



ПРОФИЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА · УРОК 30

Остатки и конструкция

Ответы и пошаговые решения

Базовая тренировка: задания 1-12

Задание 1

Тренировка. чётность и остатки

Проверьте, делится ли 4734 на 9.

Решение

1. Сумма цифр $4+7+3+4=18$ делится на 9.

Ответ

Да

Задание 2

Тренировка. чётность и остатки

Проверьте, делится ли 6312 на 4.

Решение

1. Последние две цифры 12 делятся на 4.

Ответ

Да

Задание 3

Тренировка. чётность и остатки

Проверьте, делится ли 7248 на 8.

Решение

1. Последние три цифры 248 делятся на 8.

Ответ

Да



Задание 4

Тренировка. чётность и остатки

Найдите остаток 12345 при делении на 9.

Решение

1. Сумма цифр равна 15, остаток 15 при делении на 9 равен 6.

Ответ

6

Задание 5

Тренировка. чётность и остатки

Запишите 572 через его цифры.

Решение

1. $572 = 5 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 2$.

Ответ

500 + 70 + 2

Задание 6

Тренировка. чётность и остатки

Проверьте делимость 4620 на 45.

Решение

1. Число оканчивается нулём и делится на 5; сумма цифр 12 не делится на 9.

Ответ

Нет

Задание 7

Тренировка. чётность и остатки

Какими двумя последними цифрами может оканчиваться число, делящееся на 25?

Решение

1. Остаток числа при делении на 25 определяется двумя последними цифрами.

2. Среди чисел от 00 до 99 кратны 25 числа 00, 25, 50 и 75.

Ответ

00, 25, 50, 75



Задание 8

Тренировка. чётность и остатки

Найдите наименьшее трёхзначное число, кратное 12.

Решение

1. $12 \cdot 9 = 108$.

Ответ

108

Числа, кратные 12, идут с шагом 12. Предыдущее кратное $12 \cdot 8 = 96$ ещё двузначное, а $12 \cdot 9 = 108$ уже трёхзначное. Поэтому 108 — наименьшее.

Задание 9

Тренировка. чётность и остатки

Проверьте делимость 2728 на 11.

Решение

1. $(2 + 2) - (7 + 8) = -11$ делится на 11.

Ответ

Да

Задание 10

Тренировка. чётность и остатки

Найдите сумму цифр числа 90807.

Решение

1. $9 + 0 + 8 + 0 + 7 = 24$.

Ответ

24

Задание 11

Тренировка. чётность и остатки

Найдите остаток числа $10^5 + 3$ при делении на 11.

Решение

1. $10 \equiv -1 \pmod{11}$; нечётная степень даёт -1 , затем $+3$ даёт остаток 2.

Ответ

2



Задание 12

Тренировка. чётность и остатки

Может ли число с суммой цифр 20 делиться на 3?

Решение

1. 20 не делится на 3, значит и число не делится на 3.

Ответ

Нет

Подготовительные и экзаменационные задачи: задания 13–36

Задание 13

Тренировка. Подготовительная модель • остатки и конструкции

Найдите четырёхзначное натуральное число, кратное 45, все цифры которого различны и чётны.

Решение

1. Подберём конструкцию: 4680.
2. Все цифры различны и чётны.
3. Последняя цифра 0, сумма цифр 18; число делится на 5 и на 9, значит, делится на 45.

Ответ

4680

Задание 14

Тренировка. Подготовительная модель • остатки и конструкции

Найдите шестизначное натуральное число, записанное только цифрами 2 и 0 и делящееся на 24.

Решение

1. Подберём конструкцию: 202200.
2. Последние три цифры 200 делятся на 8.
3. Сумма цифр равна 6 и делится на 3; следовательно, число делится на 24.

Ответ

202200



Задание 15

Тренировка. Подготовительная модель • остатки и конструкции

Найдите четырёхзначное натуральное число, кратное 12, произведение цифр которого равно 10.

Решение

1. Подберём конструкцию: 1152.
2. Произведение цифр равно 10.
3. Последние две цифры 52 делятся на 4, сумма цифр 9 делится на 3.

Ответ

1152

Задание 16

Тренировка. Подготовительная модель • остатки и конструкции

Найдите трёхзначное натуральное число, которое при делении и на 3, и на 4 даёт остаток 1, а все его цифры больше 4.

Решение

1. Подберём конструкцию: 565.
2. $565 = 3 \cdot 188 + 1$; $565 = 4 \cdot 141 + 1$.
3. Цифры 5, 6, 5 больше 4.

