



Тригонометрические выражения

Задания, решения и ответы

40 заданий с пошаговыми решениями и ответами. Сначала выполните задание самостоятельно, затем сравните ход рассуждений с разбором.

Задания 9 и 36 — из официальной демоверсии ФИПИ ЕГЭ-2026. Остальные задания составлены для этого урока.

01. Значения, знаки и координаты

Задание 1

Выразите угол 450° в радианах.

Шаг 1. Один полный оборот равен $360^\circ = 2\pi$, ещё $90^\circ = \frac{\pi}{2}$.

Шаг 2. Складываем: $450^\circ = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$. Полный оборот сохраняем: требуется величина угла, а не только положение точки.

Ответ. $\frac{5\pi}{2}$.

Задание 2

Вычислите:

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + \cos\frac{5\pi}{3}.$$

Шаг 1. $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, поэтому по нечётности $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Шаг 2. $\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Сумма равна 1.

Ответ. 1.

Задание 3

Вычислите:

$$\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ.$$

По основному тождеству $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ при любом действительном α .
Отдельно находить значения функций при 75° не требуется.

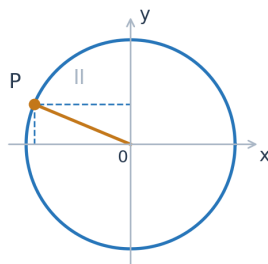
Ответ. 1.**Задание 4**

Вычислите:

$$\tan 225^\circ - 2 \cos 240^\circ.$$

Шаг 1. Период тангенса 180° , поэтому $\tan 225^\circ = \tan 45^\circ = 1$.**Шаг 2.** $\cos 240^\circ = \cos (180^\circ + 60^\circ) = -\frac{1}{2}$.**Шаг 3.** $1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2$.**Ответ.** 2.**Задание 5**

Известно, что $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найдите $\cos \alpha$.

Шаг 1. $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$.**Шаг 2.** Угол во II четверти. Абсцисса точки окружности отрицательна, поэтому из двух значений $\pm \frac{12}{13}$ выбираем отрицательное.

II четверть: ордината положительна, абсцисса отрицательна.

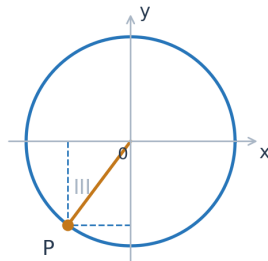
Ответ. $-\frac{12}{13}$.

Задание 6

Известно, что $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Найдите $\tan \alpha$.

Шаг 1. В III четверти синус отрицателен: $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$.

Шаг 2. $\tan \alpha = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$. Положительный знак согласуется с III четвертью.

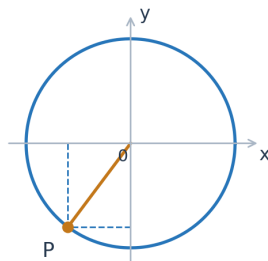


III четверть: синус и косинус отрицательны, их отношение положительно.

Ответ. $\frac{4}{3}$.

Задание 7

Точка $P\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ лежит на единичной окружности и соответствует углу α . Найдите $\sin 2\alpha$.



Точка P имеет координаты $(-3/5; -4/5)$. Проекции показывают координаты на осях.

Шаг 1. По координатам точки $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

Шаг 2. По формуле двойного угла $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$.

Ответ. $\frac{24}{25}$.

Задание 8

Найдите $\cos \frac{\alpha}{2}$, если $\alpha = \frac{5\pi}{3}$.

Шаг 1. $\frac{\alpha}{2} = \frac{5\pi}{6}$ лежит во II четверти, где косинус отрицателен.

Шаг 2. $\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задание 9

Вычислите:

$$3 \sin \frac{13\pi}{12} \cos \frac{13\pi}{12}.$$

ФИПИ. Демоверсия ЕГЭ-2026, профильный уровень, задание 7, первый вариант.

Шаг 1. Применяем $2 \sin u \cos u = \sin 2u$:

$$3 \sin \frac{13\pi}{12} \cos \frac{13\pi}{12} = \frac{3}{2} \sin \frac{13\pi}{6}.$$

Шаг 2. $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$, поэтому получаем $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. В бланке с кратким ответом это 0,75.

Ответ. 0,75.

