



Логарифмы

Теория и разобранные примеры

Свойства, условия применения и пошаговые объяснения. Используйте оглавление и закладки PDF для перехода к нужной теме.

Содержание

01. Логарифм появляется из уравнения со степенью	3
02. Почему у логарифма именно такое ОДЗ	3
03. Почему показатель единственен	4
04. Первые следствия определения	4
05. Логарифм произведения	5
06. Логарифм частного	6
07. Логарифм степени	6
08. Объединение логарифмов и сохранение ОДЗ	7
09. Формула замены основания	7
10. Взаимно обратные логарифмы	8
11. Степень с логарифмом в показателе	8
12. Знак логарифма выводится из положения степени	9
13. Равенство логарифмов	9
14. Сравнение логарифмов и направление неравенства	10
15. Основание, зависящее от переменной	10
16. Следствия замены основания	11
17. Полный разбор: вычисление без таблицы логарифмов	11
18. Полный разбор: восстановление замены основания под стрессом	12
19. Полный разбор: логарифмическое уравнение и исходная ОДЗ	12
20. Полный разбор: основание зависит от переменной	13
21. Полный разбор: неравенство и направление знака	14
22. Полный разбор: конструкция с логарифмом в показателе	15
23. Почему «логарифм суммы» не существует как простое свойство	15
24. Алгоритм преобразования логарифмического выражения	16
25. Логарифм как обратный вопрос к степени	16

26. Единая схема вывода всех свойств	17
27. ОДЗ при переменном основании	18
28. Три уравнения с полной проверкой ОДЗ	18
29. Неравенства: направление задаёт основание	19
30. Логарифм в показателе: вычисление без десятичных приближений	20
31. Ложные свойства и быстрые контрпримеры	20
32. График логарифма выводится из графика степени	21
33. Параметр в аргументе логарифма	22
34. Вложенные логарифмы и логарифм в знаменателе	22
35. Степени в основании и аргументе	23
36. Система логарифмических уравнений	24
37. Сравнение двух логарифмов	24
38. Лаборатория ошибок	25
39. Контроль вывода	25
40. Быстрая проверка понимания	26
41. Эталонный разбор 1 • Логарифм с основанием меньше единицы	26
42. Эталонный разбор 2 • Касание в сумме логарифмов	27
43. Параметр: ОДЗ, максимум и число пересечений	28

01. Логарифм появляется из уравнения со степенью

Рассмотрим уравнение

$$2^x = \frac{1}{8}.$$

Поскольку $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, получаем $x = -3$. Новый символ нужен лишь для короткой записи ответа на общий вопрос:

$$a^y = x.$$

Определение. При $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ логарифмом x по основанию a называется единственное число y , для которого

$$a^y = x.$$

Запись:

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x.$$

Двойная стрелка принципиальна: определение работает в обе стороны.

02. Почему у логарифма именно такое ОДЗ

Почему основание положительно

Для положительного a действительная степень a^t определена для всех действительных t и остаётся положительной. Это даёт непрерывную степенную функцию, у которой можно строить обратную функцию.

При отрицательном основании часть дробных степеней не существует в действительных числах. Например, $(-2)^{\frac{1}{2}}$ не является действительным числом. Поэтому функция a^t не определена на всей действительной прямой, и единого действительного логарифма не возникает.

Почему основание не равно нулю

Нулевая основа не допускает отрицательных степеней и даёт $0^t = 0$ при $t > 0$. Такая зависимость не может принимать положительные значения и не имеет обратной функции на нужной области.

Почему основание не равно единице

Для любого t

$$1^t = 1.$$

Уравнение $1^t = x$ не имеет решения при $x \neq 1$ и имеет бесконечно много решений при $x = 1$. Единственного показателя нет, следовательно, логарифм не определён.

Почему аргумент положителен

При $a > 0$ любая действительная степень a^t положительна. Поэтому уравнение $a^t = x$ может иметь решение только при $x > 0$.

Итог ОДЗ: $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Каждое условие получено из требования существования и единственности показателя степени.

03. Почему показатель единственен

Для $a > 1$ функция a^t строго возрастает. Действительно, если $v > u$, то $v - u > 0$ и

$$\frac{a^v}{a^u} = a^{v-u} > 1,$$

следовательно, $a^v > a^u$.

Если $0 < a < 1$, представим $a = \frac{1}{b}$, где $b > 1$. Тогда

$$a^t = b^{-t},$$

и с ростом t значение уменьшается. В обоих случаях функция строго монотонна, поэтому одно положительное число не может соответствовать двум разным показателям.

