

Урок 11. Производная и касательная

Производная связывает скорость изменения функции с наклоном касательной. Научимся вычислять производную в точке, составлять уравнение касательной и читать график производной. Восемь разборов показывают, как отличать значение функции от её производной.

01. Что означает производная

Функция связывает входное число с результатом. Например, $s(t)$ показывает координату тела в момент t . Значение $s(3)$ отвечает на вопрос «где находится тело?», а производная $s'(3)$ - «с какой скоростью меняется координата в этот момент?». Эти величины имеют разные единицы и разный смысл.

За промежуток времени изменение координаты равно $s(t + \Delta t) - s(t)$. Средняя скорость на этом промежутке получается делением изменения координаты на время. Если промежуток становится очень маленьким и отношение приближается к одному числу, это число называют производной. Для вычислений в этом уроке достаточно таблицы производных; определение помогает понимать результат.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Здесь h - маленькое изменение аргумента, а не ещё одно значение функции. Например, у $f(x) = x^2$ отношение равно $2x_0 + h$. При уменьшении h оно приближается к $2x_0$, поэтому $f'(x) = 2x$.

Главное правило. Сначала находят функцию-производную, затем подставляют нужный аргумент. Подстановка числа в исходную функцию даёт её значение, а не производную.

02. Правила вычисления и область применения

Для постоянной C производная равна нулю. Для степени с натуральным показателем $(x^n)' = nx^{n-1}$. Постоянный множитель сохраняется, а сумма и разность дифференцируются по слагаемым. Поэтому у $3x^2 - 5x + 7$ производная равна $6x - 5$.

Функция	Производная	Ограничение
C	0	Нет
x	1	Нет
x^n	nx^{n-1}	Здесь n - натуральное число
$1/x$	$-1/x^2$	$x \neq 0$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	Производная по этой формуле при $x > 0$

Функция $\sqrt{x}$ определена также при $x = 0$, но конечной производной в этой точке нет. Не переносите автоматически область определения функции на её производную.

Если вместо x стоит выражение $u(x)$, появляется дополнительный множитель $u'(x)$. Так, для $(2x - 1)^2$ сначала дифференцируют внешний квадрат, затем умножают на производную внутреннего выражения: $2(2x - 1) \cdot 2$. Проверить результат можно раскрытием скобок перед дифференцированием.

03. Производная и наклон касательной

Прямая $y = kx + b$ поднимается при $k > 0$ и опускается при $k < 0$. Её наклон равен отношению изменения высоты к изменению горизонтальной координаты:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2.$$

У касательной к графику в точке x_0 этот коэффициент равен $f'(x_0)$. Для вычисления наклона берите две точки **касательной**, а не две произвольные точки кривой. Координатные клетки могут иметь разную цену по осям: сначала прочитайте подписи.

Касательная проходит через $(x_0; f(x_0))$, поэтому её уравнение:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Например, для x^2 при $x_0 = 2$ известны высота 4 и наклон 4. Получаем $y = 4 + 4(x - 2) = 4x - 4$. Проверка: при $x = 2$ прямая даёт 4. Если касательная параллельна заданной прямой, приравнивают их коэффициенты наклона; свободные члены при этом могут различаться.

04. Как читать график производной

Когда изображена f' , высота графика - уже значение производной. Участки выше горизонтальной оси означают возрастание f , ниже оси - убывание. Возрастание самого графика f' отвечает другому вопросу: как меняется наклон f .

Нули производной - кандидаты на экстремум. Переход знака с плюса на минус даёт максимум, с минуса на плюс - минимум. Если знак не меняется, нуль производной может не быть экстремумом: у x^3 производная в нуле равна нулю, но функция продолжает возрастать.

Критической называют внутреннюю точку области определения, где производная равна нулю или не существует. Запрещённое значение аргумента критической точкой функции не является. Например, для $x + 1/x$ число 0 исключено из области определения.

05. Проверка результата

Убедитесь, что ответ относится к требуемой величине: f , f' или уравнению прямой. В задаче про движение производная координаты - проекция скорости, которая может быть отрицательной. Модуль скорости неотрицателен. При поиске скорости по пройденному пути единицы производной - единицы пути, делённые на единицы времени.

06. Подробные объяснения и разобранные примеры

Разбор 1. Первая производная: квадрат**УСЛОВИЕ**

Для функции $f(x)=x^2$ найдите $f'(x)$ и значение $f'(3)$.

$$f(x) = x^2$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

В правиле $(x^n)' = nx^{n-1}$ показатель становится множителем, а новая степень на единицу меньше.

ДО РЕШЕНИЯ.

График $y=x^2$ при $x=3$ поднимается вправо, поэтому ожидаем положительный наклон.

1. Определяем степень

$$n = 2$$

Функция состоит из одного степенного слагаемого x^2 .

