

Урок 8. Тригонометрические уравнения

Одного угла обычно недостаточно для ответа на тригонометрическое уравнение: значения функций повторяются. Разберём единичную окружность, радианы и формулы общих решений, затем научимся отбирать корни на заданном промежутке.

Восемь примеров охватывают синус, косинус, тангенс, сложный аргумент, разложение на множители и замену переменной. Таблицы и рисунок помогают проверить знаки и положение углов. Для закрепления подготовлен тест на 40 заданий.

01. Угол в радианах и единичная окружность

Единичная окружность имеет центр в начале координат и радиус 1. Начальная точка - $(1; 0)$. Положительный угол отсчитывают против часовой стрелки, отрицательный - по часовой стрелке. Радианная мера угла равна длине соответствующей дуги единичной окружности.

Полный оборот равен 2π радиан, то есть 360° . Половина оборота - π или 180° . Поэтому $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$, $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$, $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$. В ответах этого урока углы записываются в радианах.

Косинус угла - горизонтальная координата точки, синус - вертикальная: точка имеет координаты $(\cos x; \sin x)$. Поэтому синус и косинус всегда находятся в промежутке $[-1; 1]$, а $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Табличные значения

Угол	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
Синус	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
Косинус	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
Тангенс	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не определён

Тангенс равен $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и существует только при $\cos x \neq 0$. Записи «tg» и «tan» обозначают одну и ту же функцию; в формулах курса используется «tan».

02. Знаки и периоды

В I четверти обе координаты положительны; во II синус положителен, косинус отрицателен; в III оба отрицательны; в IV синус отрицателен, косинус положителен. Тангенс положителен в I и III четвертях и отрицателен во II и IV.

После полного оборота точка возвращается на прежнее место, поэтому синус и косинус имеют период 2π . У тангенса период π : после половины оборота обе координаты меняют знак, а их отношение сохраняется.

Обозначение. Во всех общих решениях $n \in \mathbb{Z}$: параметр n принимает любые целые значения, в том числе отрицательные и ноль. Запись одной точки без периодического слагаемого обычно не описывает все корни.

03. Простейшие тригонометрические уравнения

Для $\sin x = a$ при $|a| \leq 1$ можно взять $\alpha = \arcsin a$, где $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда решения: $x = \alpha + 2\pi n$ или $x = \pi - \alpha + 2\pi n$. При $|a| > 1$ корней нет.

Для $\cos x = a$ при $|a| \leq 1$ берут $\alpha = \arccos a$, где $0 \leq \alpha \leq \pi$. Решения: $x = \pm \alpha + 2\pi n$. Для $\tan x = a$ решение имеет вид $x = \arctan a + \pi n$.

Частные случаи, которые полезно знать

Уравнение	Все решения, $n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 0$	$x = \pi n$
$\cos x = 0$	$x = \pi/2 + \pi n$
$\sin x = 1$	$x = \pi/2 + 2\pi n$
$\sin x = -1$	$x = -\pi/2 + 2\pi n$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n$

Не добавляйте период π к произвольному решению уравнения с синусом или косинусом: через половину оборота знак функции обычно меняется. Частные случаи нулевых значений объединяют две серии и потому записываются короче.

04. Сложный аргумент, множители и замена

Если внутри функции стоит $2x - \frac{\pi}{6}$, сначала решите уравнение относительно всего аргумента. Например, $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = 0$ даёт $2x - \frac{\pi}{6} = \pi n$. Следовательно, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$. На 2 делятся все слагаемые, включая период.

Уравнение-произведение решают по каждому множителю. В $\sin x(2 \cos x - 1) = 0$ получаются две возможности: $\sin x = 0$ или $\cos x = \frac{1}{2}$. Деление на синус потеряло бы всю первую серию.

Если уравнение квадратное относительно синуса, вводят $t = \sin x$ и обязательно ограничивают $-1 \leq t \leq 1$. Например, корень $t = 2$ не может соответствовать действительному углу. После отбора нужно решить тригонометрические уравнения для оставшихся t .

Полезная формула двойного угла: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Она превращает $2 \sin x \cos x = 1$ в $\sin 2x = 1$, после чего применяется обычный алгоритм сложного аргумента.

