



Классическая вероятность

Задания, решения и ответы

40 заданий с пошаговыми решениями и ответами. Сначала выполните задание самостоятельно, затем сравните ход рассуждений с разбором.

01. Свойства и базовые методы: задания 1-10

Задание 1

Правильный игровой кубик бросают один раз. Найдите вероятность того, что число очков чётно и больше 2.

Исход - число от 1 до 6; все шесть чисел равновозможны. Одновременно двум условиям удовлетворяют только 4 и 6, но не 2. Поэтому $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Союз «и» означает пересечение условий.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задание 2

Среди 50 участниц соревнования 22 представляют Японию, 13 - Китай, остальные - Корею. Порядок выступлений равновероятно выбирается из всех перестановок. Какова вероятность, что первой выступит участница из Кореи?

Из Кореи $50 - 22 - 13 = 15$ участниц. Каждая из 50 одинаково вероятно занимает первое место: для каждой остаётся $49!$ порядков остальных. Значит, $P = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0,3$. Страны не являются равновозможными исходами: их команды имеют разную численность.

Ответ. 0,3.

Задание 3

В мешке 4 красных, 3 синих и 5 белых одинаковых на ощупь шаров. Один шар выбирают равновероятно. Найдите вероятность того, что он не белый.

Всего $4 + 3 + 5 = 12$ отдельных шаров. Не белых $4 + 3 = 7$; красный и синий цвета несовместимы. Поэтому $P = \frac{7}{12}$. Через дополнение получаем то же: $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$. Три названия цветов не следует считать тремя равновозможными исходами.

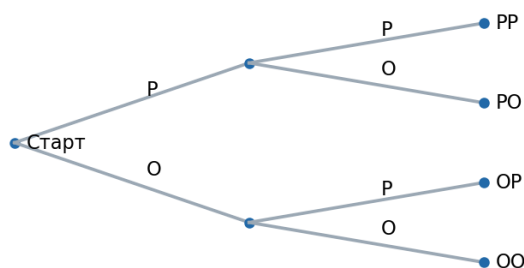
Ответ. $\frac{7}{12}$.

Задание 4

Дважды независимо бросают симметричную монету. Найдите вероятность ровно одного орла.

Упорядоченные исходы ОО, ОР, РО, РР равновероятны: каждый имеет вероятность $\frac{1}{4}$. Благоприятны ОР и РО. Следовательно, $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Событие «один орёл и одна решка» объединяет два пути, а не один из трёх равновозможных вариантов.

Ответ. $\frac{1}{2}$.



Четыре равновозможных пути двух бросков; ОР и РО – разные исходы.

Задание 5

Из всех натуральных чисел от 1 до 30 включительно равновероятно выбирают одно. Найдите вероятность делимости на 4 или на 6.

Кратных 4 – семь, кратных 6 – пять. Кратные обоим числам делятся на 12: это 12 и 24. Они посчитаны дважды, поэтому благоприятных чисел $7 + 5 - 2 = 10$.

Вероятность $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Число 30 включено и учитывается как кратное 6.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задание 6

Из колоды 36 карт (четыре масти, по девять карт каждой масти) равновероятно выбирают одну карту. Найдите вероятность, что это туз или карта червонной масти.

Тузов четыре, червонных карт девять; червонный туз входит в обе группы.

Поэтому подходит $4 + 9 - 1 = 12$ карт. $P = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. Вычитание пересечения устраняет ровно один повторный учёт.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задание 7

Из всех двузначных натуральных чисел равновероятно выбирают одно.

Найдите вероятность того, что его цифры различны.

Чисел от 10 до 99 включительно $99 - 10 + 1 = 90$. Равные цифры имеют только 11, 22, ..., 99 - девять чисел. Значит, различных цифр $90 - 9 = 81$ случаев и

$P = \frac{81}{90} = \frac{9}{10}$. Число 00 не является двузначным и в пространство исходов не входит.

Ответ. $\frac{9}{10}$.

Задание 8

Правильный кубик бросают дважды независимо. Найдите вероятность суммы очков 7.

Исход - упорядоченная пара $(i; j)$, всего $6 \cdot 6 = 36$ равновозможных пар. Подходят $(1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1)$. Значит, $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Таблица показывает все пары; суммы от 2 до 12 сами по себе не равновозможны.