2. Применяем правило

$$f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$$

Двойка переносится вперёд, степень уменьшается до 1.

3. Подставляем точку

$$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

Сначала получаем формулу производной, затем подставляем $x=3$.

4. Истолковываем

$$k_{\text{кас}} = 6 > 0$$

Касательная в этой точке поднимается слева направо.

Проверка. Знак положительный, что согласуется с правой ветвью параболы.

Типичная ошибка. Записать $f(x)=x$ или $f'(3)=9$, то есть перепутать значение функции со значением производной.

ОТВЕТ.

$$f'(x) = 2x, \quad f'(3) = 6$$

Разбор 2. Производная многочлена в точке**УСЛОВИЕ**

Найдите значение производной функции в точке $x=2$.

$$f(x) = x^3 - 4x + 7$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Дифференцируем каждое слагаемое отдельно; производная постоянного числа равна нулю.
ДО РЕШЕНИЯ.

Нужно найти $f'(2)$, а не $f(2)$. Число 7 исчезнет после дифференцирования.

1. Дифференцируем куб

$$(x^3)' = 3x^2$$

Показатель 3 становится коэффициентом.

2. Дифференцируем остальные слагаемые

$$(-4x)' = -4, \quad 7' = 0$$

Производная ax равна a , постоянной - 0.

3. Собираем производную

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

Производная суммы равна сумме производных.

4. Подставляем $x=2$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 12 - 4 = 8$$

Квадрат вычисляем до умножения.

Проверка. $f(2)=8>0$: около $x=2$ функция возрастает.

Типичная ошибка. Подставить $x=2$ в исходную функцию и получить 7 - это $f(2)$, а не $f'(2)$.

ОТВЕТ.

8

Разбор 3. Наклон прямой по двум точкам

УСЛОВИЕ

Прямая проходит через точки $A(1;2)$ и $B(5;10)$. Найдите её угловой коэффициент. Если эта прямая - касательная к графику f в точке x_0 , чему равно $f'(x_0)$?

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Угловой коэффициент прямой равен отношению изменения y к изменению x . Для касательной это и есть значение производной.

ДО РЕШЕНИЯ.

При движении от A к B обе координаты растут, поэтому наклон должен быть положительным.

1. Находим вертикальное изменение

$$\Delta y = 10 - 2 = 8$$

Вычитаем y -координаты в одном порядке.

2. Находим горизонтальное изменение

$$\Delta x = 5 - 1 = 4$$

Порядок вычитания должен совпадать с порядком для Δy .

3. Вычисляем наклон

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8}{4} = 2$$

На каждый шаг вправо прямая поднимается на 2.

4. Связываем с производной

$$f'(x_0) = k = 2$$

Производная равна угловому коэффициенту касательной.

Проверка. Из А при увеличении x на 4 получаем увеличение y на $2 \cdot 4 = 8$ и приходим в В.

Типичная ошибка. Перевернуть дробь и вычислить $\Delta x / \Delta y$.

ОТВЕТ.

$$k = 2, \quad f'(x_0) = 2$$

Разбор 4. Уравнение касательной к параболе**УСЛОВИЕ**

Составьте уравнение касательной к графику $y=x^2$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

$$f(x) = x^2, \quad x_0 = 1$$

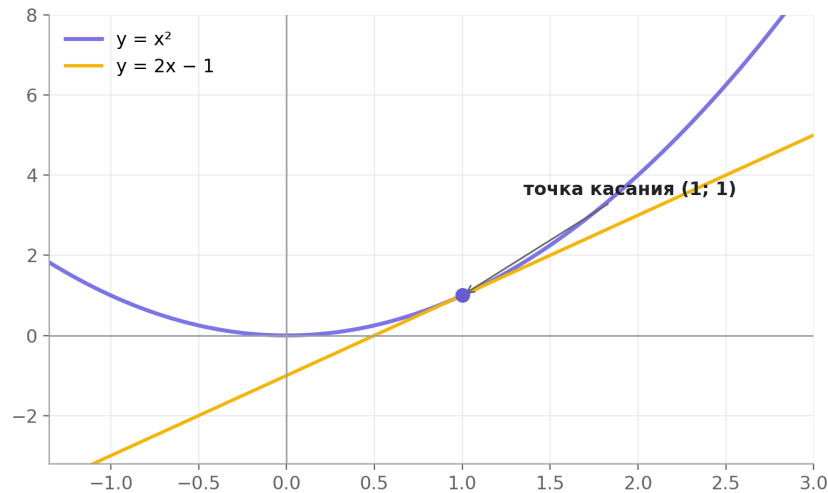


Рис. 1: Схема к разбору 4.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

В формуле касательной отдельно вычисляем точку касания $f(x_0)$ и наклон $f'(x_0)$.

ДО РЕШЕНИЯ.

