



Урок 22. Тестовые задания (40 вопросов): ответы и решения

40 заданий: 36 по теме «Тригонометрические уравнения: полное решение» и 4 на повторение. Задания 1-20: начальный уровень, 21-35: средний, 36-40: повышенный уровень. Решения открываются отдельно под каждым заданием.

01. Начальный уровень: задания 1-20

Задание 1

Решите $\sin x = 0$ на $[0; 2\pi]$.

1. $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
2. $0 \leq \pi n \leq 2\pi$ даёт $n = 0, 1, 2$.
3. Корни: $0, \pi, 2\pi$.

Ответ

$0; \pi; 2\pi$

Задание 2

Решите $\cos x = 0$ на $[-\pi; \pi]$.

1. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.
2. На промежутке подходят $n = -1$ и $n = 0$.
3. Получаем $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Ответ

$-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$

Задание 3

Решите $\tan x = 0$ на $[-2\pi; 2\pi]$.

1. $x = \pi n$.
2. $-2 \leq n \leq 2$.
3. Корни: $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$.

Ответ

$-2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi$

Задание 4

Решите $\sin x = \frac{1}{2}$ на $[0; 2\pi]$.

1. $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.
2. На одном обороте подходит $n = 0$.

3. Корни: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Ответ

$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

Задание 5

Решите $\cos x = \frac{1}{2}$ на $[0; 2\pi]$.

1. $x = \frac{\pm\pi}{3} + 2\pi n$.

2. На отрезке получаем $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$.

3. Оба значения дают косинус $\frac{1}{2}$.

Ответ

$\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

Задание 6

Решите $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ на $[0; 2\pi]$.

1. Опорный угол $\frac{\pi}{4}$.

2. Синус отрицателен в III и IV четвертях.

3. Корни: $\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Ответ

$\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

Задание 7

Решите $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ на $[-\pi; \pi]$.

1. $x = \frac{\pm 5\pi}{6} + 2\pi n$.

2. На заданном промежутке подходят представители при $n = 0$.

3. Корни: $-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Ответ

$-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

Задание 8

Решите $\tan x = 1$ на $[0; 2\pi]$.

1. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

2. Подходят $n = 0$ и $n = 1$.

3. Корни: $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

Ответ

$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

Задание 9

Решите $\tan x = -\sqrt{3}$ на $[0; 2\pi]$.

1. Основной угол можно взять $-\frac{\pi}{3}$.

2. $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$.

3. На отрезке получаем $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$.

Ответ

$$\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

Задание 10

Решите $\cos x = -1$ на $[0; 2\pi]$.

1. $x = \pi + 2\pi n$.

2. На одном обороте подходит $n = 0$.

3. $x = \pi$.

Ответ

$$\pi$$

Задание 11

Решите $2 \sin x - 1 = 0$ на $[-\pi; \pi]$.

1. $\sin x = \frac{1}{2}$.

2. Общие серии: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.

3. На промежутке остаются $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$.

Ответ

$$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Задание 12

Решите $2 \cos x + 1 = 0$ на $[0; 2\pi]$.

1. $\cos x = -\frac{1}{2}$.

2. Косинус отрицателен во II и III четвертях.

3. Корни: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$.

Ответ

$$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

Задание 13

а) Решите уравнение.

$$2 \tan x - 2 = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

1. $\tan x = 1$.

2. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

3. Подходят $n = -1, 0$: $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$.

4. Общее решение пункта а: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

б)

$$-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$$

Задание 14

а) Решите уравнение.

$$\sin 2x = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

1. $2x = \pi n$.

2. $x = \frac{\pi n}{2}$.

3. При $n = 0, 1, 2 : 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

4. Общее решение пункта а: $x = \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z}$.

б)

$0; \frac{\pi}{2}; \pi$

Задание 15

а) Решите уравнение.

$$\cos 2x = 1.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1. $2x = 2\pi n$.

2. $x = \pi n$.

3. При $n = 0, 1, 2 : 0, \pi, 2\pi$.

4. Общее решение пункта а: $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \pi n; n \in \mathbb{Z}$.

б)

$0; \pi; 2\pi$

Задание 16

а) Решите уравнение.

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1. $x - \frac{\pi}{6} = \pi n$.

2. $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$.

3. Подходят $n = 0, 1 : \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$.

4. Общее решение пункта а: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \frac{\pi}{6} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$.

б)

$\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

Задание 17

Повторение: объём куба

В кубе ребро равно 4 . Найдите объём.

1. $V = a^3$.

2. $V = 4^3 = 64$.

Ответ

64

Задание 18

Повторение: теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике катеты равны 5 и 12 . Найдите гипотенузу.

1. $c = \sqrt{5^2 + 12^2}$.

2. $c = 13$.

Ответ

13

Задание 19

Повторение: векторы

Даны точки $A(1; 2)$ и $B(7; 10)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

1. Координаты вектора: $(6; 8)$.

2. Длина равна $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Ответ

10

Задание 20

Повторение: вероятность

Вероятность успеха в одном испытании равна 0,3 . Найдите вероятность неудачи.

1. События противоположны.

2. $1 - 0,3 = 0,7$.

Ответ

0,7

02. Средний уровень: задания 21-35

Задание 21

а) Решите уравнение.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1. $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

2. $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$.

3. Корни на отрезке: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$.

4. Общее решение пункта а: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

б)

$$\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$

Задание 22

а) Решите уравнение.

$$\tan 2x = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

1. $2x = \pi n$.

2. $x = \frac{\pi n}{2}$.

3. Подходят $n = 0, 1, 2$: $0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

4. Общее решение пункта а: $x = \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \frac{\pi n}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$.

б)

$$0; \frac{\pi}{2}; \pi$$

Задание 23

а) Решите уравнение.

$$\sin x (2 \cos x - 1) = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1. $\sin x = 0$ или $\cos x = \frac{1}{2}$.

2. Первая ветвь: $0, \pi, 2\pi$.

3. Вторая: $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$; объединяем.

4. Общее решение пункта а: $x = \pi n$; $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \pi n$; $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

б)

$$0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}; 2\pi$$

Задание 24

а) Решите уравнение.

$$(2 \sin x - 1) (2 \cos x - \sqrt{2}) = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1. $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Первая ветвь: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

3. Вторая: $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$; объединяем по возрастанию.

4. Общее решение пункта а: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

б)

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$$

Задание 25

а) Решите уравнение.

$$\sin^2 x = 1.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1. $\sin x = \pm 1$.

2. На одном обороте это вершины окружности.

3. Корни: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

4. Общее решение пункта а: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

б)

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

Задание 26

а) Решите уравнение.

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1. $\cos x = \pm \frac{1}{2}$.

2. Для $\frac{1}{2} : \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$; для $-\frac{1}{2} : \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

3. Объединяем четыре корня.

4. Общее решение пункта а: $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

б)

$$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

Задание 27

а) Решите уравнение.

$$2 \sin^2 x - 1 = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1. $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, поэтому $\sin x = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$.
2. На окружности получаем четыре диагональные точки.
3. Корни: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.
4. Общее решение пункта а: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z}$.

б)

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

Задание 28

а) Решите уравнение.

$$\sin x \cos x = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

1. $\sin x = 0$ или $\cos x = 0$.
2. Первая ветвь: $-\pi, 0, \pi$; вторая: $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.
3. Объединяем пять корней.
4. Общее решение пункта а: $x = \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z}$.

б)

$$-\pi; -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; \pi$$

Задание 29

а) Решите уравнение.

$$\sin x (1 + \cos x) = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1. $\sin x = 0$ или $\cos x = -1$.
2. Первая ветвь даёт $0, \pi, 2\pi$.
3. Вторая даёт π , который уже учтён.
4. Общее решение пункта а: $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \pi n; n \in \mathbb{Z}$.

б)

$$0; \pi; 2\pi$$

Задание 30

а) Решите уравнение.

$$2 \sin x \cos x = 1.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1. Используем $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

2. $\sin 2x = 1$, значит $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

3. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$; подходят $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

4. Общее решение пункта а: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$.

Ответ а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in Z$.

б)

$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

Задание 31

а) Решите уравнение.

$$\cos 2x = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

1. $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

3. Подходят $n = 0, 1$: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

4. Общее решение пункта а: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где $n \in Z$.

Ответ а) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.

б)

$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

Задание 32

а) Решите уравнение.

$$1 - 2 \sin^2 x = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1. $\sin^2 x = \frac{1}{2}$.

2. $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Корни: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

4. Общее решение пункта а: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где $n \in Z$.

Ответ а) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.

б)

$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

Задание 33

а) Решите уравнение.

$$\sin x = \cos x.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1. При $\cos x = 0$ равенство не выполняется, поэтому можно разделить на $\cos x$.
2. $\tan x = 1$.
3. Корни: $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.
4. Общее решение пункта а: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

б)

$$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

Задание 34

а) Решите уравнение.

$$\sin x + \cos x = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1. При $\cos x = 0$ исходное равенство не выполняется.
2. $\tan x = -1$.
3. Корни: $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.
4. Общее решение пункта а: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

б)

$$\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

Задание 35

а) Решите уравнение.

$$2 \sin x + \sqrt{3} = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

1. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. На отрицательной полуокружности в указанной записи находятся два корня.
3. Получаем $-\frac{2\pi}{3}$ и $-\frac{\pi}{3}$.
4. Общее решение пункта а: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

б)

$$-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$$

03. Повышенный уровень: задания 36-40

Задание 36

а) Решите уравнение.

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1. $t = \cos x \in [-1; 1]$.

2. $(2t - 1)(t + 1) = 0$, поэтому $t = \frac{1}{2}$ или $t = -1$.

3. Корни: $\frac{\pi}{3}$, π , $\frac{5\pi}{3}$.

4. Общее решение пункта а: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $x = \pi + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $x = \pi + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

б)

$\frac{\pi}{3}$; π ; $\frac{5\pi}{3}$

Задание 37

а) Решите уравнение.

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1. $t = \sin x \in [-1; 1]$.

2. $(2t - 1)(t - 1) = 0$, значит $t = \frac{1}{2}$ или $t = 1$.

3. Корни: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$.

4. Общее решение пункта а: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

б)

$\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$

Задание 38

а) Решите уравнение.

$$4 \cos^2 x - 1 = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1. $(2 \cos x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$.

2. $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$.

3. Получаем $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

4. Общее решение пункта а: $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

б)

$\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$

Задание 39

а) Решите уравнение.

$$\cos 2x = \cos x.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1. $2 \cos^2 x - 1 = \cos x$.

2. $2t^2 - t - 1 = 0$, где $t = \cos x$; корни $t = 1$ и $t = -\frac{1}{2}$.

3. Получаем $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$.

4. Общее решение пункта а: $x = \frac{2\pi n}{3}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \frac{2\pi n}{3}; n \in \mathbb{Z}$.

б)

$0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; 2\pi$

Задание 40

а) Решите уравнение.

$$\sin \frac{x}{2} = 1.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; 4\pi]$.

1. $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

2. $x = \pi + 4\pi n$.

3. На отрезке подходит только $n = 0$, поэтому $x = \pi$.

4. Общее решение пункта а: $x = \pi + 4\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ а) $x = \pi + 4\pi n; n \in \mathbb{Z}$.

б)

π