Ответ. $\frac{1}{6}$.

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

Первый кубик

Все 36 пар; зелёным шесть пар с суммой 7. Числа внутри клеток - суммы.

Задание 9

Два различных правильных кубика бросают независимо. Найдите вероятность того, что сумма очков больше 10.

Всего 36 равновозможных пар. Строго больше 10 означают суммы 11 и 12. Их дают $(5; 6), (6; 5), (6; 6)$ - три пары. Поэтому $P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Пары с суммой 10 не включаются.

Ответ. $\frac{1}{12}$.

Задание 10

Два правильных кубика бросают независимо. Найдите вероятность чётного произведения очков.

Произведение нечётно тогда и только тогда, когда оба множителя нечётны. На каждом кубике таких значений три: 1, 3, 5. Из 36 пар противоположному событию отвечают $3 \cdot 3 = 9$. Поэтому $P = 1 - \frac{9}{36} = \frac{3}{4}$. Случаи «первое чётно» и «второе чётно» пересекаются, поэтому складывать их числа без поправки нельзя.

Ответ. $\frac{3}{4}$.

02. Последовательности и выбор без возвращения: задания 11-16**Задание 11**

Симметричную монету независимо бросают три раза. Найдите вероятность ровно двух орлов.

Всего $2^3 = 8$ равновозможных последовательностей. Благоприятны ООР, ОРО, РОО: единственную решку можно поставить на одно из трёх мест. Поэтому $P = \frac{3}{8}$. Последовательность ООО не подходит: в ней три орла, а требуется ровно два.

Ответ. $\frac{3}{8}$.

Задание 12

Симметричную монету независимо бросают четыре раза. Найдите вероятность хотя бы одного орла.

Всего $2^4 = 16$ равновозможных последовательностей. Противоположное событие «ни одного орла» состоит из одной последовательности РРРР. Поэтому $P = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$. Все остальные последовательности содержат от одного до четырёх орлов и подходят.

Ответ. $\frac{15}{16}$.

Задание 13

Из 8 учеников равновероятно выбирают команду из трёх без учёта порядка. Найдите вероятность того, что определённый ученик войдёт в команду.

Всего команд $C_8^3 = 56$. Если нужный ученик включён, остаётся выбрать двух из семи: $C_7^2 = 21$. Следовательно, $P = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$. Проверка симметрией: три места делятся поровну между восьмью учениками. Роли капитана и заместителей не задаются, поэтому порядок не учитываем.

Ответ. $\frac{3}{8}$.

Задание 14

В коробке 5 красных и 4 синих шара. Все пары отдельных шаров равновероятны. Одновременно выбирают два шара. Найдите вероятность одинакового цвета.

Всего пар $C_9^2 = 36$. Красных пар $C_5^2 = 10$, синих $C_4^2 = 6$. Эти два случая не пересекаются, поэтому $P = \frac{10+6}{36} = \frac{4}{9}$. Красно-синих пар $5 \cdot 4 = 20$, и $10 + 6 + 20 = 36$, что проверяет полноту разбиения.

Ответ. $\frac{4}{9}$.

Задание 15

В 120 проведённых опытах событие наблюдалось 33 раза. Найдите относительную частоту. Можно ли без дополнительных данных утверждать, что теоретическая вероятность равна этой частоте?

Относительная частота - доля фактических успехов: $\nu = \frac{33}{120} = \frac{11}{40} = 0,275$. Это наблюдаемая характеристика серии, а не точная вероятность модели.

Например, при честной монете частота орлов в короткой серии может отличаться от $\frac{1}{2}$. Из одной серии точное равенство вероятности и частоты не следует.

Ответ. 0,275; утверждать точное равенство нельзя.

Задание 16

Правильный кубик бросают дважды независимо. Найдите вероятность того, что наибольшее из двух чисел равно 5.

В квадрате исходов $1 \leq i, j \leq 5$ находится 25 пар. Из них 16 пар имеют оба числа не больше 4. Оставшиеся $25 - 16 = 9$ пар имеют максимум ровно 5. Поэтому

$P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Пара (5; 5) учтена один раз; пары с шестёркой не входят.

Ответ. $\frac{1}{4}$.

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

Максимум 5: девять зелёных клеток; клетки с шестёркой не подходят.