Точка касания имеет координаты $(1;1)$, а наклон на правой ветви параболы положителен.

1. Находим точку на графике

$$f(1) = 1^2 = 1$$

Касательная обязана проходить через $(1;1)$.

2. Находим производную и наклон

$$f'(x) = 2x, \quad f'(1) = 2$$

Угловым коэффициентом касательной равен 2.

3. Подставляем в формулу

$$y = 1 + 2(x - 1)$$

Используем $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

4. Приводим к обычному виду

$$y = 2x - 1$$

Раскрываем скобки: $1+2x-2=2x-1$.

Проверка. При $x=1$ получаем $y=1$; коэффициент при x равен найденному наклону 2.

Типичная ошибка. Взять $f(1)=2$, но забыть, что касательная проходит через $(1;1)$, и написать $y=2x$.

ОТВЕТ.

$$y = 2x - 1$$

Разбор 5. Промежутки возрастания по формуле f'

УСЛОВИЕ

Известно, что $f(x)=3x^2-12$. Найдите промежутки возрастания и убывания функции f .

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Разлагаем производную на множители, отмечаем её нули и определяем знак на каждом промежутке.

ДО РЕШЕНИЯ.

Коэффициент при x^2 положительный, поэтому далеко слева и справа производная положительна.

1. Разлагаем на множители

$$f'(x) = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$$

Используем разность квадратов.

2. Находим нули

$$x = -2; 2$$

Постоянный множитель 3 в ноль не обращается.

3. Расставляем знаки

$$\begin{array}{ccccc} (+) & | & (-) & | & (+) \\ & -2 & & 2 & \end{array}$$

У произведения двух простых линейных множителей знак меняется в каждом корне.

4. Переводим знаки в поведение f

$$f \uparrow \text{ на } (-\infty; -2) \cup (2; +\infty), \quad f \downarrow \text{ на } (-2; 2)$$

Плюс производной означает возрастание, минус - убывание.

Проверка. В $x=-2$ знак $+\rightarrow-$ даёт максимум, в $x=2$ знак $-\rightarrow+$ даёт минимум.

Типичная ошибка. Исследовать, возрастает ли сама парабола $y=f(x)$, вместо проверки знака f' .

ОТВЕТ.

$$\uparrow: (-\infty; -2) \cup (2; +\infty); \quad \downarrow: (-2; 2)$$

Разбор 6. Точка максимума по графику производной

УСЛОВИЕ

На рисунке изображён график $y=f'(x)$ на интервале $(-5;5)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.

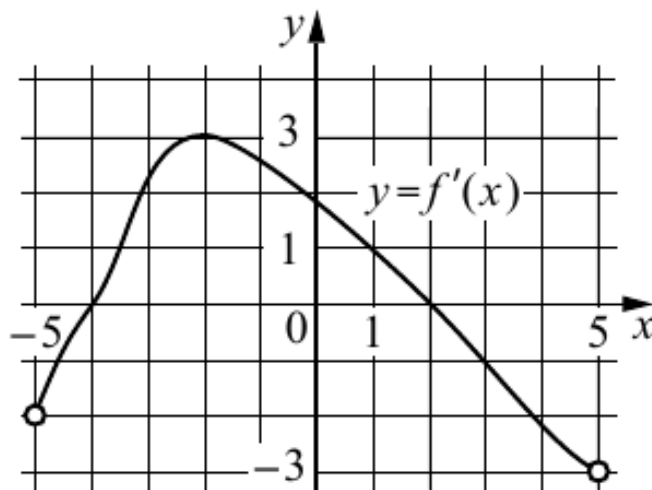


Рис. 2: Схема к разбору 6.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Максимум f возникает там, где график f' пересекает ось Ox сверху вниз: знак производной меняется с плюса на минус.

ДО РЕШЕНИЯ.

Высота вершины графика f' не отвечает на вопрос. Нужна абсцисса пересечения с осью Ox и направление смены знака.

1. Находим участки выше оси

$$f'(x) > 0$$

На этих x исходная функция f возрастает.

2. Находим участок ниже оси

$$f'(x) < 0$$

После нужного пересечения функция f убывает.

3. Читаем переход по сетке

$$x = 2 : \quad + \rightarrow -$$

В точке $x=2$ рост f сменяется убыванием.

4. Записываем абсциссу максимума

$$x_{\max} = 2$$

В кратком ответе требуется именно координата x .

Проверка. Слева от 2 график f' выше оси, справа - ниже.

Типичная ошибка. Назвать максимум графика f' или считать ответом его ординату 3.

ОТВЕТ.

2

Разбор 7. Точки, лежащие на промежутках убывания

УСЛОВИЕ

На оси отмечены девять точек $x_1, \dots, x_9$, а на рисунке дан график $y=f'(x)$. Сколько отмеченных точек принадлежит промежуткам убывания функции f ?

