



Производная и чтение графиков

Теория и разобранные примеры

Свойства, условия применения и пошаговые объяснения. Используйте оглавление и закладки PDF для перехода к нужной теме.

Содержание

01. Секущая и мгновенная скорость	2
02. Определение производной и проверка предела	2
03. Касательная: смысл и уравнение	3
04. Таблица производных и области применения	3
05. Сумма, произведение и частное	4
06. Сложная функция: производная внутренней части	4
07. Почему знак производной задаёт монотонность	4
08. График функции и график её производной	5
09. Локальные экстремумы и теорема Ферма	5
10. Изломы и критические точки	6
11. Полный разбор кубической функции	7
12. Касательная заданного направления	7
13. Рациональная функция: разрыв разделяет знаки	8
14. Производная как инструмент доказательства	8
15. Непрерывная и дифференцируемая склейка	9
16. Параметр и строгая монотонность	9
17. Семейства уровней: существование и полнота	9
18. Разные точки касания и разные прямые	10
19. Проверка решения и работа с практикой	11

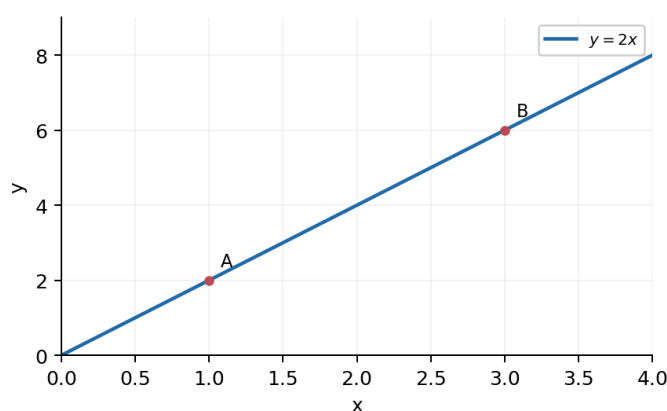
01. Секущая и мгновенная скорость

Средняя скорость изменения на отрезке с разными концами - наклон секущей:

$$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Она сравнивает два значения, но не описывает каждую промежуточную точку. Для координаты $s(t)$ отношение измеряется в метрах в секунду. Его знак показывает направление перемещения, не «отрицательную длину пути».

Если зафиксировать x_0 и приблизить второй аргумент $x_0 + h$ к нему, разностное отношение показывает всё более локальное изменение. У функции x^2 при $x_0 = 2$ секущая через $x_0 + h$ имеет наклон $4 + h$: при $h \rightarrow 0$ он стремится к 4.



Задание 1. Секущая через A(1;2) и B(3;6).

02. Определение производной и проверка предела

Производная во внутренней точке - конечный двусторонний предел

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Внутри отношения $h \neq 0$, поэтому сокращение на h допустимо. Нужно проверить приближение с обеих сторон. Наличие одной формулы при $h > 0$ не доказывает существование общей производной.

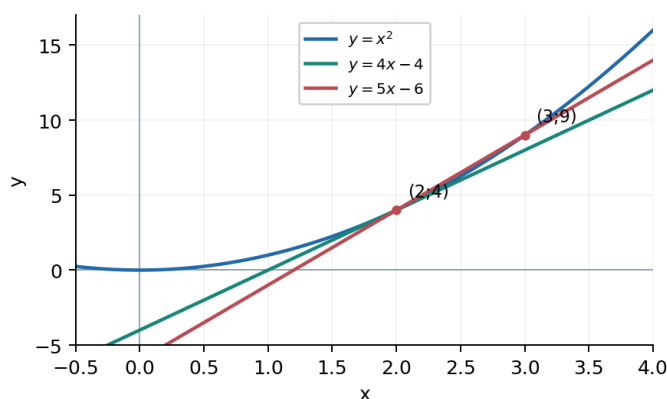
Вывод. Для $f(x) = x^2$ отношение $(2x_0h + h^2)/h = 2x_0 + h$, поэтому $f'(x_0) = 2x_0$. Для постоянной функции приращение нулевое, производная 0. Дифференцируемость в точке влечёт непрерывность: приращение функции равно h умножить на отношение, имеющее конечный предел, и стремится к нулю.

03. Касательная: смысл и уравнение

Если производная конечна, касательная имеет наклон $f'(x_0)$ и проходит через $(x_0; f(x_0))$. Из уравнения прямой через точку следует

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Пример. Для x^2 при $x_0 = 2$: $y = 4 + 4(x - 2) = 4x - 4$. Проверка подстановкой точки обязательна. Касательная не обязана пересекать график только один раз: к кубической функции она может иметь дополнительную общую точку. Производная сама по себе не задаёт высоту графика.



Касательная в $(2; 4)$ и секущая через $(2; 4)$, $(3; 9)$.

04. Таблица производных и области применения

Основные формулы применяются на области дифференцируемости:

Функция	Производная	Условия
C	0	$x \in \mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	аргумент в радианах
$\cos x$	$-\sin x$	аргумент в радианах

Для натуральной степени раскрывают $(x + h)^n$: после деления на h единственный постоянный член nx^{n-1} , остальные содержат h и стремятся к нулю. Степенное правило для отрицательных и дробных показателей требует соблюдения их областей; нельзя автоматически переносить его на границу корня.

05. Сумма, произведение и частное

Для дифференцируемых u, v :

$$(u + v)' = u' + v', \quad (Cu)' = Cu',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Правило произведения следует из добавления и вычитания $u(x+h)v(x)$ в приращении произведения. После деления на h два слагаемых переходят к $u'v$ и uv' ; непрерывность дифференцируемых функций обеспечивает нужные пределы.

Пример. $(x^2 \ln x)' = 2x \ln x + x$, $x > 0$. Ошибка - перемножить две производные. Для $\frac{x^2 + 1}{x - 1}$ получаем $\frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$, $x \neq 1$; квадрат знаменателя не позволяет включить исключённую точку.

06. Сложная функция: производная внутренней части

Если g дифференцируема в x и f в $g(x)$, то

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) g'(x).$$

Малое изменение внутреннего аргумента тоже имеет свою скорость; поэтому множитель $g'(x)$ необходим. Точное обоснование получают из линейных приближений приращений каждой функции, где остаток делённый на приращение стремится к нулю.

Примеры. $(\ln(1 + x^2))' = \frac{2x}{1 + x^2}$ на всей прямой; $(\sqrt{3x + 1})' = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}$ при $x > -\frac{1}{3}$.

Сама корневая функция допускает границу $-\frac{1}{3}$, но конечная производная там не существует. Области функции и производной могут различаться.

07. Почему знак производной задаёт монотонность

Теорема Лагранжа: если f непрерывна на $[u; v]$ и дифференцируема внутри, то при некотором $c \in (u; v)$

$$f(v) - f(u) = f'(c)(v - u).$$

При $f' > 0$ на промежутке правая часть положительна для любых $u < v$: функция строго возрастает. При $f' < 0$ строго убывает; при неотрицательной производной не убывает. Важны условия теоремы: нельзя перескочить через точку вне области или через скачок.

Нулевая производная в отдельной точке не отменяет строгого возрастания.

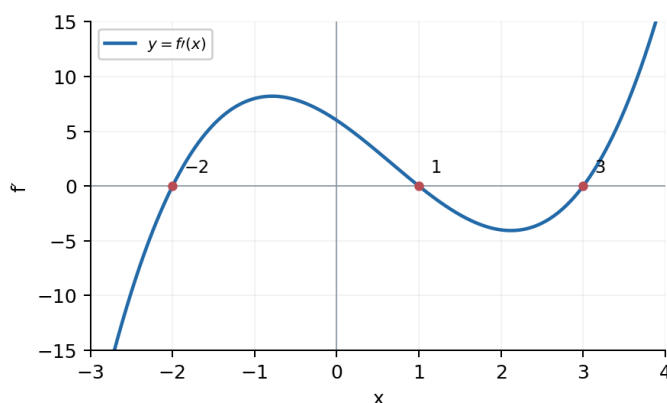
Например, x^3 строго возрастает, хотя производная в нуле 0. На соседних возрастающих промежутках значения соединяются непрерывно; для пересекающих ноль точек $u < 0 < v$ непосредственно $u^3 < 0 < v^3$.

08. График функции и график её производной

Для графика f подъём и спуск означают возрастание и убывание. Для графика f' нужно смотреть, выше или ниже оси он расположен: положительная ордината означает возрастание **исходной** функции.

Убывающий участок производной может всё ещё лежать выше оси: наклон функции уменьшается, но функция продолжает расти. Нули производной – возможные горизонтальные касательные, а не нули самой функции. Добавление константы к f не меняет f' , поэтому по одному графику производной нельзя найти точные значения f без дополнительного условия.

На рисунках предел окна не объявляется концом области. Если вопрос относится к всей прямой, заранее задаются все нули и поведение крайних ветвей. Для конечного интервала ответ ограничивают указанной областью.



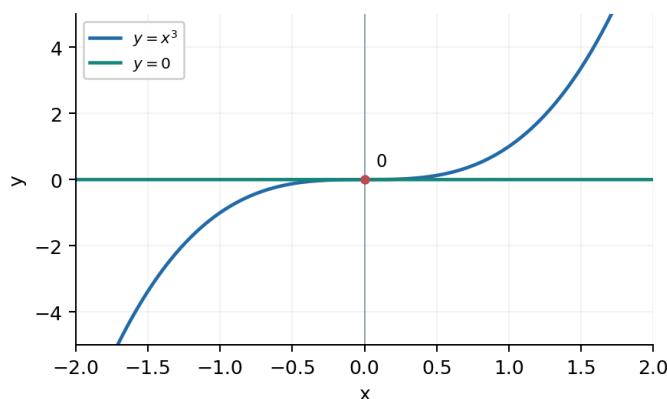
Задание 5. График производной; все её нули отмечены.

09. Локальные экстремумы и теорема Ферма

Внутренняя точка x_0 – локальный максимум, если в некоторой её окрестности $f(x) \leq f(x_0)$, минимум – при обратном неравенстве. Это локальное сравнение; глобальное значение относится ко всей указанной области.

Если в точке локального экстремума существует производная, то она нулевая. Для максимума разностное отношение справа неположительно, слева неотрицательно; общий предел может быть только 0. Для минимума рассуждение аналогично.

Обратное неверно: x^3 имеет горизонтальную касательную в нуле, но экстремума нет. При непрерывности в точке и определённой производной по обе стороны смена плюса на минус даёт максимум, минуса на плюс – минимум. Если знак не меняется, экстремума нет. Нужны **знаки**, а не только список нулей.

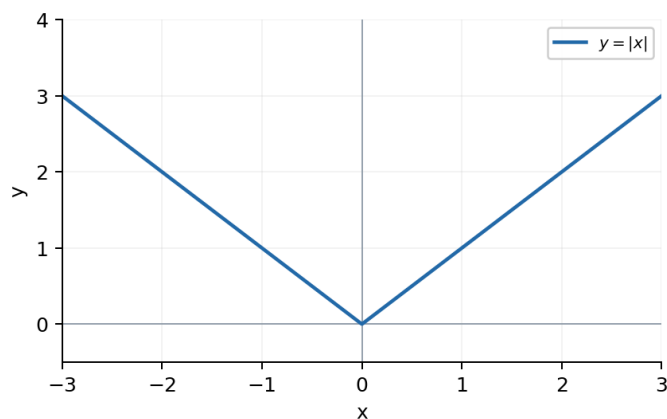


Задание 10. Горизонтальная касательная в нуле без экстремума.