03. Повторение пройденного: задания 17-20**Задание 17**

Повторение. Первый исполнитель выполняет заказ за 10 ч, второй за 15 ч. Вместе они работают 2 ч, затем второй уходит. Постоянные производительности складываются. Сколько времени занимает весь заказ?

За 2 ч выполнено $2 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15} \right) = \frac{1}{3}$. Осталось $\frac{2}{3}$. Первый выполнит остаток за $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{10}} = \frac{20}{3}$ ч. Полное время $2 + \frac{20}{3} = \frac{26}{3}$ ч. Проверка: первый работал $\frac{26}{3}$ ч, второй 2 ч; сумма долей $\frac{13}{15} + \frac{2}{15} = 1$. Первый этап не завершил работу.

Ответ. $\frac{26}{3}$ ч, то есть 8 ч 40 мин.

Задание 18

Повторение. Из 40 кг 25%-го раствора удалили 8 кг однородной смеси и добавили 8 кг воды. Затем ту же операцию повторили после перемешивания. Найдите конечную массовую долю вещества.

Сначала вещества 10 кг. При каждом удалении уходит $\frac{8}{40} = \frac{1}{5}$ имеющегося вещества; вода его не добавляет. Остаток после двух операций $10 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 6,4$ кг.

Общая масса вновь 40 кг, поэтому доля $\frac{6,4}{40} = 0,16 = 16\%$. По этапам масса вещества 10, 8, 6,4 кг; во второй раз удалено меньше вещества, чем в первый.

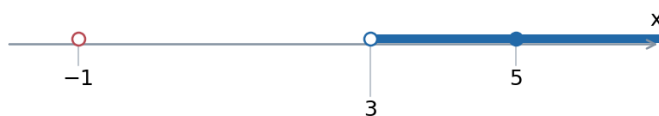
Ответ. 16%.

Задание 19

Повторение. Решите уравнение $\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = 3$.

ОДЗ: $x-1 > 0$ и $x-3 > 0$, вместе $x > 3$. На ОДЗ равносильно $\log_2((x-1)(x-3)) = 3$, то есть $(x-1)(x-3) = 8$. Получаем $x^2 - 4x - 5 = 0$, корни -1 и 5 . Первый не принадлежит ОДЗ; второй даёт $\log_2 4 + \log_2 2 = 2 + 1 = 3$. Других корней квадратного уравнения нет.

Ответ. 5.



ОДЗ $x > 3$; из кандидатов -1 и 5 остаётся только 5 .

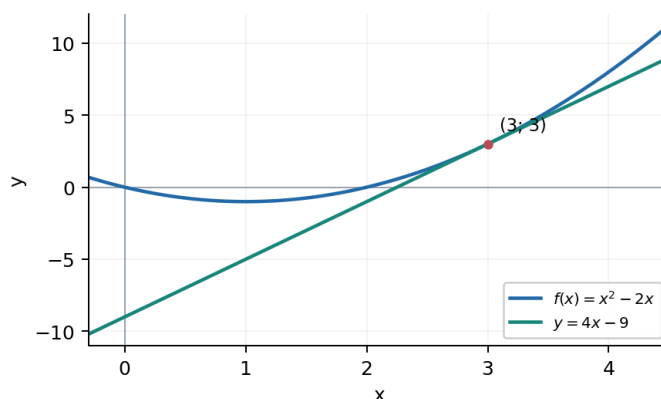
Задание 20

Повторение. Составьте уравнение касательной к графику $f(x) = x^2 - 2x$ в точке с абсциссой 3. Докажите, что парабола не лежит ниже этой прямой.

Функция дифференцируема при всех x . Имеем $f(3) = 3$, $f'(x) = 2x - 2$, $f'(3) = 4$.

Касательная: $y - 3 = 4(x - 3)$, то есть $y = 4x - 9$. Разность ординат $x^2 - 2x - (4x - 9) = (x - 3)^2 \geq 0$ при всех действительных x . Равенство только при 3, поэтому прямая касается графика и нигде не проходит выше него.

Ответ. $y = 4x - 9$; утверждение доказано.



Касательная в точке (3; 3); разность ординат равна квадрату $(x - 3)^2$.

04. Составные задачи: задания 21-30**Задание 21**

Цифры 1, 2, 3, 4, 5 равновероятно располагают в ряд без повторений. Найдите вероятность того, что первое число нечётно, а последнее чётно.