В сложных разборах также нужны формулы $\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$ и $\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$. Подставив $v = \pi/4$, получаем $\sin(x - \pi/4) = \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}$. Из периодичности и нечётности синуса следует $\sin(2\pi - x) = -\sin x$. Эти тождества позволяют перейти к обычному разложению на множители.

05. Как отобразить корни на промежутке

Для каждой серии подставьте выражение для x в границы промежутка и найдите целые значения параметра. Например, для $x = \pi n$ на $[-\pi; \pi]$ получаем $-1 \leq n \leq 1$, то есть $n = -1, 0, 1$. Корни: $-\pi, 0$ и π .

Квадратные скобки включают границы, круглые - исключают. На $[0; 2\pi]$ числа 0 и 2π различны и могут оба быть корнями, хотя на окружности им соответствует одна точка. Совпадающие корни из разных серий записывают один раз.

06. Примеры с пошаговыми решениями

Разбор 1. Синус на одном обороте

Условие

Решите уравнение на отрезке $[0; 2\pi]$.

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

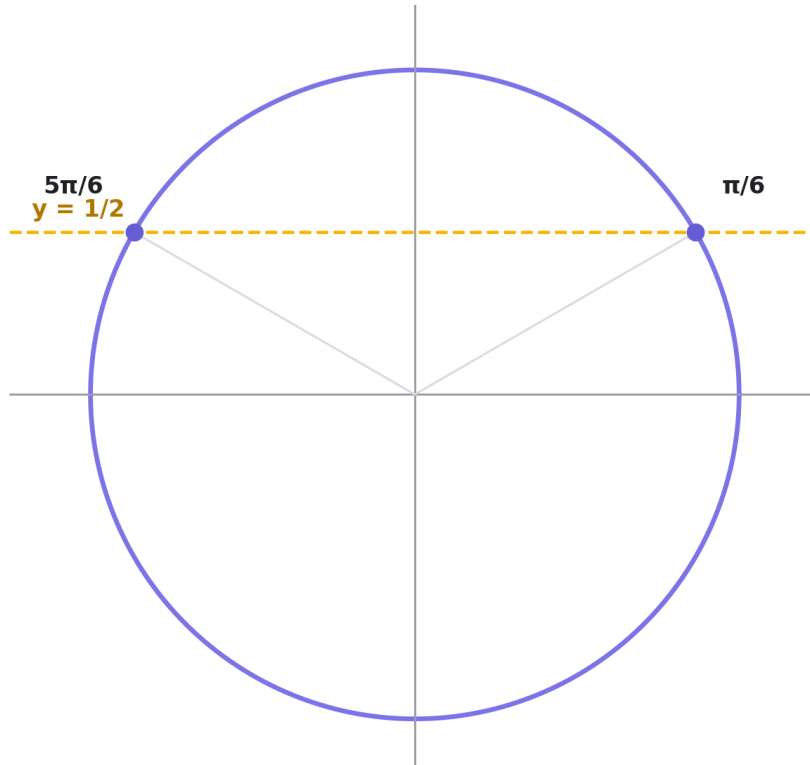


Рис. 1: Единичная окружность: синус равен 1/2 при углах $\pi/6$ и $5\pi/6$.

Короткое правило.

На единичной окружности ордината $1/2$ положительна в I и II четвертях.

До решения.

Опорный угол равен $\pi/6$, потому что $\sin(\pi/6) = 1/2$. На одном обороте ожидаются две точки.

1. Находим опорный угол

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Это табличное значение синуса.

2. Записываем угол в I четверти

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$

В I четверти и синус, и косинус положительны.

3. Записываем угол во II четверти

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Во II четверти синус сохраняет то же положительное значение.

Проверка. Оба угла входят в $[0; 2\pi]$, и $\sin(\pi/6) = \sin(5\pi/6) = 1/2$.

Типичная ошибка. Записать только $\pi/6$ и забыть второй угол с той же ординатой.

Ответ.

$$x = \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$$

Разбор 2. Косинус: общее решение

Условие

Решите уравнение.

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Короткое правило.

Косинус - абсцисса. Значение $-\sqrt{2}/2$ достигается во II и III четвертях; к каждому углу добавляется период 2π .

До решения.

Опорный угол $\pi/4$. Отрицательная абсцисса означает левую половину окружности.

1. Находим угол во II четверти

$$x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Во II четверти косинус отрицателен.