Задание 10

Вычислите:

$$\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ.$$

$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$. Поэтому сумма превращается в $\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ = 1$.

Ответ. 1.

02. Формулы в несколько шагов

Задание 11

Вычислите точно:

$$\sin 75^\circ + \cos 75^\circ.$$

Шаг 1. Раскладываем $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$:

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Шаг 2. Слагаемые с $\sqrt{2}$ сокращаются. Получаем $\frac{2\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Задание 12

Вычислите точно $\tan 15^\circ$.

Шаг 1. $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$. Формула разности даёт

$$\tan 15^\circ = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}.$$

Шаг 2. Домножаем на сопряжённое:

$$\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = 2 - \sqrt{3}.$$

Знаменатели ненулевые; ответ положителен, как и тангенс острого угла.

Ответ. $2 - \sqrt{3}$.

Задание 13

Найдите $\cos(\alpha - \beta)$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\cos \beta = \frac{12}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

Шаг 1. По четвертям выбираем знаки: $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin \beta = -\frac{5}{13}$.

Шаг 2. Подставляем в формулу косинуса разности:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{48}{65} - \frac{15}{65} = -\frac{63}{65}.$$

Полученное значение принадлежит $[-1; 1]$.

Ответ. $-\frac{63}{65}$.

Задание 14

Найдите $\sin 2\alpha$, если $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$.

Шаг 1. Поскольку тангенс определён, $\cos \alpha \neq 0$. Делим $2 \sin \alpha \cos \alpha$ и $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ на $\cos^2 \alpha$:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}.$$

Шаг 2. $\frac{-\frac{3}{2}}{1 + \frac{9}{16}} = -\frac{24}{25}$. Четверть отдельно не требуется: выражение определяется данным тангенсом.

Ответ. $-\frac{24}{25}$.

Задание 15

Найдите $\cos 2\alpha$, если $\tan \alpha = 2$.

Делим разность $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ на равную единице сумму квадратов и затем на $\cos^2 \alpha$:

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}.$$

Ответ. $-\frac{3}{5}$.

Задание 16

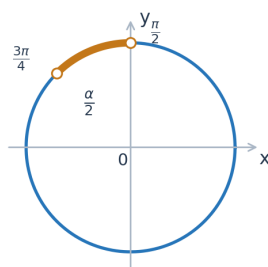
Найдите $\sin \frac{\alpha}{2}$ и $\cos \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = -\frac{7}{25}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Шаг 1. $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$, то есть половинный угол во II четверти: синус положителен, косинус отрицателен.

Шаг 2. Применяем формулы:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = -\frac{3}{5}.$$

Проверка: $\frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$.



Половинный угол лежит на открытой дуге II четверти: синус положителен, косинус отрицателен.

Ответ. $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{5}$.

Задание 17

Известно, что $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$. Найдите $\sin^3 x + \cos^3 x$.

Шаг 1. Обозначим $t = \sin x + \cos x$. Тогда $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} = -\frac{3}{8}$.

Шаг 2. По формуле суммы кубов:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = t^3 - 3t \sin x \cos x = -\frac{1}{8} - \frac{9}{16} = -\frac{11}{16}.$$

Ответ. $-\frac{11}{16}$.

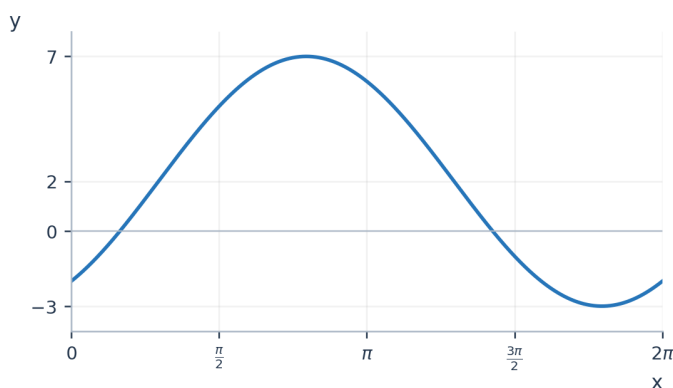
Задание 18

Найдите область значений $3 \sin x - 4 \cos x + 2$. Обоснуйте достижимость обеих границ.

Шаг 1. Выбираем φ так, что $\cos \varphi = \frac{3}{5}$, $\sin \varphi = \frac{4}{5}$. Тогда $3 \sin x - 4 \cos x = 5 \sin(x - \varphi)$.