04. Первые следствия определения

Логарифм единицы

$$\log_a 1 = 0,$$

потому что $a^0 = 1$.

Логарифм основания

$$\log_a a = 1,$$

потому что $a^1 = a$.

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a x} = x,$$

потому что именно так определено число $\log_a x$.

Логарифм степени основания

$$\log_a (a^t) = t.$$

Это следует из единственности показателя: показатель, превращающий a в a^t , равен t .

Все четыре записи — не отдельные формулы для заучивания, а прямые переформулировки определения.

05. Логарифм произведения

Теорема. При $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Доказательство. Обозначим

$$u = \log_a x, \quad v = \log_a y.$$

По определению $x = a^u$, $y = a^v$. Тогда

$$xy = a^u a^v = a^{u+v}.$$

Следовательно, показатель, в который нужно возвести a , чтобы получить xy , равен $u + v$. Значит,

$$\log_a (xy) = u + v = \log_a x + \log_a y.$$

Условия $x > 0$ и $y > 0$ нужны, чтобы оба исходных логарифма существовали.

06. Логарифм частного

Теорема. При $x > 0$, $y > 0$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Доказательство. С теми же обозначениями

$$\frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}.$$

По определению логарифма показатель равен $u - v$.

07. Логарифм степени

Теорема. При $x > 0$ и действительном r

$$\log_a (x^r) = r \log_a x.$$

Доказательство. Пусть $u = \log_a x$, тогда $x = a^u$. Следовательно,

$$x^r = (a^u)^r = a^{ur}.$$

По определению логарифма

$$\log_a (x^r) = ur = r \log_a x.$$

Почему иногда появляется модуль

Формула

$$\log_a (x^2) = 2 \log_a x$$

требует $x > 0$, потому что справа стоит $\log_a x$. Если исходно известно только $x \neq 0$, то корректная запись

$$\log_a (x^2) = 2 \log_a |x|,$$

поскольку $x^2 = |x|^2$ и $|x| > 0$.

Это важный пример: упрощённая формула не должна сужать или расширять область молча.

08. Объединение логарифмов и сохранение ОДЗ

Из доказанных теорем можно идти в обратную сторону, но исходные ограничения сохраняются.

Например,

$$\log_a(x-1) + \log_a(x+2) = \log_a((x-1)(x+2))$$

верно при

$$x-1 > 0, \quad x+2 > 0,$$

то есть $x > 1$.

Нельзя заменить эти два условия одним

$$(x-1)(x+2) > 0,$$

потому что произведение положительно также при $x < -2$, где оба исходных логарифма не существуют.

09. Формула замены основания

Теорема. При допустимых a, b, x

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Доказательство, которое нужно уметь восстановить. Пусть

$$y = \log_a x.$$

Тогда $a^y = x$. Возьмём логарифм по основанию b обеих частей:

$$\log_b(a^y) = \log_b x.$$

По доказанному свойству степени

$$y \log_b a = \log_b x.$$

Поскольку $a \neq 1$, имеем $\log_b a \neq 0$. Поэтому

$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Возвращая $y = \log_a x$, получаем формулу.

Проверка расположения дроби. Аргумент x остаётся в числителе, основание a - в знаменателе. Если забыли, вывод занимает четыре строки.

10. Взаимно обратные логарифмы

Подставим $x = b$ в формулу замены основания:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

Значит,

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

Это не самостоятельное правило «переворота», а следствие замены основания.

Более общий цепной переход:

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c.$$

Доказательство. Через любое общее основание d :

$$\frac{\log_d b}{\log_d a} \cdot \frac{\log_d c}{\log_d b} = \frac{\log_d c}{\log_d a} = \log_a c.$$

11. Степень с логарифмом в показателе

Основное тождество даёт

$$a^{\log_a x} = x.$$

Если основания отличаются, их согласуют.

Пример.

$$4^{\log_2 3} = (2^2)^{\log_2 3} = 2^{2\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 9.$$

Каждый переход обоснован законом степени степени и основным логарифмическим тождеством.

Ещё одно полезное следствие:

$$a^{\log_b x} = x^{\log_b a}.$$

Доказательство. Запишем $a = b^{\log_b a}$. Тогда

$$a^{\log_b x} = (b^{\log_b a})^{\log_b x} = b^{(\log_b a)(\log_b x)}.$$

Аналогично правая часть равна тому же выражению.

12. Знак логарифма выводится из положения степени

Основание $a > 1$

- если $x > 1$, то $\log_a x > 0$;
- если $0 < x < 1$, то $\log_a x < 0$.

Причина: положительные степени основания больше 1 дают значения больше 1, отрицательные — дроби между 0 и 1.

Основание $0 < a < 1$

Знаки меняются местами:

- если $x > 1$, то $\log_a x < 0$;
- если $0 < x < 1$, то $\log_a x > 0$.

Например,

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3,$$

потому что $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$.

Ученик не запоминает таблицу знаков: он возвращается к уравнению $a^y = x$.

13. Равенство логарифмов

Поскольку логарифмическая функция строго монотонна, она принимает каждое значение единственный раз.

Теорема. При допустимом основании

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

равносильно

$$f(x) = g(x),$$

если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

Доказательство. Возводим a в обе части и используем $a^{\log_a t} = t$.
Обратный переход следует из равенства аргументов и существования
обоих логарифмов.

14. Сравнение логарифмов и направление неравенства

Если $a > 1$, функция $\log_a x$ возрастает, поэтому

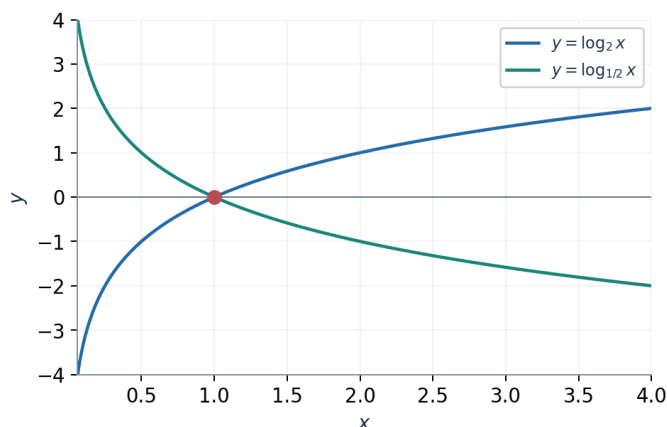
$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

на общей ОДЗ.

Если $0 < a < 1$, функция убывает, поэтому знак меняется:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$

Это не отдельное правило логарифмических неравенств, а следствие доказанной монотонности обратной функции.



Логарифм возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$. Обе кривые проходят через $(1; 0)$.

15. Основание, зависящее от переменной

В выражении $\log_{g(x)} f(x)$ ОДЗ включает три условия:

$$g(x) > 0,$$

$$g(x) \neq 1,$$

$$f(x) > 0.$$

Условие $g(x) \neq 1$ часто теряется. Его происхождение уже доказано: при основании 1 показатель не определяется единственным образом.

16. Следствия замены основания

Степень в основании

При $p \neq 0$ и допустимых значениях

$$\log_{a^p} x = \frac{\log_a x}{\log_a (a^p)} = \frac{\log_a x}{p}.$$

То есть

$$\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x.$$

Степени в основании и аргументе

Если $x > 0$, то

$$\log_{a^p} (x^q) = \frac{\log_a (x^q)}{\log_a (a^p)} = \frac{q}{p} \log_a x.$$

Обратное основание

Поскольку $a^{-1} = \frac{1}{a}$,

$$\log_{\frac{1}{a}} x = \log_{a^{-1}} x = -\log_a x.$$

Минус не принимается на веру: он возникает из деления на показатель -1 в основании.

17. Полный разбор: вычисление без таблицы логарифмов

Вычислим

$$\log_2 12 + \log_2 \frac{8}{3} - \log_2 16.$$

Все аргументы положительны, поэтому свойства применимы. Объединяем:

$$\log_2 \left(12 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{16} \right).$$

Подлогарифмическое выражение равно

$$12 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{16} = 2.$$

Следовательно, ответ равен

$$\log_2 2 = 1.$$

Почему не нужно вычислять $\log_2 12$ отдельно. Свойства логарифмов специально переводят произведения и частные аргументов в суммы и разности показателей. Структура выражения важнее отдельных значений.

18. Полный разбор: восстановление замены основания под стрессом

Пусть нужно упростить

$$\frac{\log_5 7}{\log_5 3}.$$

Если ученик не помнит, какой логарифм окажется в основании, он обозначает

$$y = \log_3 7.$$

Тогда $3^y = 7$. Логарифмируем по основанию 5:

$$y \log_5 3 = \log_5 7.$$

Следовательно,

$$y = \frac{\log_5 7}{\log_5 3}.$$

Значит, исходная дробь равна $\log_3 7$. Вывод одновременно восстанавливает формулу и проверяет порядок числителя и знаменателя.

19. Полный разбор: логарифмическое уравнение и исходная ОДЗ

Решим

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = 3.$$

Шаг 1. ОДЗ

$$x-1 > 0, \quad x-3 > 0,$$

поэтому $x > 3$.

Шаг 2. Объединение

На этой ОДЗ

$$\log_2((x-1)(x-3)) = 3.$$

Шаг 3. Переход к степени

По определению логарифма

$$(x-1)(x-3) = 2^3 = 8.$$

Получаем

$$x^2 - 4x - 5 = 0,$$

$$x = 5 \quad \text{или} \quad x = -1.$$

Шаг 4. Проверка ОДЗ

Только $x = 5$ удовлетворяет $x > 3$. Корень -1 возник после алгебраического преобразования и отбрасывается не «по ощущению», а по исходной области.

20. Полный разбор: основание зависит от переменной

Решим

$$\log_{x-1} 4 = 2.$$

ОДЗ основания

$$x - 1 > 0, \quad x - 1 \neq 1.$$

То есть $x > 1$, $x \neq 2$.

Определение

$$(x-1)^2 = 4.$$

Отсюда

$$x - 1 = 2 \quad \text{или} \quad x - 1 = -2.$$

Получаем $x = 3$ или $x = -1$. Второе значение не входит в ОДЗ. Ответ: $x = 3$.

Важно: из уравнения квадрата возникают два алгебраических значения, но положительность основания оставляет одно.

21. Полный разбор: неравенство и направление знака

Решим

$$\log_{\frac{1}{3}}(x + 2) > \log_{\frac{1}{3}}(5 - x).$$

ОДЗ

$$x + 2 > 0, \quad 5 - x > 0,$$

то есть $-2 < x < 5$.

Основание $\frac{1}{3}$ лежит между 0 и 1, поэтому логарифмическая функция убывает.

Следовательно, знак при переходе к аргументам меняется:

$$x + 2 < 5 - x.$$

Отсюда

$$2x < 3, \quad x < \frac{3}{2}.$$

Пересечение с ОДЗ:

$$-2 < x < \frac{3}{2}.$$

Если знак неравенства забыт, его можно восстановить численно из определения: при основании $\frac{1}{3}$ большему аргументу соответствует меньший показатель.

22. Полный разбор: конструкция с логарифмом в показателе

Упростим

$$9^{\log_3 2} + 2^{\log_3 9}.$$

Первое слагаемое:

$$9^{\log_3 2} = (3^2)^{\log_3 2} = 3^{2\log_3 2} = 4.$$

Во втором слагаемом

$$\log_3 9 = 2,$$

поэтому оно также равно 4. Ответ: 8.

Альтернативно можно использовать доказанное тождество

$$a^{\log_b x} = x^{\log_b a}.$$

Тогда $9^{\log_3 2} = 2^{\log_3 9} = 4$. Наличие двух способов полезно: второй сокращает вычисления, первый восстанавливает происхождение тождества.

23. Почему «логарифм суммы» не существует как простое свойство

Если бы выполнялось

$$\log_a (x + y) = \log_a x + \log_a y,$$

то после возведения основания a получили бы

$$x + y = xy.$$

Это не тождество. Например, при $x = y = 1$ левая часть равна 2, правая — 1.

Причина глубже контрпримера: сложение показателей соответствует **умножению** степеней,

$$a^u a^v = a^{u+v}.$$

Операции над аргументами логарифмов наследуются из операций над степенями. Для суммы аргументов соответствующего простого закона степеней нет.

24. Алгоритм преобразования логарифмического выражения

1. Выписать условия для каждого основания и аргумента.
2. Представить числа степенями удобного основания.
3. Решить, нужен ли переход к общему основанию.
4. Применять свойства только после проверки положительности аргументов.
5. Если формула забыта, вернуться к обозначениям $u = \log_a x$, $v = \log_a y$.
6. После преобразования не расширять исходную ОДЗ.
7. Проверить знак результата через уравнение $a^y = x$.

25. Логарифм как обратный вопрос к степени

Вместо заучивания символа $\log_a b$ ученик каждый раз переводит его в вопрос: «В какую степень нужно возвести a , чтобы получить b ?» Такая расшифровка сразу возвращает ОДЗ и позволяет проверить любое преобразование.

$$\log_a b = c \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad a^c = b.$$

Из правой части видно, почему $b > 0$: положительное основание в любой действительной степени даёт положительное число. Видно и условие $a \neq 1$: все степени единицы равны единице, поэтому показатель либо не существует, либо не единственен.

Почему основание должно быть положительным. Для отрицательного основания действительные степени определены не для всех показателей: например, квадратный корень из отрицательного числа отсутствует в действительных числах. Непрерывной показательной функции на всей числовой прямой не получается, поэтому обратная функция также не определяется.

Единственность ответа

Если $a > 1$, функция a^x строго возрастает: большему показателю соответствует большее значение. Если $0 < a < 1$, она строго убывает: большему показателю соответствует меньшее значение. В обоих случаях одно положительное значение b не может соответствовать двум различным показателям. Поэтому логарифм, если существует, единственен.

Проверка. $\log_2 8 = 3$, потому что $2^3 = 8$. $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, потому что $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$. Знак логарифма изменился не по отдельному правилу, а из-за убывания степени с основанием между нулём и единицей.

26. Единая схема вывода всех свойств

Пусть $x > 0, y > 0, a > 0$ и $a \neq 1$. Обозначим $p = \log_a x$ и $q = \log_a y$. По определению $x = a^p$ и $y = a^q$. Теперь каждое свойство получается из одного закона степеней.

Произведение

$$xy = a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \quad \text{поэтому} \quad \log_a(xy) = p + q.$$

После возврата обозначений получаем $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. Условия $x > 0$ и $y > 0$ нужны не только для произведения: оба исходных логарифма должны существовать.

Частное

$$\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \quad \text{поэтому} \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = p - q.$$

Здесь $y > 0$ автоматически исключает нулевой знаменатель. Формула является следствием частного степеней, а не самостоятельной командой «деление превращается в минус».

Степень аргумента

$$x^r = (a^p)^r = a^{pr}, \quad \text{поэтому} \quad \log_a(x^r) = r \cdot \log_a x.$$

Для произвольного действительного r безопасное условие - $x > 0$. Если исходное выражение содержит чётную степень некоторого выражения, сначала нужно определить его ОДЗ; нельзя задним числом разрешать нулевые или отрицательные аргументы.

Замена основания

Пусть $c > 0$ и $c \neq 1$. Из $a^p = x$ берём логарифм по основанию c :

$$p \cdot \log_c a = \log_c x, \quad \text{поэтому} \quad \log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}.$$

Знаменатель не равен нулю, потому что $\log_c a = 0$ означало бы $a = 1$, а это запрещённое основание. Так условие формулы появляется внутри доказательства.

Практикум. Закройте правые части формул. Ученик получает только обозначения $p = \log_a x, q = \log_a y$ и должен за две минуты восстановить произведение, частное, степень и замену основания.

27. ОДЗ при переменном основании

У логарифма с переменным основанием одновременно проверяются три условия: основание положительно, основание не равно единице, аргумент положителен. Их нельзя объединять на глаз: каждое даёт свою часть ответа.

Пример 1

Задача. Найдите ОДЗ выражения $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 6)$.

Шаг 1. Основание: $x - 1 > 0$, значит $x > 1$. Кроме того, $x - 1 \neq 1$, значит $x \neq 2$.

Шаг 2. Аргумент: $(x - 2)(x - 3) > 0$. Произведение положительно при $x < 2$ или $x > 3$.

Шаг 3. Пересекаем условия с $x > 1$ и получаем

$$1 < x < 2 \quad \text{или} \quad x > 3.$$

Точка $x = 2$ и так не входит из-за нулевого аргумента, но условие основания всё равно должно быть выписано: в другой задаче оно может исключать отдельную допустимую для аргумента точку.

Пример 2

Задача. Найдите ОДЗ $\log_{2-x}(x + 1)$. Из $2 - x > 0$ получаем $x < 2$; из $2 - x \neq 1 - x \neq 1$; из $x + 1 > 0 - x > -1$. Ответ:

$$-1 < x < 1 \quad \text{или} \quad 1 < x < 2.$$

Проверка понимания. Почему нельзя заменить условие «основание положительно и не равно единице» одним условием «основание неотрицательно»? Приведите отдельные контрпримеры для основания 0 и основания 1.

28. Три уравнения с полной проверкой ОДЗ

Уравнение 1. Сумма логарифмов

Задача. Решите $\log_2(x - 1) + \log_2(x - 3) = 3$.

Шаг 1. ОДЗ: $x - 1 > 0$ и $x - 3 > 0$, поэтому $x > 3$. Только на этой области объединяем логарифмы:

$$\log_2((x - 1)(x - 3)) = 3.$$

По определению логарифма $(x - 1)(x - 3) = 8$. Получаем $x^2 - 4x - 5 = 0$, откуда $x = 5$ или $x = -1$. Условие $x > 3$ оставляет $x = 5$.

Уравнение 2. Переменное основание

Задача. Решите $\log_{x-1} 4 = 2$.

ОДЗ основания: $x > 1$ и $x \neq 2$. По определению $(x-1)^2 = 4$. