

От 3 до 4 ч путь растёт со 120 до 180 км, скорость $\frac{180 - 120}{4 - 3} = 60$ км/ч. Полный путь 180 км за 4 ч, поэтому средняя скорость $\frac{180}{4} = 45$ км/ч. На графике пути остановка горизонтальна; отрицательного наклона у пройденного пути быть не может.

Ответ. 60, 0 и 60 км/ч; остановка 1 ч; средняя 45 км/ч.

Задание 15

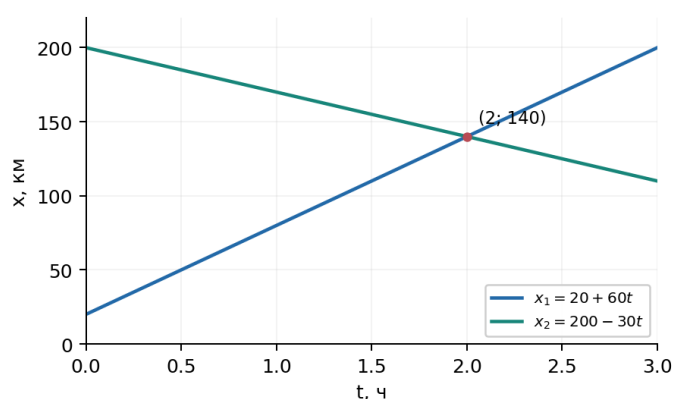
Координаты двух автомобилей на прямой заданы формулами $x_1(t) = 20 + 60t$ и $x_2(t) = 200 - 30t$, где километры и часы согласованы, $t \geq 0$. Найдите время встречи и её координату.

Встреча означает равенство координат, а не равенство путей: $20 + 60t = 200 - 30t$. Получаем $90t = 180$, $t = 2$ ч.

Координата $x = 20 + 60 \cdot 2 = 140$ км; вторая формула даёт $200 - 30 \cdot 2 = 140$.

Исходный разрыв 180 км уменьшается со скоростью 90 км/ч. Минус в формуле второго автомобиля указывает направление движения, не отрицательный модуль скорости.

Ответ. Через 2 ч, координата 140 км.



Равенство координат при $t = 2$ ч.

Задание 16

Четверть пути автомобиль ехал со скоростью 40 км/ч, половину — 60 км/ч, оставшуюся четверть — 80 км/ч. Остановок не было. Найдите точную среднюю скорость.

Пусть весь путь $S > 0$. Полное время

$$t = \frac{S}{160} + \frac{S}{120} + \frac{S}{320} = \frac{17S}{960}.$$

Поэтому $v_{\text{ср}} = \frac{S}{\frac{17S}{960}} = \frac{960}{17}$ км/ч. Оно находится между 40 и 80, что даёт грубую проверку. Веса при усреднении скоростей — доли времени, не доли пути; простое взвешивание по четвертям дало бы неверный результат.

Ответ. $\frac{960}{17}$ км/ч.

03. Повторение пройденного: задания 17-20

Задание 17

Повторение: иррациональные уравнения. Решите $\sqrt{2x+3} = x$.

Левая часть неотрицательна, поэтому любой корень удовлетворяет $x \geq 0$; при этом подкоренное выражение положительно. На этой области возведение в квадрат равносильно:

$$2x + 3 = x^2 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) = 0.$$

Кандидаты 3 и -1. Второй нарушает $x \geq 0$ и при подстановке дал бы $1 = -1$. Первый подходит: $\sqrt{9} = 3$.

Ответ. 3.



Допустимо $x \geq 0$; отрицательный кандидат -1 исключается.

Задание 18

Повторение: логарифмические неравенства. Решите $\log_2(x-1) \geq 2$.

ОДЗ: $x > 1$. Так как основание 2 больше единицы, логарифм строго возрастает. Поэтому на ОДЗ неравенство равносильно $x - 1 \geq 2^2 = 4$, то есть $x \geq 5$.

Все эти значения входят в ОДЗ. Точка 5 включена: логарифм равен ровно 2. Никаких корней левее ОДЗ нет.

Ответ. $[5; +\infty)$.



Решение логарифмического неравенства: $x \geq 5$.

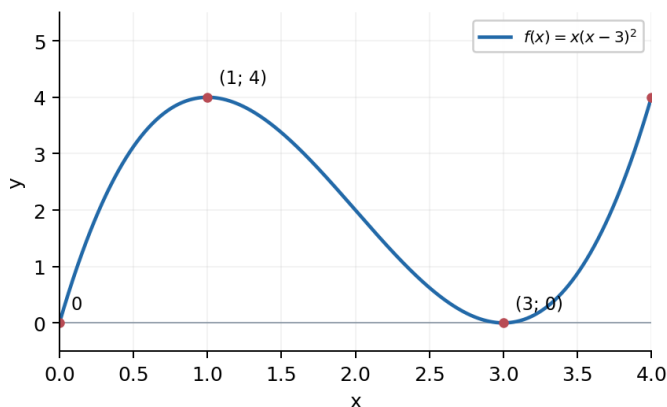
Задание 19

Повторение: экстремальные значения. Найдите минимум и максимум $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ на $[0; 4]$ и все точки их достижения.