10. Изломы и критические точки

В рамках этого курса критическими называем внутренние точки области, где производная равна нулю или не существует. Их исследуют как кандидатов. Точка вне области, например $x = 1$ у $\frac{x^2 + 1}{x - 1}$, критической точкой функции не является.

У $|x|$ в нуле минимум, но отношение $|h|/h$ имеет односторонние пределы -1 и 1 . График имеет излом. У $\sqrt{x}$ на границе 0 конечной правой производной нет; это граничная точка, не внутренняя критическая. При задачах на отрезке границы проверяют отдельно; подробно глобальные значения изучаются в следующем уроке.



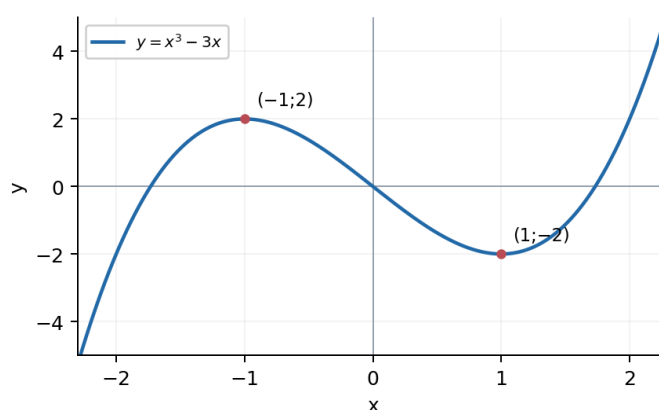
Задание 15. Излом: левый наклон -1 , правый 1 .

11. Полный разбор кубической функции

Возьмём $f(x) = x^3 - 3x$. Область вся прямая, производная $3(x-1)(x+1)$. Внешние промежутки дают плюс, средний минус. Поэтому возрастание $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, убывание $[-1; 1]$; максимум $f(-1) = 2$, минимум $f(1) = -2$.

Включённые концы промежутков монотонности допустимы по непрерывности. При этом строгая положительность производной относится к **открытым** промежуткам. Не нужно объявлять эти два вида ответа противоречащими друг другу.

Горизонтальный уровень между -2 и 2 имеет три пересечения; на экстремальных уровнях два различных, вне - одно. Кратный корень считается однажды. Строгая монотонность каждой ветви доказывает, что других пересечений нет.

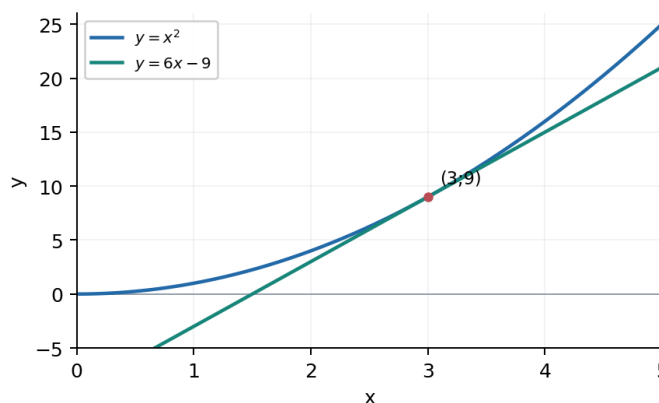


Задание 21. Максимум $(-1; 2)$, минимум $(1; -2)$.

12. Касательная заданного направления

Для параллельности прямой $y = kx + b$ решают $f'(x_0) = k$. Затем восстанавливают $f(x_0)$ и свободный член касательной. При угле α к положительному направлению оси $k = \tan \alpha$; вертикальная касательная не описывается конечным коэффициентом.