Шаг 2. Значения синуса заполняют $[-1; 1]$, поэтому исходное выражение заполняет $[-3; 7]$.

Шаг 3. Максимум достигается при $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos x = -\frac{4}{5}$, минимум при $\sin x = -\frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$. Обе пары лежат на единичной окружности.



Один период $y = 3 \sin x - 4 \cos x + 2$. Границы области значений: -3 и 7 .

Ответ. $[-3; 7]$.

03. Повторение пройденного**Задание 19**

Вычислите:

$$\log_3 27 - \log_3 3.$$

$\log_3 27 = 3$, $\log_3 3 = 1$. Поэтому разность равна $3 - 1 = 2$. Оба аргумента положительны.

Ответ. 2.

Задание 20

Упростите $\sqrt{(x-4)^2}$ и запишите ответ без модуля для всех действительных x .

Шаг 1. Корень из квадрата равен модулю: $\sqrt{(x-4)^2} = |x-4|$.

Шаг 2. При $x < 4$ выражение $x-4$ отрицательно, поэтому модуль равен $4-x$. При $x \geq 4$ получаем $x-4$. В точке 4 оба выражения равны нулю.



Знак выражения $x-4$ меняется в точке 4.

Ответ. $4-x$ при $x < 4$; $x-4$ при $x \geq 4$.

04. Преобразования, ОДЗ и область значений**Задание 21**

Упростите и укажите исходную ОДЗ:

$$\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x}.$$

Шаг 1. Числитель равен $2 \sin 4x \cos x$, знаменатель $2 \cos 4x \cos x$.

Шаг 2. Исходная ОДЗ: $\cos 4x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$. Только после её записи сокращаем $2 \cos x$.

Шаг 3. Получаем $\tan 4x$. Условие $\cos x \neq 0$ сохраняется, хотя в итоговом выражении этого множителя уже нет.

Ответ. $\tan 4x$ при $\cos 4x \neq 0$, $\cos x \neq 0$.

Задание 22

Упростите и укажите ОДЗ:

$$\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\sin 2x + \sin 4x}.$$

Шаг 1. $\cos 2x - \cos 4x = -2 \sin 3x \sin(-x) = 2 \sin 3x \sin x$.

Шаг 2. $\sin 2x + \sin 4x = 2 \sin 3x \cos x$. Поэтому ОДЗ: $\sin 3x \neq 0$, $\cos x \neq 0$.

Шаг 3. Сокращение ненулевого множителя $2 \sin 3x$ даёт $\tan x$.

Ответ. $\tan x$ при $\sin 3x \neq 0$, $\cos x \neq 0$.

Задание 23

Упростите:

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}.$$

Укажите все ограничения.

Шаг 1. Требуется $\sin 2x \neq 0$ и $1 + \cos 2x \neq 0$. Совместно это $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$, то есть $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Шаг 2. Первая дробь равна $\frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \tan x$, вторая $\frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \tan x$.

Шаг 3. Складываем и сохраняем исходные исключения.

Ответ. $2 \tan x$, $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задание 24

Упростите на исходной ОДЗ:

$$\frac{\sin 4x}{\sin x} - 4 \cos x \cos 2x.$$

Шаг 1. ОДЗ: $\sin x \neq 0$, или $x \neq \pi k$.

Шаг 2. Дважды применяем формулу двойного угла:

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = 4 \sin x \cos x \cos 2x.$$

Шаг 3. Дробь равна $4 \cos x \cos 2x$. Разность равна нулю только там, где исходная дробь определена.

Ответ. 0 при $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задание 25

Вычислите точно:

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ.$$

Обозначим произведение через P . Умножим его на ненулевое число $8 \sin 20^\circ$:

$$8 \sin 20^\circ P = 4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$$

$$= 2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ = \sin 160^\circ = \sin 20^\circ.$$

Делим на $8 \sin 20^\circ \neq 0$. Получаем $P = \frac{1}{8}$.

Ответ. $\frac{1}{8}$.

Задание 26

Найдите значение $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$, если $\tan \alpha = -2$.

Шаг 1. Из существования тангенса следует $\cos \alpha \neq 0$. Делим числитель и знаменатель на $\cos \alpha$.