Ответ

565

Задание 17

Тренировка. Подготовительная модель • остатки и конструкции

Найдите четырёхзначное число, кратное 36, с различными цифрами и суммой цифр 18.

Решение

1. Подберём конструкцию: 1296.
2. Проверка делимости: $1296 = 36 \cdot 36$.
3. Цифры 1, 2, 9 и 6 различны; их сумма равна 18.

Ответ

1296



Задание 18

Тренировка. Подготовительная модель • остатки и конструкции

Найдите четырёхзначное число, кратное 44, у которого сумма первой и последней цифр равна 9.

Решение

1. Подберём конструкцию: 1408.
2. Проверка делимости: $1408 = 44 \cdot 32$.
3. Первая и последняя цифры дают $1 + 8 = 9$; в записи четыре различные цифры.

Ответ

1408

Задание 19

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Найдите пятизначное число, кратное 15, содержащее ровно два нуля и имеющее сумму цифр 15.

Решение

1. Подберём конструкцию: 10095.
2. Проверка делимости: $10095 = 15 \cdot 673$.
3. В записи ровно два нуля; сумма цифр $1 + 0 + 0 + 9 + 5 = 15$.

Ответ

10095

Задание 20

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Найдите четырёхзначное число, кратное 18, цифры которого строго возрастают.

Решение

1. Подберём конструкцию: 1278.
2. Проверка делимости: $1278 = 18 \cdot 71$.
3. Цифры $1 < 2 < 7 < 8$ расположены в строго возрастающем порядке.

Ответ

1278



Задание 21

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Найдите пятизначное число, кратное 25, содержащее нуль и имеющее сумму цифр 20.

Решение

1. Подберём конструкцию: 10775.
2. Проверка делимости: $10775 = 25 \cdot 431$.
3. Число содержит нуль; сумма цифр $1 + 0 + 7 + 7 + 5 = 20$.

Ответ

10775

Задание 22

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Найдите четырёхзначное число, кратное 28, с различными цифрами и нечётной первой цифрой.

Решение

1. Подберём конструкцию: 1036.
2. Проверка делимости: $1036 = 28 \cdot 37$.
3. Цифры 1, 0, 3, 6 различны; первая цифра нечётна.

Ответ

1036

Задание 23

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Найдите пятизначное число, кратное 72, записанное только цифрами 1, 2, 3 и 6.

Решение

1. Подберём конструкцию: 11232.
2. Проверка делимости: $11232 = 72 \cdot 156$.
3. Каждая цифра записи принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 6\}$.

Ответ

11232



Задание 24

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Найдите четырёхзначное число, кратное 24, с суммой цифр 12 и ненулевой последней цифрой.

Решение

1. Подберём конструкцию: 1056.
2. Проверка делимости: $1056 = 24 \cdot 44$.
3. Сумма цифр $1 + 0 + 5 + 6 = 12$; последняя цифра 6 ненулевая.

Ответ

1056

Задание 25

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Может ли разность трёхзначного числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, быть равна 2025? Обоснуйте ответ.

Решение

1. Для числа $100a + 10b + c$ разность с перевёрнутым равна $99(a - c)$.
2. Она обязана делиться на 99, а 2025 на 99 не делится.

Ответ

Нет

Задание 26

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Может ли разность трёхзначного числа и перевёрнутого числа быть равна 198? Приведите пример.

Решение

1. Подберём конструкцию: 321 и 123.
2. $321 - 123 = 198$.
3. Числа 321 и 123 записаны одними и теми же цифрами в обратном порядке.

Ответ

321 и 123



Задание 27

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Всегда ли разность натурального числа и суммы его цифр делится на 9? Докажите.

Решение

1. В десятичной записи $N = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \dots$
2. Так как $10^k \equiv 1 \pmod{9}$, то $N \equiv a_0 + a_1 + \dots \pmod{9}$.

Ответ

Да

Задание 28

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Может ли после вычитания из трёхзначного числа суммы его цифр получиться 909? Приведите пример или докажите невозможность.

Решение

1. Подберём конструкцию: 920.
2. Проверим число 920.
3. $920 - (9 + 2 + 0) = 920 - 11 = 909$.
4. Следовательно, требуемое значение получить можно.

Ответ

920

Задание 29

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Может ли сумма двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, делиться на 11? Докажите.

Решение

1. $(10a + b) + (10b + a) = 11(a + b)$, поэтому сумма всегда кратна 11.

Ответ

Да



Задание 30

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Существует ли трёхзначное число, которое в 100 раз больше суммы своих цифр?

Решение

1. Подберём конструкцию: 100.
2. Сумма цифр числа 100 равна 1, и $100 = 100 \cdot 1$.

Ответ

100

Задание 31

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Найдите трёхзначное число, которое при делении на 5 даёт остаток 2, при делении на 7 — остаток 3.

Решение

1. Подберём конструкцию: 122.
2. $122 = 5 \cdot 24 + 2$; $122 = 7 \cdot 17 + 3$.

Ответ

122

Задание 32

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Найдите четырёхзначное число, у которого сумма цифр равна 18 и которое делится на 11.

Решение

1. Подберём конструкцию: 9009.
2. Сумма цифр равна 18.
3. По признаку делимости на 11: $(9 + 0) - (0 + 9) = 0$.

Ответ

9009



Задание 33

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Может ли пятизначное число, записанное только цифрами 0 и 5, делиться на 9? Приведите пример или докажите невозможность.

Решение

1. Сумма пяти цифр, каждая 0 или 5, равна $5k$, где $0 \leq k \leq 5$.
2. Чтобы сумма делилась на 9, k должно делиться на 9; возможно только $k = 0$, но тогда первая цифра равна нулю и число не является пятизначным.

Ответ

Нет

Задание 34

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Может ли четырёхзначное число с различными нечётными цифрами делиться на 5? Приведите пример.

Решение

1. Подберём конструкцию: 1375.
2. Последняя цифра 5 обеспечивает делимость на 5; цифры 1, 3, 7, 5 различны и нечётны.

Ответ

1375

Задание 35

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Найдите четырёхзначное число, кратное 99, первая цифра которого равна последней.

Решение

1. Подберём конструкцию: 1881.
2. $1881 = 99 \cdot 19$; первая и последняя цифры равны 1.

Ответ

1881



Задание 36

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • конструкция и обоснование

Может ли натуральное число, сумма цифр которого равна 17, делиться на 9? Обоснуйте ответ.

Решение

1. При делении на 9 число и сумма его цифр дают одинаковые остатки.
2. 17 даёт остаток 8, поэтому число не делится на 9.

Ответ

Нет

Повторение: задания 37-40

Задание 37

Повторение. накопительное повторение • линия 13 • формат ЕГЭ

а) Решите уравнение $2 \cos^2 (x + \pi) + \cos (x + \pi) - 1 = 0$. б) Найдите корни на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Решение

1. Обозначим $y = x + \pi$. Разложим: $(2 \cos y - 1)(\cos y + 1) = 0$.
2. При $\cos y = \frac{1}{2}$: $y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; при $\cos y = -1$: $y = \pi + 2\pi n$.
3. Возвращаемся к x и отбираем корни на заданном отрезке.
4. Подходящие корни: $-\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}$.
5. Общее решение пункта а: $x = \frac{2\pi n}{3}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ

а) $x = \frac{2\pi n}{3}; n \in \mathbb{Z}$.

б)

$$-\frac{2\pi}{3}; 0; \frac{2\pi}{3}$$



Задание 38

Повторение. накопительное повторение • линия 15 • формат ЕГЭ

Решите неравенство $\frac{(x-1)(x-7)}{x-4} \leq 0$.

Решение

1. Критические точки: 1, 4, 7; точка 4 не входит в ОДЗ.
2. Расставляем знаки множителей на четырёх промежутках. Кратности всех нулей нечётные, поэтому знак меняется в каждой критической точке.
3. Выбираем нужные промежутки и получаем $(-\infty; 1] \cup (4; 7]$.

Ответ

$$(-\infty; 1] \cup (4; 7]$$

Задание 39

Повторение. накопительное повторение • линия 16 • формат ЕГЭ

В июле банк выдал кредит в размере 1 200 тыс. рублей на 6 лет. Каждый январь долг увеличивается на некоторый процент, после чего одним платежом уменьшается так, чтобы к июлю каждого следующего года долг становился на одну и ту же величину меньше. Известно, что общая сумма выплат равна 1 620 тыс. рублей. Найдите процентную ставку.

Решение

1. Сумма остатков перед начислениями равна $1200 \cdot \frac{6+1}{2} = 4200$ тыс. рублей.
2. Переплата равна $1620 - 1200 = 420$ тыс. рублей.
3. Из $\frac{p}{100} \cdot 4200 = 420$ получаем $p = 10$.
4. Подстановка даёт 420 тыс. рублей процентов, поэтому ставка найдена верно.

Ответ

10%

Задание 40

Повторение. накопительное повторение • пункт 19а • формат ЕГЭ

Может ли сумма квадратов двух целых чисел равняться 2031?

Решение

1. $2031 \equiv 3 \pmod{4}$, а сумма двух квадратов не даёт остаток 3 по модулю 4.

Ответ

Нет