Производная $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$. Внутренние критические точки 1 и 3.

Сравним их с концами: $f(0) = 0$, $f(1) = 4$, $f(3) = 0$, $f(4) = 4$. Полином непрерывен и всюду дифференцируем; других кандидатов нет.

Ответ. Минимум 0 при $x = 0$ и $x = 3$; максимум 4 при $x = 1$ и $x = 4$.



Два минимума значения 0 и два максимума значения 4 на отрезке.

Задание 20

Повторение: прикладные расчёты. Кредит 600 000 рублей погашают за три года равными частями основного долга. Перед каждым платежом начисляют 10% на остаток; проценты полностью выплачивают вместе с частью долга. Найдите общую сумму выплат.

Каждая часть основного долга равна 200000 рублей. Остатки перед начислениями: 600000, 400000, 200000.

Проценты равны 60000, 40000 и 20000 рублей. Вместе с основным долгом сумма выплат $600000 + 60000 + 40000 + 20000 = 720000$. Полные платежи 260000, 240000, 220000 различны, хотя части долга равны.

Ответ. 720 000 рублей.

04. Составные задачи: задания 21-30**Задание 21**

Автомобиль проехал 150 км туда со скоростью v , а обратно те же 150 км со скоростью $v + 25$ км/ч. Всё движение заняло 5 часов. Найдите v .

Физическая область $v > 0$. Складываются времена:

$$\frac{150}{v} + \frac{150}{v + 25} = 5.$$

Умножение на положительное $v(v + 25)$ даёт $150(v + 25) + 150v = 5v(v + 25)$, откуда $v^2 - 35v - 750 = (v - 50)(v + 15) = 0$.

Корень -15 исключён по положительности скорости; $v = 50$ подходит. Проверка:
 $\frac{150}{50} + \frac{150}{75} = 3 + 2 = 5$ ч.

Ответ. 50 км/ч.

Задание 22

Лодка прошла 72 км по течению и 72 км против течения за 10 часов без остановок. Скорость течения 3 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость $v > 3$; это обеспечивает движение против течения. Тогда

$$\frac{72}{v + 3} + \frac{72}{v - 3} = 10.$$

На ОДЗ умножаем на $v^2 - 9 > 0$: $144v = 10(v^2 - 9)$, или $5v^2 - 72v - 45 = 0$.

Дискриминант $6084 = 78^2$; корни 15 и $-\frac{3}{5}$.

Подходит только 15. Проверка: вниз скорость 18, вверх 12 км/ч; времена 4 и 6 ч дают 10 ч.

Ответ. 15 км/ч.

Задание 23

Самолёт пролетел 480 км по ветру и 480 км против ветра за 5 часов. Постоянная скорость ветра 40 км/ч, направлена вдоль маршрута. Найдите собственную скорость самолёта.

Пусть $v > 40$ - скорость относительно воздуха. Относительно земли скорости $v + 40$ и $v - 40$.

$$\frac{480}{v + 40} + \frac{480}{v - 40} = 5 \Leftrightarrow v^2 - 192v - 1600 = 0.$$

Преобразование равносильно на $v > 40$, где оба знаменателя ненулевые. Факторизация $(v - 200)(v + 8) = 0$ даёт допустимый корень 200; -8 исключён.

Проверка: $\frac{480}{240} = 2$ ч по ветру и $\frac{480}{160} = 3$ ч против, всего 5 ч.

Ответ. 200 км/ч.

Задание 24

Поезда длиной 210 и 190 м движутся навстречу со скоростями 54 и 72 км/ч. Сколько секунд проходит от встречи голов до полного расхождения хвостов?

Переведём скорости: $54 \cdot \frac{5}{18} = 15$ м/с, $72 \cdot \frac{5}{18} = 20$ м/с. Относительная скорость 35 м/с.

Для полного расхождения относительное смещение должно равняться сумме длин $210 + 190 = 400$ м. Поэтому $t = \frac{400}{35} = \frac{80}{7}$ с. Проверка: за это время сумма пройденных поездом путей равна 400 м.

Ответ. $\frac{80}{7}$ с.

Задание 25

Два автомобиля одновременно прошли один и тот же маршрут. Первый ехал с постоянной скоростью $v > 30$ км/ч. Второй ехал половину пути со скоростью $v - 7$, другую половину - 72 км/ч. Времена совпали. Найдите v . Данные: ФИПИ, рекомендации ЕГЭ-2026, пример 10.2.

Пусть длина маршрута $S > 0$. Времена равны:

$$\frac{S}{v} = \frac{S}{2(v-7)} + \frac{S}{144}.$$

Сокращаем S и умножаем на $144v(v-7) > 0$ при $v > 30$. Получаем

$144(v-7) = 72v + v(v-7)$, то есть $v^2 - 79v + 1008 = 0$.