Всего $5! = 120$ перестановок. Первую цифру выбираем тремя способами, последнюю двумя. Они различны по чётности, поэтому конфликта выбора нет. Оставшиеся три цифры располагаются $3! = 6$ способами. Благоприятных порядков $3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$, вероятность $\frac{36}{120} = \frac{3}{10}$. Каждый порядок задаёт единственный выбор двух крайних цифр и середины.

Ответ. $\frac{3}{10}$.

Задание 22

Равновероятно выбирают четырёхзначное натуральное число. Найдите вероятность того, что все его цифры различны.

Всего чисел $9 \cdot 10^3 = 9000$: первая цифра не ноль. Для благоприятного числа первую цифру выбираем 9 способами, вторую 9 (включая ноль, но исключая первую), третью 8, четвёртую 7. Получаем $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ чисел. $P = \frac{4536}{9000} = \frac{63}{125}$.
Использовать 10 способов на первой позиции нельзя.

Ответ. $\frac{63}{125} = 0,504$.

Задание 23

Каждая из четырёх цифр кода независимо и равновероятно выбирается из 0-9; начальный ноль разрешён. Найдите вероятность ровно двух чётных цифр.

Всего кодов 10^4 . Две позиции чётных цифр выбираем $C_4^2 = 6$ способами. На каждой из четырёх позиций допустимы 5 цифр нужной чётности; ноль чётный. Поэтому благоприятных кодов $6 \cdot 5^4 = 3750$, $P = \frac{3750}{10000} = \frac{3}{8}$. Группы по позициям чётных цифр не пересекаются.

Ответ. $\frac{3}{8}$.

Задание 24

Правильный кубик бросают трижды независимо. Найдите вероятность того, что ровно два результата совпадут, а третий будет отличаться.

Всего $6^3 = 216$ равновозможных троек. Повторённое значение выбирается 6 способами, отличающееся - 5, его позиция - 3. Получаем $6 \cdot 5 \cdot 3 = 90$ троек. В каждой подходящей тройке повторённое значение и особая позиция определены однозначно, поэтому повторного счёта нет. Все три одинаковые исключены выбором отличающегося значения. $P = \frac{90}{216} = \frac{5}{12}$.

Ответ. $\frac{5}{12}$.

Задание 25

В коробке 6 белых и 4 чёрных шара. Одновременно равновероятно выбирают тройку отдельных шаров. Найдите вероятность не менее двух белых.

Всего $C_{10}^3 = 120$ троек. Ровно два белых дают $C_6^2 C_4^1 = 15 \cdot 4 = 60$ вариантов; три белых - $C_6^3 = 20$. Эти случаи исчерпывают «не менее двух» и не пересекаются.

Поэтому $P = \frac{60 + 20}{120} = \frac{2}{3}$. В числителе и знаменателе считаются неупорядоченные тройки.

Ответ. $\frac{2}{3}$.

Задание 26

Из 7 юношей и 5 девушек равновероятно выбирают комитет из четырёх человек. Найдите вероятность не менее двух девушек.

Всего $C_{12}^4 = 495$ комитетов. Число девушек может быть 2, 3 или 4. Для этих несовместимых случаев числа вариантов равны $C_5^2 C_7^2 = 210$, $C_5^3 C_7^1 = 70$ и $C_5^4 = 5$.

Поэтому $P = \frac{210 + 70 + 5}{495} = \frac{19}{33}$. Нулевой и единичный составы по девушкам не подходят; других возможных благоприятных чисел нет.

Ответ. $\frac{19}{33}$.

Задание 27

Из 10 человек, среди которых Анна и Борис, равновероятно выбирают комиссию из четырёх. Найдите вероятность, что в неё войдёт ровно один из этих двоих.

Всего $C_{10}^4 = 210$ комиссий. Выбираем одного из двух указанных людей, затем трёх из остальных восьми: $2C_8^3 = 112$. При этом второй указанный человек заведомо исключён. Два случая по включённому человеку несовместимы.

$P = \frac{112}{210} = \frac{8}{15}$. Если бы выбирали остальных из девяти, были бы ошибочно учтены комиссии с обоими.

Ответ. $\frac{8}{15}$.

Задание 28

Из 36-карточной колоды равновероятно выбирают две карты без учёта порядка. Какова вероятность, что карты одной масти, но ни одна не туз? В каждой из четырёх мастей по девять карт, включая одного туза.

Всего $C_{36}^2 = 630$ пар. Мاستь выбираем четырьмя способами; в ней восемь не-тузов, из которых надо выбрать два: $4C_8^2 = 112$. Разные масти дают непересекающиеся пары. Поэтому $P = \frac{112}{630} = \frac{8}{45}$. Знаменатель остаётся 630: условие не говорит, что тузы заранее убраны из колоды.

Ответ. $\frac{8}{45}$.

Задание 29

Из 8 мест, расположенных в ряд, равновероятно выбирают три места. Найдите вероятность того, что никакие два выбранных места не соседствуют.

Всего $C_8^3 = 56$ троек. Пусть выбранные номера $i < j < k$; отсутствие соседства означает $j \geq i + 2, k \geq j + 2$. Замена $(i, j, k) \mapsto (i, j - 1, k - 2)$ даёт произвольную строго возрастающую тройку из чисел 1–6. Обратная замена возвращает единственную допустимую тройку, поэтому это взаимно однозначное соответствие. Благоприятных троек $C_6^3 = 20$, $P = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$.

Ответ. $\frac{5}{14}$.

Задание 30

Шесть разных книг равновероятно расставляют на полке. Найдите вероятность, что две заранее указанные книги окажутся рядом.

Всего $6! = 720$ порядков. Объединим две указанные книги в блок. Вместе с четырьмя другими книгами получается пять различных объектов, которые расставляются $5!$ способами. Внутри блока два порядка. Благоприятных расстановок $2 \cdot 5! = 240$, поэтому $P = \frac{240}{720} = \frac{1}{3}$. Каждая расстановка с соседством единственным образом сжимается в такой блок.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

05. Развёрнутое обоснование: задания 31-34**Задание 31**

Из 8 мест в ряд равновероятно выбирают три. Найдите вероятность, что среди выбранных мест будет ровно одна пара соседних. Три последовательных места не подходят, поскольку содержат две такие пары.

Всего $C_8^3 = 56$ троек. Подходящий набор состоит из двух блоков занятых мест: блока длины 2 и одиночного места. Их порядок имеет два варианта. Между блоками обязателен хотя бы один пустой промежуток. Всего пустых мест 5; после выделения одного между блоками остаются 4, распределяемые между левым краем, внутренним промежутком и правым краем. Неотрицательных троек с суммой 4 - $C_6^2 = 15$ (две перегородки среди шести позиций). Получаем $2 \cdot 15 = 30$ наборов. Блоки восстанавливаются однозначно. $P = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$. Проверка всех типов: 20 без соседей, 30 с одной парой, 6 троек подряд; сумма 56.

Ответ. $\frac{15}{28}$.

Задание 32

Три различных участника независимо и равновероятно выбирают одну из четырёх команд. Найдите вероятность, что заняты ровно две команды.

Всего $4^3 = 64$ распределения. Пару занятых команд выбираем $C_4^2 = 6$ способами. Для выбранной пары есть $2^3 = 8$ назначений трёх участников; два назначения используют только одну команду, поэтому подходят 6. Всего $6 \cdot 6 = 36$ вариантов, $P = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$. У каждого распределения множество занятых команд единственно, так что разные пары команд не дают повторного счёта.

Ответ. $\frac{9}{16}$.

Задание 33

Четыре письма случайно раскладывают по четырём подписанным конвертам, по одному письму в конверт; все перестановки равновероятны. Найдите вероятность, что ни одно письмо не окажется в своём конверте.

Всего $4! = 24$ перестановки. Применим включение-исключение к событиям правильного попадания каждого письма. Число перестановок без правильных попаданий:

$$4! - C_4^1 3! + C_4^2 2! - C_4^3 1! + C_4^4 0! = 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9.$$

При фиксации k правильных писем остальные переставляются $(4 - k)!$ способами. Почему чередование верно? Перестановка с $r \geq 1$ правильными письмами имеет суммарный коэффициент $1 - C_r^1 + C_r^2 - \dots + (-1)^r = (1 - 1)^r = 0$; без правильных сохраняется коэффициент 1. Поэтому $P = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$. Здесь $0! = 1$, поскольку пустую оставшуюся расстановку можно выполнить единственным способом.

Ответ. $\frac{3}{8}$.

Задание 34

Из чисел 1-12 включительно равновероятно выбирают три различных числа без учёта порядка. Найдите вероятность делимости их суммы на 3.

Всего $C_{12}^3 = 220$ троек. В каждом классе остатков 0, 1, 2 по модулю 3 содержится четыре числа. Сумма трёх остатков делится на 3 только для составов (0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2) или (0, 1, 2). Действительно, при двух одинаковых остатках и третьем отличном сумма имеет ненулевой остаток. Первые три состава дают $3C_4^3 = 12$ троек, последний $4^3 = 64$. Случаи не пересекаются; $P = \frac{76}{220} = \frac{19}{55}$.

Ответ. $\frac{19}{55}$.

06. Сложные задачи и параметры: задания 35-40**Задание 35**

В коробке всего N шаров, из них ровно три красных, остальные синие; N - целое, $N \geq 3$. Все пары шаров равновероятны. Вероятность выбрать два красных равна $\frac{1}{12}$. Найдите N и докажете единственность.

Благоприятных пар $C_3^2 = 3$, всех $C_N^2 = \frac{N(N-1)}{2}$. Поэтому $\frac{6}{N(N-1)} = \frac{1}{12}$. На области $N \geq 3$ знаменатель положителен, умножение равносильно:

$N(N-1) = 72$, $(N-9)(N+8) = 0$. Корень -8 исключается, $N = 9$ допустим.

Проверка: $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$; синих 6. Квадратное уравнение имеет только два указанных корня, из которых допустим один.

Ответ. 9 шаров.

Задание 36

В коробке 10 шаров, из них r красных и $10 - r$ синих; r - целое от 0 до 10. Равновероятно выбирают пару шаров. а) Найдите вероятность разных цветов как функцию r и её максимум. б) Найдите все r , при которых вероятность не меньше $\frac{1}{2}$. в) Для каждого действительного a укажите число значений r , при которых вероятность равна a .

Всего $C_{10}^2 = 45$ пар; разноцветных $r(10 - r)$, поэтому

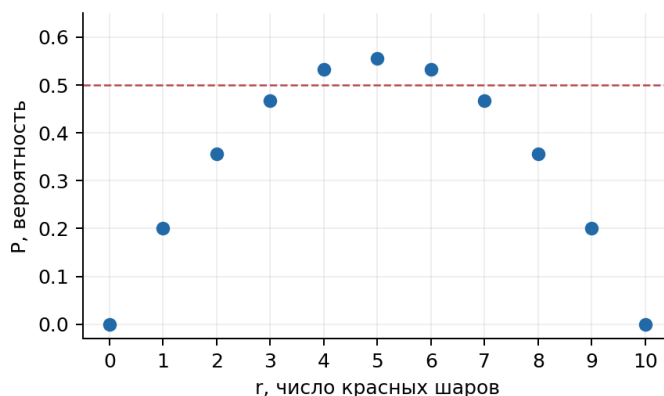
$$P(r) = \frac{r(10 - r)}{45} = \frac{25 - (r - 5)^2}{45}, \quad r \in \{0, 1, \dots, 10\}.$$

а) Квадрат неотрицателен и равен нулю только при $r = 5$. Максимум $\frac{5}{9}$.

б) Неравенство $P \geq \frac{1}{2}$ равносильно $(r - 5)^2 \leq \frac{5}{2}$. При целочисленном r это $|r - 5| \leq 1$, откуда $r = 4, 5, 6$. Проверка ближайших исключённых: при 3 и 7 вероятность $\frac{21}{45} < \frac{1}{2}$.

в) Симметричные пары r дают следующие значения: $\{0, 10\} \mapsto 0$, $\{1, 9\} \mapsto \frac{1}{5}$, $\{2, 8\} \mapsto \frac{16}{45}$, $\{3, 7\} \mapsto \frac{7}{15}$, $\{4, 6\} \mapsto \frac{8}{15}$; одиночное $r = 5$ даёт $\frac{5}{9}$. Перечислены все 11 целых значений, поэтому других случаев нет. Нельзя заменять дискретную область всем отрезком.