2. Находим угол в III четверти

$$x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

В III четверти косинус также отрицателен.

3. Добавляем период

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Косинус повторяется через 2π .

Проверка. $\cos(3\pi/4)=\cos(5\pi/4)=-\sqrt{2}/2$; прибавление 2π значения не меняет.

Типичная ошибка. Добавить период π : через π знак косинуса меняется.

Ответ.

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Разбор 3. Тангенс сложного аргумента

Условие

Решите уравнение.

$$\tan(2x) = 1$$

Короткое правило.

Сначала решаем уравнение относительно всего аргумента $2x$. Период тангенса равен π .

До решения.

$\tan(\pi/4)=1$. Значит, $2x$ отличается от $\pi/4$ на целое число периодов π .

1. **Записываем решение для аргумента**

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Все углы с тангенсом 1 повторяются через π .

2. **Делим равенство на 2**

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

Делим и постоянный угол, и периодическое слагаемое.

Проверка. $2(\pi/8+\pi n/2)=\pi/4+\pi n$, тангенс каждого такого угла равен 1.

Типичная ошибка. Разделить на 2 только $\pi/4$ и оставить период πn без изменения.

Ответ.

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Разбор 4. Разложение на множители без потери корней

Условие

Решите уравнение.

$$2 \sin x \cos x = \sin x$$

Короткое правило.

Переносим всё в одну часть и выносим общий множитель. Не делим на $\sin x$: он может быть равен нулю.

До решения.

После вынесения $\sin x$ появятся две независимые серии корней.

1. Переносим правую часть

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

Для разложения нужно нулевое значение одной части.

2. Выносим $\sin x$

$$\sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

Одинаковый множитель содержится в обоих слагаемых.

3. Решаем первое уравнение

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n$$

Синус равен нулю на концах диаметров по оси x .

4. Решаем второе уравнение

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

Абсцисса $1/2$ достигается в I и IV четвертях.

Проверка. При $x=\pi n$ обе части равны нулю; при $\cos x=1/2$ после деления на $\sin x$ исходное равенство также выполняется.

Типичная ошибка. Сразу разделить на $\sin x$ и потерять все корни $x=\pi n$.

Ответ.

$$x = \pi n; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Разбор 5. Квадратное уравнение относительно $\sin x$ **Условие**

Решите уравнение.

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

Короткое правило.

Вводим $t=\sin x$ с ограничением $-1 \leq t \leq 1$, решаем квадратное уравнение, затем для каждого допустимого t возвращаемся к углам.

До решения.

Квадратный трёхчлен раскладывается на множители; оба ожидаемых значения t находятся внутри $[-1;1]$.

1. Вводим замену

$$t = \sin x, \quad -1 \leq t \leq 1$$

Синус не выходит за пределы от -1 до 1 .

2. Решаем уравнение для t

$$2t^2 - 3t + 1 = (2t - 1)(t - 1) = 0$$

Получаем $t=1/2$ или $t=1$; оба допустимы.

3. Решаем $\sin x=1$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

Максимум синуса достигается один раз за период.

4. Решаем $\sin x=1/2$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

Ордината $1/2$ положительна в I и II четвертях.

Проверка. Для $\sin x=1$: $2-3+1=0$; для $\sin x=1/2$: $1/2-3/2+1=0$.

Типичная ошибка. Получив t , забыть ограничение $|t| \leq 1$ или записать t как окончательный ответ.

Ответ.

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Разбор 6. Отбор корней на отрезке**Условие**

Решите уравнение и укажите корни, принадлежащие отрезку $[5\pi; 6\pi]$.

$$\cos^2 x + \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

Короткое правило.

Сначала получаем все серии корней, затем отдельно отбираем целые n для каждой серии на заданном отрезке.

До решения.

Раскрытие $\sin(x-\pi/4)$ через $\sin x$ и $\cos x$ позволит свести уравнение к произведению.

1. Раскрываем синус разности

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}$$

Используем формулу $\sin(a-b)$.

2. Упрощаем уравнение

$$2 \cos x (\cos x - \sin x) = 0$$

После возведения в квадрат применяем $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и приводим подобные.

3. Получаем серии

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$\cos x = 0$; либо $\cos x = \sin x$, откуда $\tan x = 1$.

4. Отбираем первую серию

$$5\pi \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq 6\pi \Rightarrow n = 5$$

Единственное целое n между 4,5 и 5,5 - число 5.

5. Отбираем вторую серию

$$5\pi \leq \frac{\pi}{4} + \pi n \leq 6\pi \Rightarrow n = 5$$

Единственное целое n между 4,75 и 5,75 - число 5.

Проверка. Получаем $11\pi/2$ и $21\pi/4$; оба числа лежат между 5π и 6π и удовлетворяют исходному уравнению.

Типичная ошибка. Подставить одно и то же найденное n только в одну серию или не проверить концы отрезка.

Ответ.

$$x = \frac{21\pi}{4}; \frac{11\pi}{2}$$

Разбор 7. Разложение тригонометрического уравнения на множители**Условие**

Решите уравнение и укажите корни на отрезке $[-7\pi/2; -2\pi]$.

$$2 \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x = 2 \cos^3 x$$

Короткое правило.

Переносим выражение с $\cos^3 x$, используем $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ и выносим общий множитель $\sin^2 x$.

До решения.

Нельзя делить на $\sin^2 x$: при $\sin x = 0$ исходное уравнение тоже может выполняться.

1. Переносим и группируем

$$2 \cos x (1 - \cos^2 x) - \sqrt{3} \sin^2 x = 0$$

Выносим $2 \cos x$ из первого и третьего слагаемых.

2. Применяем тождество

$$\sin^2 x (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0$$

$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, после чего появляется общий множитель.

3. Записываем все серии

$$x = \pi n; \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решаем $\sin x = 0$ и $\cos x = \sqrt{3}/2$.

4. Отбираем на отрезке

$$x = -3\pi; \quad -\frac{13\pi}{6}; \quad -2\pi$$

Подставляем целые n в каждую серию и оставляем значения от $-3,5\pi$ до -2π .

Проверка. Все три числа входят в заданный отрезок; первые и последнее дают $\sin x = 0$, средний - $\cos x = \sqrt{3}/2$.

Типичная ошибка. Разделить на $\sin^2 x$ и потерять корни $x = \pi n$.

Ответ.

$$x = -3\pi; \quad -\frac{13\pi}{6}; \quad -2\pi$$

Разбор 8. Группировка тригонометрического уравнения**Условие**

Решите уравнение и укажите корни на отрезке $[-\pi; \pi/2]$.

$$2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin(2\pi - x) + \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{6} \cos x$$

Короткое правило.

Упрощаем $\sin(2\pi - x)$ и $\sin 2x$, затем группируем четыре слагаемых в произведение двух множителей.

До решения.

$\sin(2\pi - x) = -\sin x$. После переноса правой части выражение должно разложиться без деления на $\sin x$ или $\cos x$.

1. Применяем формулы

$$2 \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - \sqrt{6} \cos x = 0$$

Используем $\sin(2\pi - x) = -\sin x$ и $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

2. Группируем

$$(\sin x + \sqrt{3} \cos x) (2 \sin x - \sqrt{2}) = 0$$

Раскрытие скобок точно восстанавливает четыре слагаемых.

3. Решаем первый множитель

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$$

Приводим линейную комбинацию к одной функции.

4. Решаем второй множитель

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

Синус положителен в I и II четвертях.

5. Отбираем корни

$$x = -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}$$

Только эти значения из трёх серий принадлежат $[-\pi; \pi/2]$.

Проверка. $-\pi/3$ и $\pi/4$ лежат на отрезке и обращают один из множителей в ноль.

Типичная ошибка. Считать $\sin(2\pi - x) = \sin x$ или потерять одну из серий $\sin x = \sqrt{2}/2$.

Ответ.

$$x = -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}$$

07. Основные формулы

$$\sin x = a \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$$

$$\cos x = a \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n$$

$$\tan x = a \Rightarrow x = \arctan a + \pi n$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

08. Вопросы по теме**Почему у тригонометрического уравнения много корней?**

Тригонометрические функции периодичны: значения повторяются после оборота или половины оборота. Поэтому общее решение содержит целочисленный параметр.

Нужно ли включать оба конца отрезка от 0 до 2π?

Если оба конца удовлетворяют уравнению, да. Это разные числа, хотя им соответствует одна точка окружности. Для открытых границ правило другое.