Факторизация $(v-63)(v-16) = 0$. Значение 16 алгебраически удовлетворяет равенству времён, но нарушает условие $v > 30$. Для 63 скорости второго равны 56 и 72; $\frac{1}{112} + \frac{1}{144} = \frac{1}{63}$ подтверждает время.

Ответ. 63 км/ч.

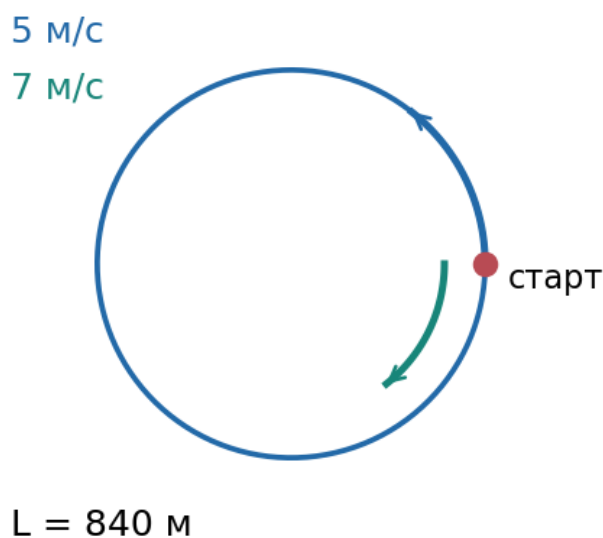
Задание 26

Бегуны стартуют из одной точки круговой дорожки длиной 840 м в противоположных направлениях со скоростями 5 и 7 м/с. Найдите время пятой встречи после старта и путь каждого к этому моменту.

Промежуток между встречами равен $\frac{840}{5+7} = 70$ с. Встречи после старта соответствуют суммарному пути в 1, 2, 3, 4, 5 кругов.

Пятая происходит при $t = 5 \cdot 70 = 350$ с. Пути равны $5 \cdot 350 = 1750$ м и $7 \cdot 350 = 2450$ м. Их сумма 4200 м - ровно пять длин дорожки. Начальное совпадение в нулевой момент не входит в счёт.

Ответ. 350 с; 1750 и 2450 м.



Каждая следующая встреча добавляет один относительный круг длиной 840 м.

Задание 27

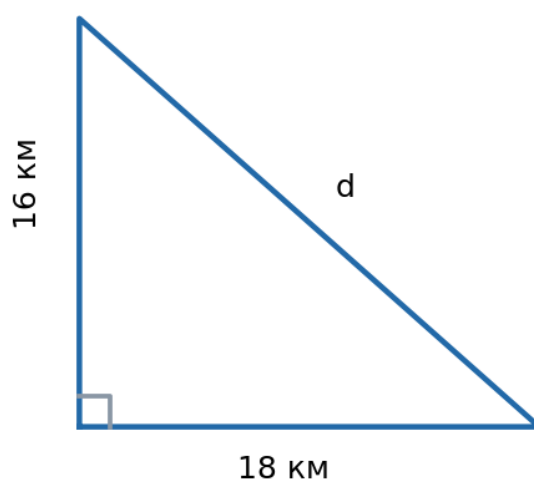
Из перекрёстка первый велосипедист выехал по одной дороге со скоростью 6 км/ч. Через час второй выехал по перпендикулярной дороге со скоростью 8 км/ч. Найдите расстояние между ними через 3 часа после первого старта.

У первого время движения 3 ч, путь 18 км. У второго только $3 - 1 = 2$ ч, путь 16 км. Эти пути - перпендикулярные катеты, не участки одной прямой.

Расстояние по теореме Пифагора $d = \sqrt{18^2 + 16^2} = \sqrt{580} = 2\sqrt{145}$ км.

Положительный корень выбран, поскольку речь о расстоянии. Ответ лежит между 18 и 34 км, что согласуется с треугольником.

Ответ. $2\sqrt{145}$ км.



В момент наблюдения участники находятся в концах перпендикулярных отрезков 18 и 16 км.

Задание 28

Автомобиль должен был пройти 180 км с постоянной скоростью v . После 120 км он остановился на 20 минут, затем оставшиеся 60 км проехал со скоростью $v + 15$ км/ч и прибыл в запланированный момент. Найдите v .

При $v > 0$ плановое время $\frac{180}{v}$. Фактическое $\frac{120}{v} + \frac{1}{3} + \frac{60}{v+15}$. Сокращая общее время первого участка, получаем

$$\frac{1}{3} + \frac{60}{v+15} = \frac{60}{v}.$$

Умножение на $3v(v+15) > 0$ даёт $v^2 + 15v - 2700 = (v-45)(v+60) = 0$.

Отрицательный корень не подходит.

При $v = 45$ план на последние 60 км - $\frac{4}{3}$ ч, фактически $\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$ ч. Значит, остановка компенсирована полностью.

Ответ. 45 км/ч.

Задание 29

Два велосипедиста проходят по 90 км. Второй едет на 6 км/ч быстрее первого и тратит на маршрут на 30 минут меньше. Найдите обе скорости.

Пусть скорость первого $v > 0$. Разность времён положительна:

$$\frac{90}{v} - \frac{90}{v+6} = \frac{1}{2}.$$

На ОДЗ умножение даёт $1080 = v(v+6)$, или $(v-30)(v+36) = 0$. Допустим только $v = 30$, второй едет со скоростью 36 км/ч.

Проверка: времена 3 ч и $\frac{5}{2}$ ч, разница $\frac{1}{2}$ ч. Менять порядок вычитания нельзя: более быстрый тратит меньше времени.

Ответ. 30 и 36 км/ч.

Задание 30

Собственная скорость лодки 20 км/ч. На путь 96 км против течения уходит на 2 часа больше, чем на такой же путь по течению. Найдите скорость течения.

Пусть $0 < u < 20$. Тогда

$$\frac{96}{20 - u} - \frac{96}{20 + u} = 2.$$

Знаменатель $400 - u^2$ положителен. После умножения $192u = 2(400 - u^2)$, откуда $u^2 + 96u - 400 = (u - 4)(u + 100) = 0$.

Корень -100 недопустим, $u = 4$ подходит. Скорости лодки относительно берега 16 и 24 км/ч, времена 6 и 4 ч; разность 2 ч. Нулевое течение не могло бы дать положительную разность времён.

Ответ. 4 км/ч.

05. Развёрнутое обоснование: задания 31-34**Задание 31**

Стоящий человек проезжает движущуюся дорожку за 60 секунд. Если он идёт по ней в том же направлении со скоростью 1 м/с относительно дорожки, то проходит её за 30 секунд. Найдите длину и скорость дорожки.

Пусть $u > 0$ - скорость дорожки, $L > 0$ - длина. Стоящий пассажир движется относительно пола со скоростью u , и $L = 60u$. При ходьбе скорость относительно пола $u + 1$, поэтому $L = 30(u + 1)$.

Из равенства $60u = 30u + 30$ получаем $u = 1$ м/с, $L = 60$ м. Оба числа положительны. Проверка: 60 м при 1 м/с дают 60 с, при 2 м/с - 30 с. Сравнивать 1 м/с прямо с полной скоростью пассажира было бы ошибкой системы отсчёта.

Ответ. 60 м; 1 м/с.

Задание 32

Поезд полностью проходит столб за 15 секунд, а платформу длиной 360 м - за 27 секунд. Скорость постоянна. Найдите длину поезда и скорость в километрах в час.

Пусть $L > 0$ м - длина, $v > 0$ м/с - скорость. Уравнения $L = 15v$ и $L + 360 = 27v$ описывают смещение поезда за соответствующее время.

Вычитание даёт $360 = 12v$, значит, $v = 30$ м/с. Длина $L = 15 \cdot 30 = 450$ м; скорость $30 \cdot 3,6 = 108$ км/ч.

Проверка: $\frac{450 + 360}{30} = 27$ с. Длина платформы соответствует разности времён, поскольку длина самого поезда одинакова в обеих моделях.

Ответ. 450 м; 108 км/ч.

Задание 33

Теплоход проходит 468 км по течению, стоит 3 часа и возвращается тем же путём. Собственная скорость 22 км/ч, всё путешествие длится 47 часов. Найдите скорость течения. Данные: ФИПИ, рекомендации ЕГЭ-2026, пример 10.6.

Обозначим течение u , где $0 \leq u < 22$. На движение остаётся $47 - 3 = 44$ ч:

$$\frac{468}{22 + u} + \frac{468}{22 - u} = 44.$$

Поскольку $484 - u^2 > 0$, получаем $20592 = 44(484 - u^2)$, то есть $484 - u^2 = 468$ и $u^2 = 16$. Из корней ± 4 допустим 4.

Проверка: скорости 26 и 18 км/ч, времена 18 и 26 ч. С остановкой $18 + 26 + 3 = 47$ ч. При этом $4 < 22$, так что обратный путь возможен.

Ответ. 4 км/ч.

Задание 34

Два автомобиля одновременно выехали навстречу из А и В и после встречи продолжили движение без изменения скорости. Первый, ехавший из А со скоростью 60 км/ч, достиг В через 4 часа после встречи. Второй достиг А через 9 часов после встречи. Найдите скорость второго и расстояние АВ.

Пусть скорость второго $u > 0$, время от старта до встречи $t > 0$. До встречи первый прошёл $60t$, второй ut . После встречи им осталось пройти именно пути друг друга.

Первому осталось $ut = 60 \cdot 4 = 240$ км. Второму осталось $60t = 9u$. Подставляя $t = \frac{9u}{60}$ в первое равенство, получаем $\frac{9u^2}{60} = 240$, значит, $u^2 = 1600$.

Положительность даёт $u = 40$ км/ч.

Тогда $t = 6$ ч, $AB = (60 + 40) \cdot 6 = 600$ км. Проверка: после встречи первому осталось 240 км - 4 ч; второму 360 км - 9 ч. Время до встречи не равно ни 4, ни 9: оно определяется системой.

Ответ. 40 км/ч; 600 км.



После встречи автомобили проходят оставшиеся пути за 4 и 9 часов; схема решения.

06. Сложные задачи и параметры: задания 35-40

Задание 35

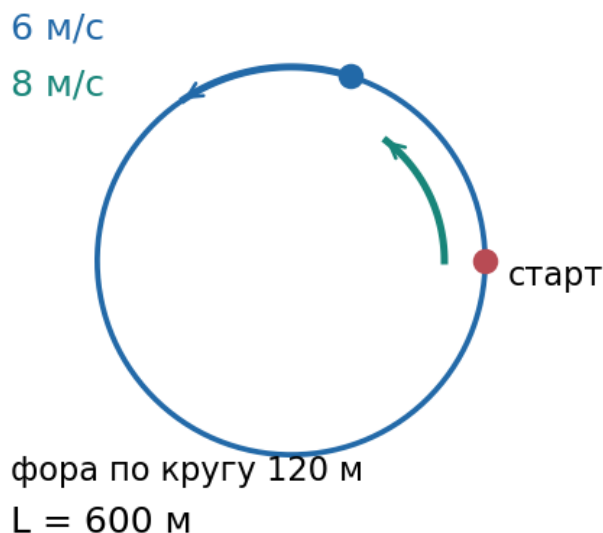
На круговой дорожке длиной 600 м первый бегун бежит со скоростью 6 м/с. Через 2 минуты из той же стартовой точки в том же направлении начинает бежать второй со скоростью 8 м/с. Через сколько секунд после второго старта произойдёт третий физический обгон? Каждый проход мимо первого считают обгоном независимо от числа полных кругов.

Ко второму старту первый прошёл $6 \cdot 120 = 720 = 600 + 120$ м. На дорожке он на 120 м впереди стартовой точки, хотя накопленный путь больше на 720 м.

Относительная скорость $8 - 6 = 2$ м/с. Первый физический обгон после второго старта произойдёт через $\frac{120}{2} = 60$ с. Далее обгоны повторяются через $\frac{600}{2} = 300$ с. Третий: $60 + 2 \cdot 300 = 660$ с.

Полная проверка через координаты по модулю длины круга: $8t - (720 + 6t) = 600k$, где k - целое. Получаем $t = 360 + 300k$. Положительные моменты по возрастанию: 60 при $k = -1$, 360 при $k = 0$, 660 при $k = 1$. При $k \leq -2$ время отрицательно, поэтому более ранних положительных обгонов нет. Нельзя считать только момент равенства накопленных путей: это был бы второй, а не первый физический обгон.

Ответ. Через 660 с.



Положение к запоздалому старту: первый впереди на 120 м по кругу.

Задание 36

Между А и В 120 км. Одновременно из А в В выехал первый автомобиль со скоростью 30 км/ч, из В в А - второй со скоростью 20 км/ч. В концах отрезка каждый сразу разворачивается и продолжает движение с той же скоростью. Найдите первые две встречи после старта и расстояние от А до второй встречи.

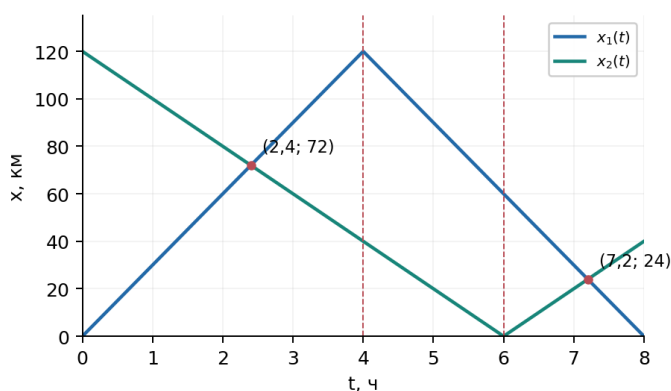
Введём координату от А, общее время t в часах. До первого разворота $x_1 = 30t$ при $0 \leq t \leq 4$, $x_2 = 120 - 20t$ при $0 \leq t \leq 6$. Первая встреча: $50t = 120$, $t = \frac{12}{5}$ ч, координата 72 км.

Первый разворачивается в В при $t = 4$. На $[4; 6]$ его координата $x_1 = 120 - 30(t - 4) = 240 - 30t$, второй ещё движется к А. Равенство $240 - 30t = 120 - 20t$ даёт $t = 12$, вне этого этапа. Значит, встреч на $[4; 6]$ нет.

При $t = 6$ второй разворачивается в А; до $t = 8$ первый ещё едет обратно. Теперь $x_2 = 20(t - 6) = 20t - 120$. Уравнение $240 - 30t = 20t - 120$ даёт $t = \frac{36}{5} = 7,2$ ч, внутри $[6; 8]$. Координата $x = 24$ км.

На каждом перечисленном этапе разность координат линейна, поэтому найденные корни исчерпывают встречи до $t = 7,2$. В моменты разворотов 4 и 6 координаты различны. Уравнение первого этапа нельзя продолжать после разворота.

Ответ. Через $\frac{12}{5}$ ч и $\frac{36}{5}$ ч после старта; вторая встреча в 24 км от А.



Первые две встречи - пересечения ломаных; развороты при $t = 4$ и $t = 6$.

Задание 37

Два автомобиля движутся по перпендикулярным прямым дорогам. В момент $t = 0$ первый находится в точке $(-30; 0)$ км и едет в положительном направлении оси x со скоростью 10 км/ч. Второй находится в $(0; -40)$ км и едет в положительном направлении оси y со скоростью 20 км/ч. Найдите наименьшее расстояние между ними за $0 \leq t \leq 3$ часа и момент его достижения.

Координаты первого $(10t - 30; 0)$, второго $(0; 20t - 40)$. Квадрат расстояния

$$d^2(t) = (10t - 30)^2 + (20t - 40)^2 = 500t^2 - 2200t + 2500.$$

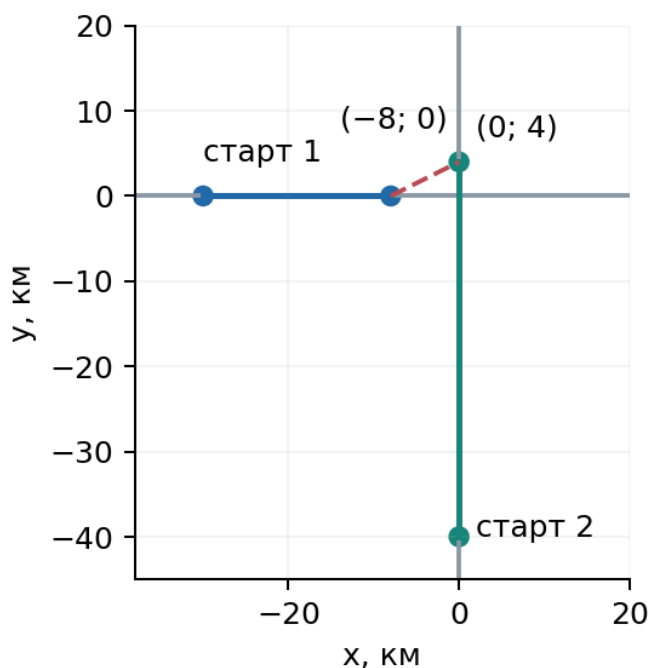
Минимизировать квадрат достаточно, поскольку квадратный корень строго возрастает на неотрицательных числах. Выделяем квадрат:

$$d^2(t) = 500 \left(t - \frac{11}{5} \right)^2 + 80.$$

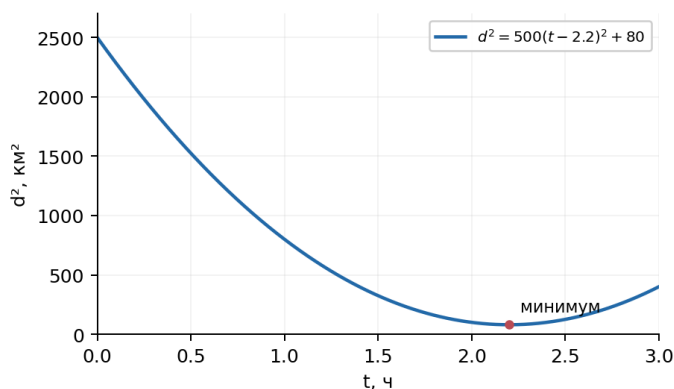
Точка $t = \frac{11}{5}$ входит в $[0; 3]$, поэтому минимум квадрата равен 80, а расстояния $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ км.

В этот момент координаты $(-8; 0)$ и $(0; 4)$; проверка по Пифагору $\sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5}$. Одновременного прохождения перекрёстка нет: второй проходит его при 2 ч, первый при 3 ч. Поэтому минимальное расстояние не обязано быть нулевым.

Ответ. $4\sqrt{5}$ км при $t = \frac{11}{5}$ ч.



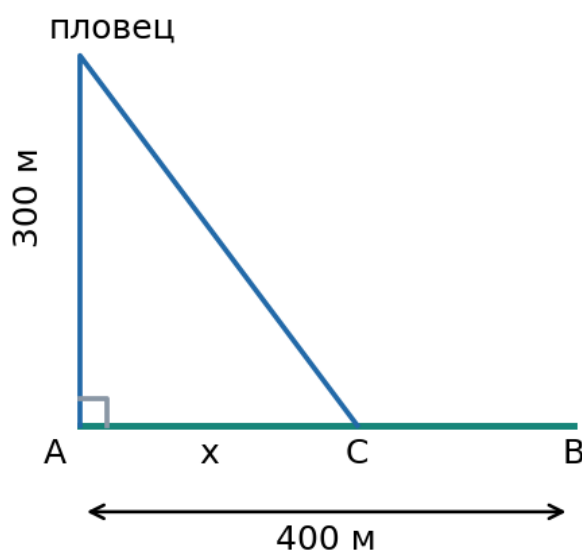
Положения в момент минимального расстояния $t = 11/5$ ч;
дороги перпендикулярны.