Пример. Для x^2 и $k = 6$ получаем $x_0 = 3$, точку $(3; 9)$ и $y = 6x - 9$. Для $k = 0$ решают нули производной, но всё ещё проверяют тип точки. По двум отмеченным точкам на самой касательной коэффициент вычисляют как у секущей: эти точки не обязаны быть точкой касания.



Задание 23. Касательная наклона 6 в $(3; 9)$.

13. Рациональная функция: разрыв разделяет знаки

Для $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} = x + 1 + \frac{2}{x - 1}$ область $x \neq 1$. Производная $\frac{(x - 1)^2 - 2}{(x - 1)^2}$ имеет нули $1 \pm \sqrt{2}$. Производная положительна вне этих нулей, отрицательна между ними, но область разрезана в 1.

Поэтому интервалы убывания $[1 - \sqrt{2}; 1)$ и $(1; 1 + \sqrt{2}]$ рассматриваются отдельно. Объединение не является одним промежутком монотонности: значения по разные стороны разрыва нельзя сравнивать по одной теореме Лагранжа. В $1 - \sqrt{2}$ максимум, в $1 + \sqrt{2}$ минимум. График помогает увидеть разрыв, точные выводы получаются из формулы и знаков.

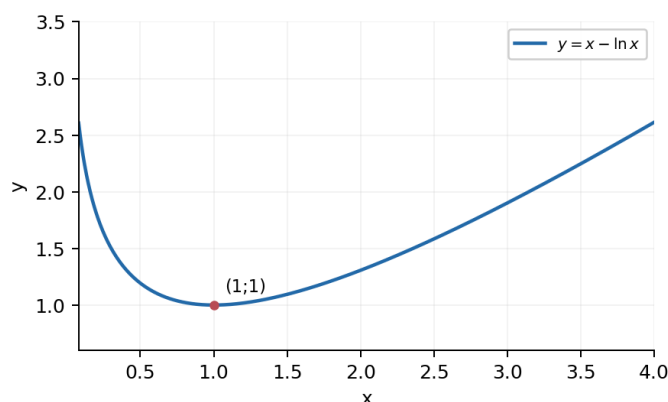


Задание 25. Два участка отрицательной производной разделены разрывом в 1.

14. Производная как инструмент доказательства

Для оценки $\ln x \leq x - 1$, $x > 0$, рассмотрим разность $g(x) = x - 1 - \ln x$. Производная $(x - 1)/x$ отрицательна до 1 и положительна после; минимум $g(1) = 0$. Следовательно, оценка верна, равенство только при 1.

Доказательная задача требует выбрать разность, установить её область, определить знак производной и проверить случай равенства. Численные значения на сетке не заменяют рассуждение для всех аргументов. Более точную двойную оценку в задании 34 получают двумя разностями, каждая начинается с нулевого значения при 1.



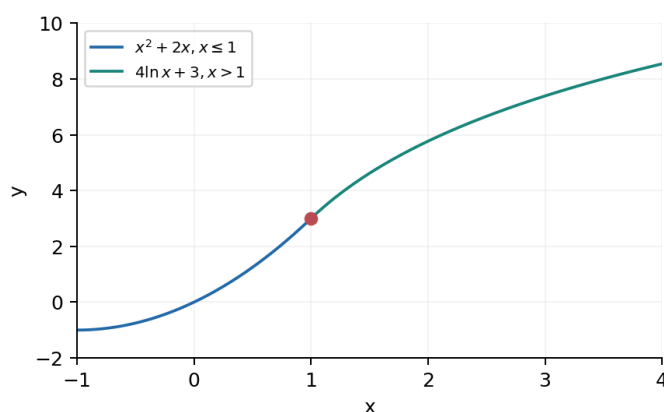
Задание 26. Единственный глобальный минимум (1;1).

15. Непрерывная и дифференцируемая склейка

Для кусочной функции сначала сравнивают значение и пределы в точке соединения, а затем односторонние производные. Совпадение производных формул при разных высотах не устраняет скачок.

Пример. $x^2 + ax$ при $x \leq 1$ и $b \ln x + c$ при $x > 1$. Непрерывность требует $c = 1 + a$; после неё равенство односторонних производных $b = 2 + a$ обеспечивает дифференцируемость. Дополнительное условие $f(e) = 7$ даёт $a = 2, b = 4, c = 3$.

При найденных параметрах оба значения в точке соединения равны 3, оба наклона 4. Нельзя подставлять логарифм в ветвь там, где условием выбрана другая формула.



Задание 35. Непрерывная склейка в (1;3), общий наклон 4.

16. Параметр и строгая монотонность

Для $x^3 - 3ax^2 + 3bx$ производная $3((x - a)^2 + b - a^2)$. Её минимум равен $3(b - a^2)$. Если он отрицательный, функция убывает на некотором интервале и не может строго возрастать всюду. Если положительный, всюду возрастает.

На границе $b = a^2$ производная в одной точке нулевая, но функция $(x - a)^3 + a^3$ строго возрастает. Значит полный критерий $b \geq a^2$, а не только $b > a^2$. Для каждого граничного параметра нужно обоснование, а не перенос ответа из открытого случая.

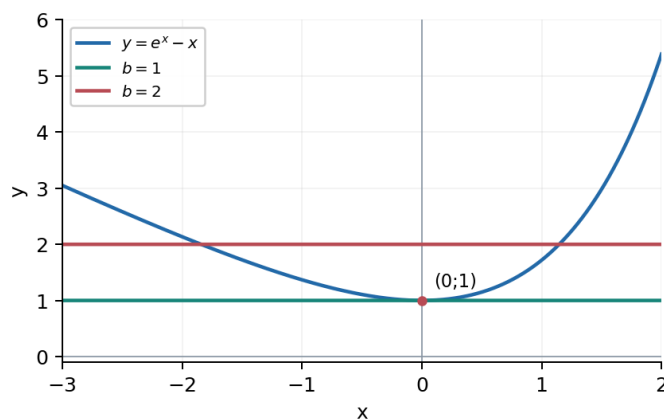
17. Семейства уровней: существование и полнота

Для $x^3 - 3ax = b$ при $a \leq 0$ функция строго возрастает на всей прямой и принимает все действительные значения: корень один для всякого b . При $a > 0$ максимум $2a\sqrt{a}$ и минимум $-2a\sqrt{a}$, три монотонные ветви. Между уровнями три корня, на границе два, вне один.

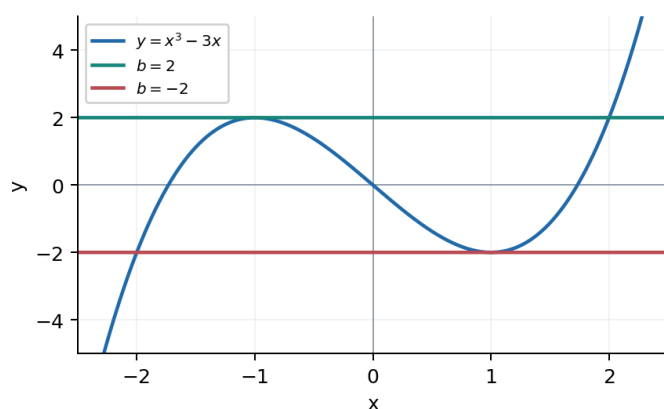
Для $e^x = ax + b$ используют $h = e^x - ax$. При $a > 0$ минимум в $\ln a$ со значением $a(1 - \ln a)$; на обоих концах $h \rightarrow +\infty$. Поэтому число корней 0, 1, 2 в зависимости от

положения b относительно минимума. Случаи $a = 0$ и $a < 0$ проверяют отдельно: меняется поведение на левом бесконечном конце.

Каждую ветвь исследуют на монотонность и образ. Это доказывает не только невозможность лишних корней, но и существование каждого посчитанного.