Шаг 2. Получаем $\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$. Знаменатель ненулевой, поскольку $\tan \alpha \neq 1$.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задание 27

Найдите $\sin 4\alpha$, если $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Шаг 1. $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$, поэтому $\sin 2\alpha > 0$ и $\sin 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$.

Шаг 2. $\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$.

Ответ. $-\frac{24}{25}$.

Задание 28

Докажите, что при любом действительном x

$$\sin^2 x + \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}.$$

Шаг 1. В каждом слагаемом используем $\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$.

Шаг 2. Сумма равна $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}C$, где

$$C = \cos 2x + \cos \left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos \left(2x - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Шаг 3. Сумма двух последних косинусов равна $2 \cos 2x \cos \frac{2\pi}{3} = -\cos 2x$. Значит, $C = 0$.

Деления на выражения с x не было, поэтому доказательство действует при всех действительных x .

Ответ. Тожество доказано для всех $x \in \mathbb{R}$.

Задание 29

Упростите выражение и найдите его область значений:

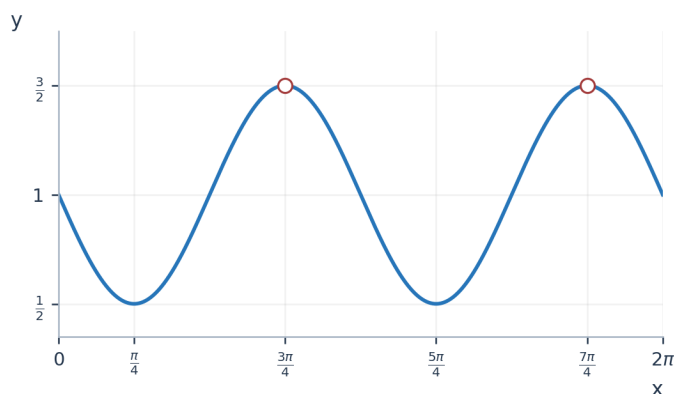
$$F(x) = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x}.$$

Шаг 1. ОДЗ: $\sin x + \cos x \neq 0$. Раскладываем сумму кубов и сокращаем:

$$F(x) = \sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Шаг 2. Без ограничений последняя формула даёт $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. Но $\sin x + \cos x = 0$ равносильно $\sin 2x = -1$.

Шаг 3. Поэтому значение $\frac{3}{2}$ исключено. Значение $\frac{1}{2}$ достигается, например, при $x = \frac{\pi}{4}$; все промежуточные значения допустимы.



Вершины с $y = 3/2$ выколоты: в этих точках знаменатель исходной дроби равен нулю.

Ответ. $F(x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$ на исходной ОДЗ; область значений $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

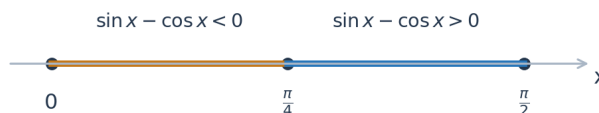
Задание 30

Упростите $\sqrt{1 - \sin 2x}$ без модуля при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Шаг 1. $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$, поэтому корень равен $|\sin x - \cos x|$.

Шаг 2. $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. На данном отрезке знак меняется в точке $\frac{\pi}{4}$: слева выражение неположительно, справа неотрицательно.

Шаг 3. Раскрываем модуль на двух частях отрезка. На общей границе оба ответа равны нулю.



На отрезке $[0; \pi/2]$ знак меняется только в $\pi/4$.

Ответ. $\cos x - \sin x$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$; $\sin x - \cos x$ при $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

05. Уравнения с развёрнутым решением

В заданиях 31-36 запишите общее решение и отдельно обоснуйте отбор корней. Рисунок помогает проверить отбор, а запись серий показывает его полноту.

Задание 31

а) Решите уравнение:

$$\cos 2x = \cos x.$$

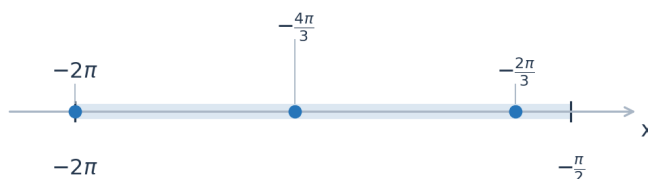
б) Найдите все корни на отрезке $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

Шаг 1. Пусть $t = \cos x$. Тогда $2t^2 - t - 1 = (2t + 1)(t - 1) = 0$. Оба значения $t = 1$, $t = -\frac{1}{2}$ допустимы.