Ответ. а) $P = \frac{r(10 - r)}{45}$, максимум $\frac{5}{9}$ при 5; б) 4, 5, 6; в) два значения при $a \in \{0, \frac{1}{5}, \frac{16}{45}, \frac{7}{15}, \frac{8}{15}\}$, одно при $a = \frac{5}{9}$, иначе ни одного.



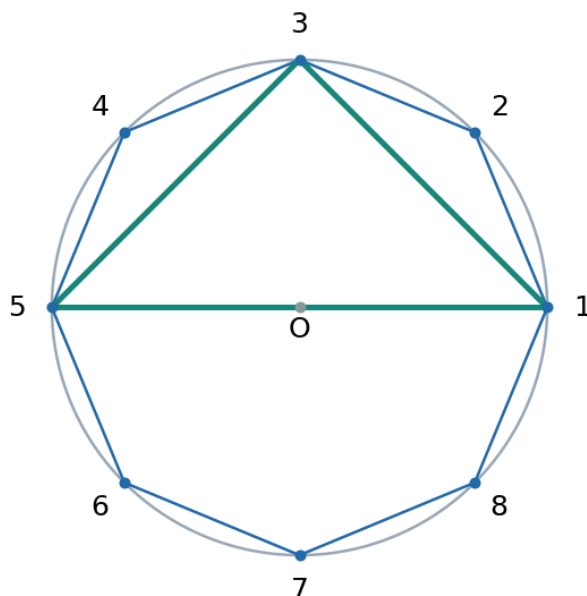
Только целые составы: всего 10 шаров; максимум при $r = 5$.
Красный уровень - $1/2$.

Задание 37

Из восьми вершин правильного восьмиугольника равновероятно выбирают три. Найдите вероятность, что они образуют прямоугольный треугольник. Обоснуйте отсутствие повторного счёта.

Все $C_8^3 = 56$ троек равновозможны; три разные точки окружности не лежат на одной прямой. Вписанный треугольник прямоуголен тогда и только тогда, когда его гипотенуза является диаметром: вписанный угол равен половине дуги, на которую опирается, поэтому 90° соответствует полуокружности. У восьмиугольника четыре пары противоположных вершин. После выбора диаметра третью вершину выбираем из остальных шести: $4 \cdot 6 = 24$ треугольника. У прямоугольного треугольника только одна гипотенуза, поэтому ни один не посчитан дважды. Следовательно, $P = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$.

Ответ. $\frac{3}{7}$.



Восьмиугольник: диаметр 1-5 и третья вершина 3 задают прямоугольный треугольник.

Задание 38

В коробке 5 красных, 4 синих и 3 зелёных шара. Все тройки отдельных шаров равновероятны. Выбирают три шара. Найдите вероятность, что представлены ровно два цвета и есть хотя бы один красный шар.

Всего $C_{12}^3 = 220$ троек. Подходящие пары цветов - только красный-синий и красный-зелёный. Для первой пары берём все тройки из девяти шаров и убираем одноцветные: $C_9^3 - C_5^3 - C_4^3 = 84 - 10 - 4 = 70$. Для второй аналогично $C_8^3 - C_5^3 - C_3^3 = 56 - 10 - 1 = 45$. После удаления одноцветных группы не пересекаются: первая содержит синий шар без зелёных, вторая зелёный без синих. Случай трёх цветов не вошёл никуда. Поэтому $P = \frac{70 + 45}{220} = \frac{23}{44}$.
Дополнительная проверка по составам: $10 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 115$.

Ответ. $\frac{23}{44}$.

Задание 39

Расширение модели. Точка $(x; y)$ равномерно выбирается в квадрате $[-1; 1] \times [-1; 1]$. Найдите вероятность одновременного выполнения $|x| + |y| \leq 1$ и $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}$. Обоснуйте геометрические ограничения.

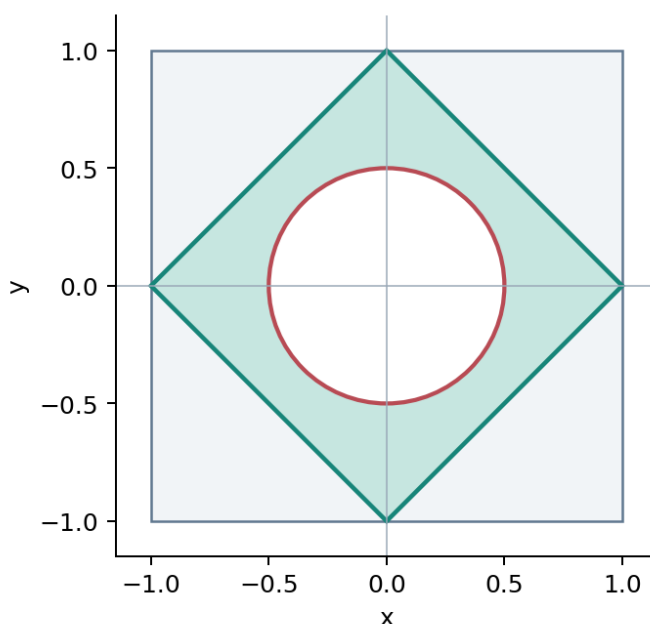
Исходов бесконечно много; классическое отношение чисел заменяем отношением площадей, поскольку выбор равномерен. Первое условие задаёт ромб с вершинами $(1; 0), (0; 1), (-1; 0), (0; -1)$. Его площадь $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$. Второе условие исключает внутренность круга радиуса $\frac{1}{2}$.

Докажем, что весь круг внутри ромба: $(|x| + |y|)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \leq \frac{1}{2}$, поскольку $2|xy| \leq x^2 + y^2$. Значит, $|x| + |y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Можно вычесть всю площадь круга $\frac{\pi}{4}$, не обрезая её сторонами ромба. Площадь благоприятной области $2 - \frac{\pi}{4}$, всего квадрата - 4. Поэтому

$$P = \frac{2 - \frac{\pi}{4}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{16}.$$

Границы включены согласно нестрогим знакам. Их площадь нулевая, поэтому изменение включения одной лишь границы не изменило бы вероятность. Полученное число между 0 и 1.

Ответ. $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{16}$.



Зелёная область: ромб без внутренности круга радиуса 1/2.
Границы включены; масштаб по осям одинаков.

Задание 40

Все различные перестановки букв слова «МАТЕМАТИКА» равновероятны. а) Найдите вероятность, что никакие две гласные не соседствуют. б) Обобщите: в слове n согласных и m гласных; буквы внутри каждой группы могут повторяться. Докажите, что при равновероятном выборе различных перестановок вероятность отсутствия соседних гласных равна $\frac{C_{n+1}^m}{C_{n+m}^m}$ при $0 \leq m \leq n + 1$ и равна нулю при $m > n + 1$. Числа n, m - неотрицательные целые.

а) В слове десять букв: пять гласных А, А, А, Е, И и пять согласных М, М, Т, Т, К. Общее число различных порядков $\frac{10!}{3!2!2!} = 151200$. Согласные располагаются $\frac{5!}{2!2!} = 30$ способами. До, между и после них имеется шесть промежутков. Чтобы гласные не соседствовали, выбираем пять промежутков из шести и помещаем по одной гласной. Порядков гласных $\frac{5!}{3!} = 20$. Благоприятных перестановок $30 \cdot C_6^5 \cdot 20 = 3600$, поэтому $P = \frac{3600}{151200} = \frac{1}{42}$.

б) Обозначим числа различных внутренних порядков согласных и гласных через U и V . Любое слово однозначно задаётся выбором m позиций гласных среди $n + m$, одним из U порядков согласных и одним из V порядков гласных. Всего $C_{n+m}^m UV$ слов. У фиксированного порядка согласных $n + 1$ промежутков; при $m \leq n + 1$ надо выбрать m разных промежутков и заполнить их гласными в выбранном порядке. Получаем $C_{n+1}^m UV$ благоприятных слов. Удаление гласных однозначно восстанавливает промежутки и оба порядка, поэтому повторного счёта нет. Сокращение положительных U, V даёт требуемую формулу независимо от повторяющихся букв.

Если $m > n + 1$, по принципу Дирихле два гласных попадут в один промежуток и будут соседствовать: вероятность 0. При $m = 0$ событие достоверно и формула даёт 1. При $n = 0$ допустимы только $m = 0$ или 1; при больших m вероятность 0. Таким образом, рассмотрены и граничные случаи.

Ответ. а) $\frac{1}{42}$; б) указанная формула доказана.



Пять согласных образуют шесть промежутков. Пять гласных размещаются по одной в пяти выбранных промежутках.