Задание 38. Случай $a=1$: минимум 1, выше него два пересечения.



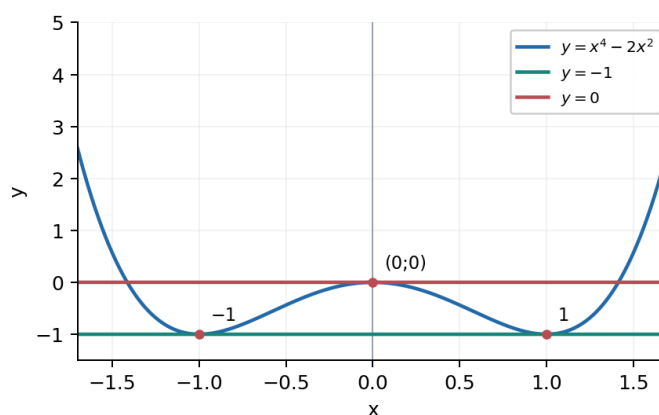
Задание 39. Случай $a=1$: критические уровни $b=\pm 2$.

18. Разные точки касания и разные прямые

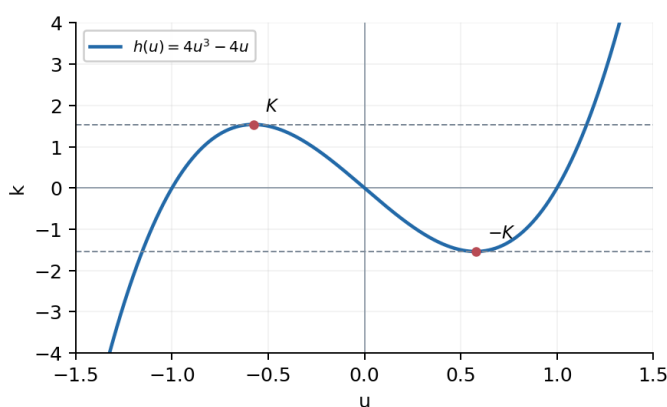
Уравнение $f'(u) = k$ считает абсциссы точек касания. Прямая имеет вид $y = kx + q(u)$, где $q(u) = f(u) - uf'(u)$. Если два значения u дают одинаковые k и q , это **одна** прямая.

У $f(x) = x^4 - 2x^2$ при $k = 0$ точки касания $-1, 0, 1$. В точках ± 1 горизонталь $y = -1$ одна и та же, в нуле $y = 0$: всего две разные касательные. Это важный контрольный случай. В задаче 40 совпадения проверяются алгебраически, и нулевой наклон исключается из ответа о трёх прямых.

Чтобы исследовать число решений $f'(u) = k$, допускается ещё раз продифференцировать уже полученную функцию $h(u) = f'(u)$. Это то же правило исследования, а не отдельное предположение о форме графика.



Задание 40. При $k=0$ три точки касания, но две различные прямые.



Задание 40. Наклоны: три корня между уровнями $\pm 8/(3\sqrt{3})$, но $k=0$ исключён.

19. Проверка решения и работа с практикой

Сначала записывайте область функции. Затем вычисляйте производную с областью её существования, находите нули и точки недифференцируемости, отдельно отмечайте разрывы. Составьте таблицу знаков на каждом промежутке. По ней докажете монотонность и типы экстремумов; при необходимости подставьте координаты точек.

В касательных проверяйте точку и коэффициент. В параметрах перечисляйте вырожденные значения, касания, совпадающие корни и одинаковые прямые. Рисунок - средство проверки, но точные границы и полнота требуют доказательства.

Задания 1-16 знакомят со смыслом и правилами, 17-20 повторяют прежние темы, 21-30 связывают методы, 31-40 требуют развёрнутого исследования, доказательства или разбора параметров. Задание 16 взято из официальной демоверсии 2026; остальные - авторские учебные задачи, а не заявленные официальные задания №18.