Шаг 2. Общее решение: $x = 2\pi k$ или $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Шаг 3. Для первой серии $-1 \leq k \leq -\frac{1}{4}$, откуда $k = -1$. Для серии $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ получаем $-\frac{4}{3} \leq k \leq -\frac{7}{12}$, откуда $k = -1$. Для серии $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ имеем $-\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{1}{12}$, откуда $k = 0$.

Получены ровно три корня. Левая граница -2π включена; правая граница не является корнем.



Выделен заданный отрезок. Три синие точки принадлежат отрезку и являются корнями.

Ответ. а) $x = 2\pi k$ или $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) -2π , $-\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$.

Задание 32

а) Решите уравнение:

$$\sin 3x = \cos 2x.$$

б) Отберите корни на отрезке $[\pi; 2\pi]$.

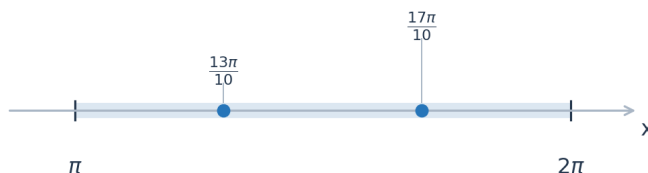
Шаг 1. Запишем $\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ и используем две возможности равенства синусов:

$$3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2\pi k \quad \text{или} \quad 3x = \frac{\pi}{2} + 2x + 2\pi n.$$

Отсюда $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$ или $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Шаг 2. Вторая серия уже содержится в первой при $k = 1 + 5n$. Достаточно оставить первую серию.

Шаг 3. Из $\pi \leq \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5} \leq 2\pi$ следует $\frac{9}{4} \leq k \leq \frac{19}{4}$. Целые значения $k = 3, 4$ дают два корня. Концы отрезка не подходят.



На отрезке $[\pi; 2\pi]$ находятся ровно два корня общей серии.

Ответ. а) $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{10}, \frac{17\pi}{10}$.

Задание 33

а) Решите уравнение:

$$\frac{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1}{\sin x} = 0.$$

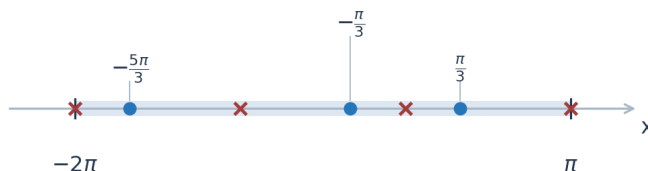
б) Отберите корни на отрезке $[-2\pi; \pi]$.

Шаг 1. ОДЗ: $\sin x \neq 0$, то есть $x \neq \pi k$. Дробь равна нулю только при нулевом числителе и ненулевом знаменателе.

Шаг 2. $(2 \cos x - 1)(\cos x - 1) = 0$. Случай $\cos x = 1$ даёт $x = 2\pi k$ и целиком исключается по ОДЗ. Остаётся $\cos x = \frac{1}{2}$.

Шаг 3. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. Для серии $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ условие отбора даёт $-\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{1}{3}$, то есть $k = -1, 0$. Для серии $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ получаем $-\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{2}{3}$, то есть $k = 0$.

Все три найденных угла имеют ненулевой синус. На рисунке крестиками отмечены запрещённые кратные π .



Синие точки: допустимые корни. Красные крестики: запрещённые кратные π .

Ответ. а) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$.

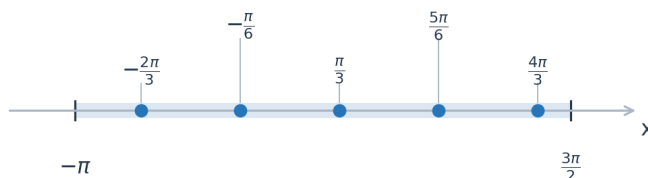
Задание 34

а) Решите уравнение:

$$\sqrt{3} \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0.$$

б) Найдите корни на отрезке $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.**Шаг 1.** Сначала проверим $\cos x = 0$. Тогда левая часть равна $\sqrt{3} \neq 0$, поэтому таких корней нет.**Шаг 2.** Делим на $\cos^2 x$ и обозначаем $t = \tan x$:

$$\sqrt{3}t^2 - 2t - \sqrt{3} = 0, \quad t = \sqrt{3} \text{ или } t = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Шаг 3. Получаем $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ или $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$.**Шаг 4.** Для первой серии $-\frac{4}{3} \leq k \leq \frac{7}{6}$, откуда $k = -1, 0, 1$. Для второй $-\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{5}{3}$, откуда $k = 0, 1$. Объединяем пять разных корней. Случай деления на ноль рассмотрен отдельно, поэтому корни не потеряны.

Отбор обеих серий даёт пять разных корней на заданном отрезке.

Ответ. а) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ или $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$.

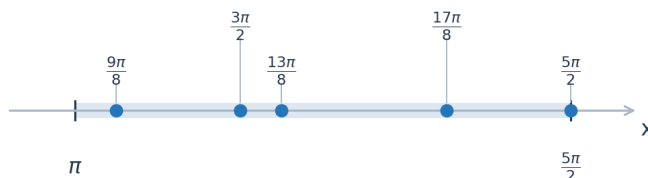
Задание 35

а) Решите уравнение:

$$\sin 3x + \sin x = \cos 3x + \cos x.$$

б) Отберите корни на отрезке $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.**Шаг 1.** Преобразуем обе суммы в произведения:

$$2 \sin 2x \cos x = 2 \cos 2x \cos x.$$

Шаг 2. Переносим влево: $2 \cos x (\sin 2x - \cos 2x) = 0$. На $\cos x$ не делим. Получаем $\cos x = 0$ или $\sin 2x = \cos 2x$.**Шаг 3.** Первая серия: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Во втором уравнении $\cos 2x = 0$ не даёт решений, поэтому $\tan 2x = 1$ и $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$.**Шаг 4.** Отбор даёт $\frac{1}{2} \leq k \leq 2$, то есть $k = 1, 2$, и $\frac{7}{4} \leq n \leq \frac{19}{4}$, то есть $n = 2, 3, 4$. Серии не пересекаются: равенство их членов потребовало бы $4 + 8k = 1 + 4n$, что невозможно по остаткам при делении на 4.

Пять корней, включая правую границу $5\pi/2$. Близкие точки подписаны на разных уровнях.

Ответ. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $k, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{8}, \frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{8}, \frac{17\pi}{8}, \frac{5\pi}{2}$.

Задание 36

а) Найдите все решения уравнения:

$$2 \sin^3 x = \sqrt{2} \cos^2 x + 2 \sin x.$$

б) Выпишите решения из отрезка $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

ФИПИ. Демоверсия ЕГЭ-2026, профильный уровень, задание 13, первый вариант.

Шаг 1. Переносим слагаемые в одну сторону и используем $\sin^2 x - 1 = -\cos^2 x$:

$$2 \sin x (\sin^2 x - 1) - \sqrt{2} \cos^2 x = 0,$$

$$\cos^2 x (2 \sin x + \sqrt{2}) = 0.$$

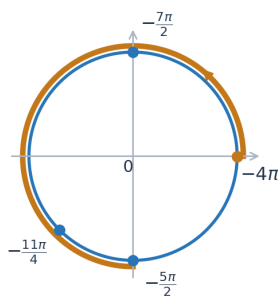
Шаг 2. Не сокращаем на $\cos^2 x$. Решения:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m.$$

Здесь $k, n, m \in \mathbb{Z}$.

Шаг 3. Отбор для первой серии: $-\frac{9}{2} \leq k \leq -3$, значит $k = -4, -3$. Для второй: $-\frac{15}{8} \leq n \leq -\frac{9}{8}$; целых чисел нет. Для третьей: $-\frac{13}{8} \leq m \leq -\frac{7}{8}$, значит $m = -1$.

Шаг 4. На окружности выделена дуга от -4π до $-\frac{5\pi}{2}$ в направлении возрастания угла. Три отмеченных корня согласуются с отбором по целым индексам; правый конец включён.



Дуга от -4π до $-\frac{5\pi}{2}$ идёт против часовой стрелки.
Синим отмечены три корня; правый конец входит в ответ.

Ответ. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $k, n, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{11\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{2}$.

06. Области значений и задачи с параметром

Учитывайте допустимые значения замены, достижимость границ и число различных корней. В задачах с параметром граничные случаи разбирайте отдельно.

Задание 37

Найдите область значений

$$F(x) = \frac{\sin x + \cos x}{2 + \sin x + \cos x}$$

и все значения x , при которых достигаются её границы.

Шаг 1. Положим $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Тогда $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, а знаменатель $2 + t \geq 2 - \sqrt{2} > 0$.

Шаг 2. Функция $g(t) = \frac{t}{2+t}$ строго возрастает на этом отрезке. Действительно, при $t_2 > t_1$ разность равна

$$g(t_2) - g(t_1) = \frac{2(t_2 - t_1)}{(2 + t_2)(2 + t_1)} > 0.$$

Шаг 3. Подставляем крайние значения: $g(-\sqrt{2}) = -1 - \sqrt{2}$, $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$. Непрерывность гарантирует все промежуточные значения.

Шаг 4. Минимум соответствует $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, максимум $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

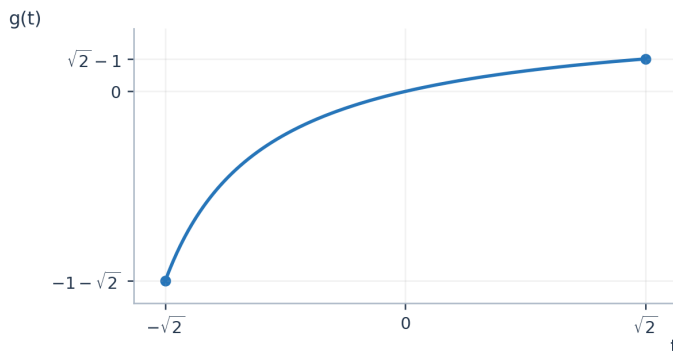


График $g(t) = t/(2+t)$ только на допустимом отрезке $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Ответ. $[-1 - \sqrt{2}; \sqrt{2} - 1]$; минимум при $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, максимум при $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задание 38

Найдите наименьшее и наибольшее значения $\sin x + \cos x - \sin 2x$. Укажите все случаи их достижения.

Шаг 1. Для $t = \sin x + \cos x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ имеем $\sin 2x = t^2 - 1$. Поэтому

$$F = 1 + t - t^2 = \frac{5}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2.$$

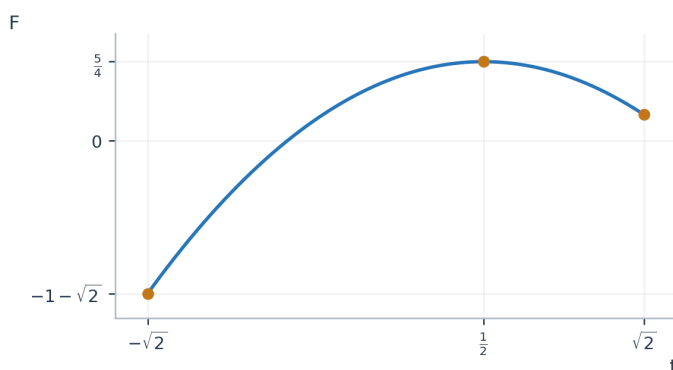
Шаг 2. Вершина $t = \frac{1}{2}$ лежит внутри допустимого отрезка. Максимум равен $\frac{5}{4}$.

Шаг 3. Самая удалённая от $\frac{1}{2}$ точка отрезка есть $t = -\sqrt{2}$. Минимум равен $1 - \sqrt{2} - 2 = -1 - \sqrt{2}$.

Шаг 4. Минимум достигается при $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$. Для максимума нужно

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Если $\gamma = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$, то $x = -\frac{\pi}{4} + \gamma + 2\pi k$ или $x = \frac{3\pi}{4} - \gamma + 2\pi k$.

Проверены вершина и оба конца допустимого отрезка; недопустимые значения замены не использованы.



Парабола $F = 1 + t - t^2$ на допустимом отрезке. Вершина даёт максимум, левый конец минимум.

Ответ. Минимум $-1 - \sqrt{2}$; максимум $\frac{5}{4}$. Все случаи достижения приведены в шаге 4, $k \in \mathbb{Z}$.

Задание 39

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + a = 0$$

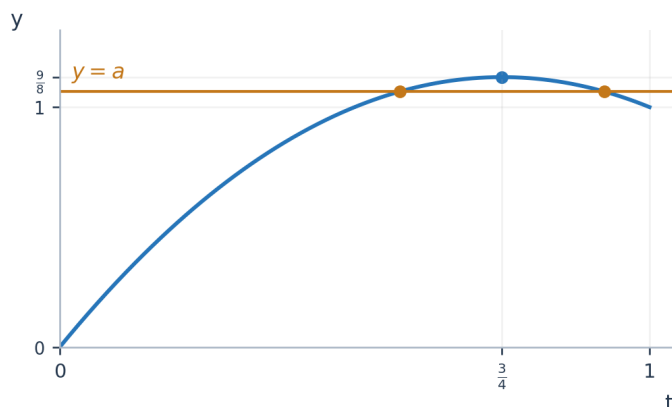
имеет ровно четыре различных корня на полуинтервале $[0; 2\pi)$.

Шаг 1. Пусть $t = \sin x \in [-1; 1]$. Каждому $t \in (-1; 1)$ соответствуют два угла на $[0; 2\pi)$, а $t = \pm 1$ только один. Поэтому нужны два различных корня квадратного уравнения строго внутри $(-1; 1)$.

Шаг 2. Перепишем $a = 3t - 2t^2$. На $[-1; 1]$ вершина параболы имеет координаты $\left(\frac{3}{4}; \frac{9}{8}\right)$, а значения на концах равны -5 и 1 . Два внутренних пересечения с горизонталью $y = a$ возможны только при $1 < a < \frac{9}{8}$.

Шаг 3. Алгебраическая проверка: $t_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8a}}{4}$. Различность требует $a < \frac{9}{8}$. Условие $t_+ < 1$ равносильно $a > 1$. При этих условиях $\frac{1}{2} < t_- < \frac{3}{4} < t_+ < 1$, значит оба корня допустимы и дают четыре угла.

Шаг 4. При $a = 1$ уровни $t = \frac{1}{2}$ и $t = 1$ дают три угла. При $a = \frac{9}{8}$ единственный уровень $t = \frac{3}{4}$ даёт два. Концы ответа исключены.



Часть параболы $y = 3t - 2t^2$ при $0 \leq t \leq 1$. При $1 < a < 9/8$ прямая $y = a$ пересекает её в двух внутренних точках.

Ответ. $a \in \left(1; \frac{9}{8}\right)$.

Задание 40

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sin^2 x - 2a \sin x + a = 0$$

имеет ровно два различных корня на полуинтервале $[0; 2\pi)$.

Шаг 1. Положим $t = \sin x \in [-1; 1]$. Для $q(t) = t^2 - 2at + a$ дискриминант равен $4a(a - 1)$. При $0 < a < 1$ действительных корней нет.

Шаг 2. При $a < 0$ имеем $q(0) = a < 0$, $q(1) = 1 - a > 0$. Один корень всегда лежит в $(0; 1)$ и даёт два угла. Второй отрицателен. Его положение относительно -1 определяется знаком $q(-1) = 1 + 3a$.

Шаг 3. Если $a < -\frac{1}{3}$, отрицательный корень меньше -1 и не подходит. При $a = -\frac{1}{3}$ он равен -1 и добавляет один угол. При $-\frac{1}{3} < a < 0$ он лежит в $(-1; 0)$ и добавляет два угла.

Шаг 4. При $a = 0$ уравнение $t^2 = 0$ даёт $x = 0, \pi$. При $a = 1$ уравнение $(t - 1)^2 = 0$ даёт только $x = \frac{\pi}{2}$. Кратность алгебраического корня не увеличивает число различных углов.

Шаг 5. При $a > 1$: $q(0) > 0$, $q(1) < 0$, а ветви направлены вверх. Один корень лежит в $(0; 1)$, второй больше 1. Значит, углов ровно два.

Значение параметра	Число различных корней по x
$a < -\frac{1}{3}$	2
$a = -\frac{1}{3}$	3
$-\frac{1}{3} < a < 0$	4
$a = 0$	2
$0 < a < 1$	0
$a = 1$	1
$a > 1$	2

Все действительные значения параметра рассмотрены. На оси показаны только случаи с двумя корнями.



Ответ по параметру: две открытые полупрямые и отдельная включённая точка $a = 0$.

Ответ. $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$.