Минимум квадрата расстояния достигается при $t = 2,2$ ч.

Задание 38

Пловец находится в 300 м от прямолинейного берега, напротив точки А. Цель В лежит на берегу в 400 м от А. Он плывёт по прямой к точке С отрезка АВ, затем бежит по берегу к В. Скорость плавания 3 м/с, бега 5 м/с, течения нет. Где выбрать С, чтобы общее время было минимальным, и чему равно это время?



Маршрут: плавание к произвольной С на берегу и бег от С до В; положение С условное.

Пусть $AC = x$ м, $0 \leq x \leq 400$. По теореме Пифагора длина плавания $\sqrt{300^2 + x^2}$, длина бега $400 - x$. Время

$$T(x) = \frac{\sqrt{90000 + x^2}}{3} + \frac{400 - x}{5}.$$

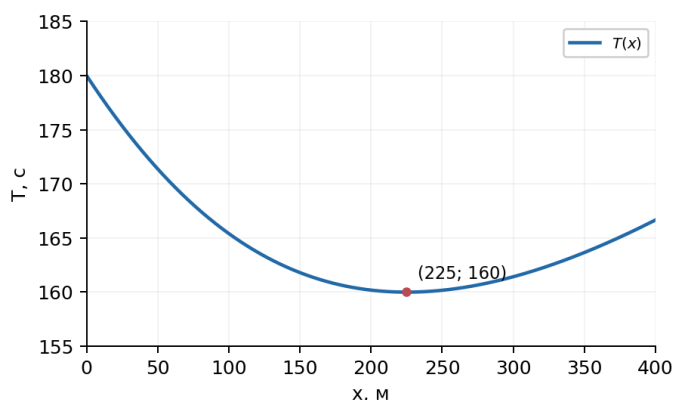
Функция непрерывна на отрезке, производная $T'(x) = \frac{x}{3\sqrt{90000 + x^2}} - \frac{1}{5}$. Равенство производной нулю означает $5x = 3\sqrt{90000 + x^2}$. Обе части неотрицательны, поэтому квадрат равносильно:

$$25x^2 = 810000 + 9x^2, \quad x^2 = 50625, \quad x = 225.$$

Отрицательный корень исключён областью. Функция $\frac{x}{\sqrt{90000 + x^2}}$ строго возрастает, её производная $\frac{90000}{(90000 + x^2)^{3/2}} > 0$. Следовательно, T' меняет знак с минуса на плюс именно при 225: это единственный минимум на отрезке.

Длина плавания $\sqrt{90000 + 50625} = 375$ м, бега 175 м. Время $\frac{375}{3} + \frac{175}{5} = 160$ с. На концах $T(0) = 180$ с и $T(400) = \frac{500}{3} > 160$ с, что подтверждает сравнение всех кандидатов.

Ответ. $AC = 225$ м в сторону В; 160 с.



Минимум времени при $AC = 225$ м, $T = 160$ с.

Задание 39

Лодка с собственной скоростью 10 км/ч должна пройти 60 км по течению и 60 км обратно без остановок. Скорость течения $u \in [0; 10)$ км/ч. Для каждого допустимого бюджета времени $a \geq 0$ часов найдите все u , при которых весь маршрут занимает не больше a часов.

Время определено на $0 \leq u < 10$:

$$T(u) = \frac{60}{10+u} + \frac{60}{10-u} = \frac{1200}{100-u^2}.$$

Знаменатель положителен и не больше 100, поэтому $T(u) \geq 12$, с равенством только при $u = 0$. При $0 \leq a < 12$ решений нет; при $a = 12$ подходит только нулевое течение.

Пусть $a > 12$. Умножаем на положительный знаменатель и делим на положительное a :

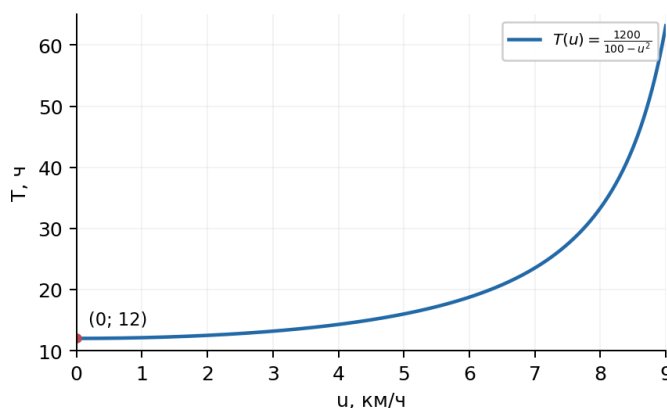
$$\frac{1200}{100-u^2} \leq a \Leftrightarrow u^2 \leq 100 - \frac{1200}{a}.$$

Правая часть лежит строго между 0 и 100. С учётом $u \geq 0$ получаем

$0 \leq u \leq \sqrt{100 - \frac{1200}{a}}$. Верхняя граница меньше 10, значит, физическое ограничение автоматически выполнено. Граница включена, поскольку разрешено ровно a часов.

При $u \rightarrow 10^-$ обратная скорость стремится к нулю, время - к бесконечности. Поэтому ни один конечный бюджет не допускает все $u \in [0; 10)$.

Ответ. При $a < 12$ - $\emptyset$; при $a = 12$ - $\{0\}$; при $a > 12$ - $\left[0; \sqrt{100 - \frac{1200}{a}}\right]$.



Течение увеличивает полное время; минимум 12 ч при $u = 0$.

Задание 40

В учебной модели первые 60 км автомобиль едет со скоростью v , следующие 120 км - со скоростью $60 - v$ км/ч. Допустимо $10 \leq v \leq 50$. Для каждого $a \geq 0$ определите число допустимых значений v , при которых общее время равно a часов. Найдите критические значения a и скорости при них.

Время $T(v) = \frac{60}{v} + \frac{120}{60 - v}$ непрерывно на $[10; 50]$, оба знаменателя положительны. Производная

$$T'(v) = -\frac{60}{v^2} + \frac{120}{(60 - v)^2}.$$

Равенство нулю на области означает $\sqrt{2}v = 60 - v$, поскольку обе скорости положительны. Единственная критическая точка $v_* = \frac{60}{1 + \sqrt{2}} = 60(\sqrt{2} - 1)$ лежит между 10 и 50.

При $v < v_*$ производная отрицательна, при $v > v_*$ положительна: это строгий минимум. Значения

$$T(v_*) = 3 + 2\sqrt{2} =: a_*, \quad T(10) = \frac{42}{5}, \quad T(50) = \frac{66}{5}.$$

На левой ветви значения покрывают $\left[a_*; \frac{42}{5}\right]$, на правой - $\left[a_*; \frac{66}{5}\right]$, на каждой ветви по одному корню каждого внутреннего уровня.

Следовательно, ниже a_* корней нет; на уровне минимума один; при $a_* < a \leq \frac{42}{5}$ два; при $\frac{42}{5} < a \leq \frac{66}{5}$ один; выше $\frac{66}{5}$ ни одного. На уровне a_* совпадающие корни считаются один раз.

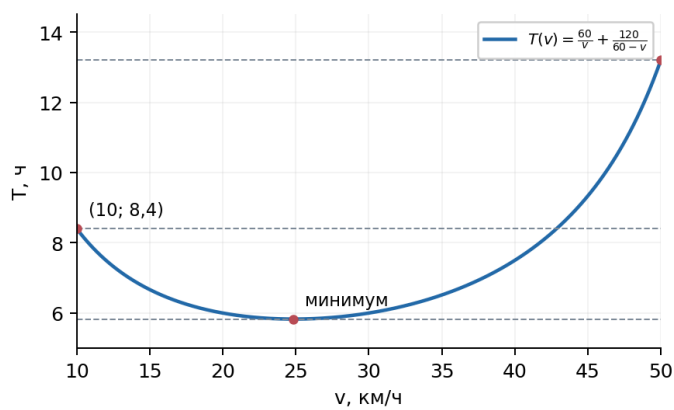
Проверим граничные скорости. После умножения на $v(60 - v) > 0$ уравнение превращается в

$$av^2 - (60a - 60)v + 3600 = 0.$$

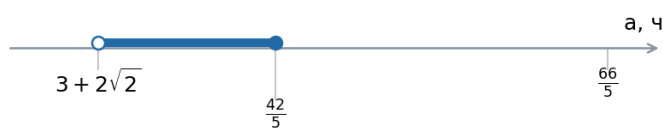
При $a = \frac{42}{5}$ корни 10 и $\frac{300}{7}$, оба допустимы. При $a = \frac{66}{5}$ корни 50 и $\frac{60}{11}$, второй меньше 10 и исключается. При $a = a_*$ корень единственный v_* . При $a = 0$ время не может быть нулевым.

Одного дискриминанта недостаточно: он не учитывает ограничение $[10; 50]$. Монотонные ветви доказывают полноту ответа для всех параметров, включая граничные значения.

Ответ. 0 значений при $0 \leq a < a_*$ или $a > \frac{66}{5}$; 1 при $a = a_*$ и при $\frac{42}{5} < a \leq \frac{66}{5}$; 2 при $a_* < a \leq \frac{42}{5}$. Здесь $a_* = 3 + 2\sqrt{2}$; критические скорости указаны в разборе.



Допустимая часть графика: минимум $3 + 2\sqrt{2}$, уровни концов $42/5$ и $66/5$.



Ровно две скорости: минимальное время исключено, $42/5$ включено.