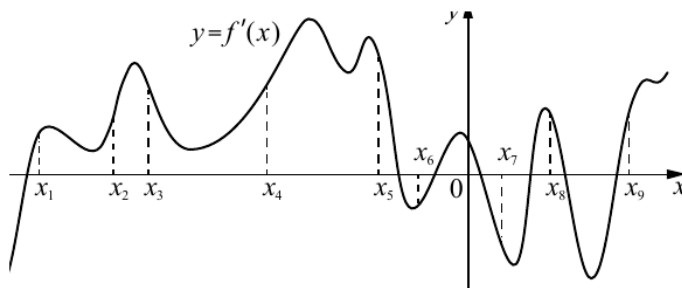


Рис. 3: Схема к разбору 7.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Функция f убывает при $f' < 0$, то есть там, где график производной расположен ниже оси Ox .

ДО РЕШЕНИЯ.

Проверяем высоту графика f' над каждой отмеченной абсциссой; направление самой кривой f' неважно.

1. Формулируем критерий

$$f \downarrow \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

Отрицательная мгновенная скорость изменения означает убывание.

2. Просматриваем $x_1, \dots, x_5$

$$f'(x_i) > 0$$

Над этими отметками график находится выше Ox .

3. Находим отметки ниже оси

$$f'(x_6) < 0, \quad f'(x_7) < 0$$

Только x_6 и x_7 попадают в отрицательные участки.

4. Проверяем оставшиеся точки

$$f'(x_8) > 0, \quad f'(x_9) > 0$$

Они не принадлежат промежуткам убывания.

5. Считаем

2

Подходят две отмеченные точки.

Проверка. Перечень подходящих точек выписан до подсчёта: x_6 и x_7 .

Типичная ошибка. Считать точки, в которых график f идёт вниз, хотя он может идти вниз и оставаться выше Ox .

ОТВЕТ.

2

Разбор 8. Число точек максимума на отрезке**УСЛОВИЕ**

На рисунке изображён график $y=f(x)$ на интервале $(-9;10)$. Найдите число точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6;8]$.

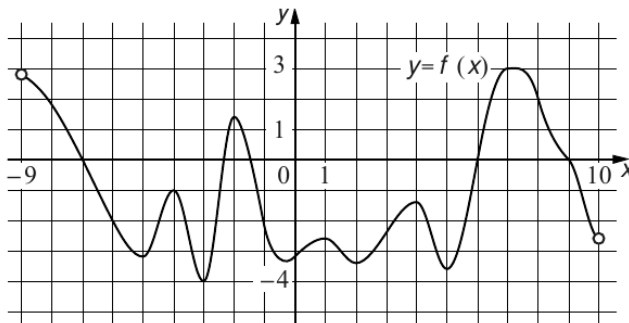


Рис. 4: Схема к разбору 8.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Считаем только пересечения Ox со сменой $+\rightarrow-$ и отдельно проверяем, попадает ли их абсцисса в заданный отрезок.

ДО РЕШЕНИЯ.

Касание оси без смены знака не даёт максимума; переход $-\rightarrow+$ даёт минимум и тоже не считается.

1. Ограничиваем просмотр

$$x \in [-6; 8]$$

Переходы за пределами отрезка не входят в ответ.

2. Отмечаем все нули f' на отрезке

$$f'(x) = 0$$

Только возле них возможна смена монотонности f .

3. Классифицируем переходы

$$- \rightarrow + - \text{ минимум}; \quad + \rightarrow - - \text{ максимум}$$

Нужны только переходы второго типа.

4. Считаем переходы $+\rightarrow-$

$$N_{\max} = 1$$

На заданном отрезке такой переход ровно один.

Проверка. Поздний переход из отрицательных значений в положительные даёт минимум и не увеличивает счётчик максимумов.

Типичная ошибка. Посчитать все пересечения оси Ox или все вершины самого графика f .
ОТВЕТ.

1

07. Опорные формулы

$$(C)' = 0, \quad (x^n)' = nx^{n-1}, \quad (af + bg)' = af' + bg'$$

$$k_{\text{кас}} = f'(x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ возрастает}; \quad f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ убывает}$$

08. Вопросы по теме

Можно ли сначала подставить число, а потом найти производную?

После подстановки получится постоянное число, и его производная будет нулевой. Сначала вычисляйте производную функции, затем подставляйте аргумент.

Какие точки брать для наклона касательной?

Две разные точки именно на касательной. Для каждой прочитайте координаты с учётом масштаба осей.

09. Самостоятельная работа

Сначала решите задания 1-20 в тесте. После проверки переходите к заданиям 21-35, затем к 36-40. Задания на повторение выделены отдельно. К каждому ошибочному ответу запишите причину и повторите решение без подсказки.

Предыдущая тема: Функции и графики.

Следующая тема: Экстремумы и наибольшее значение.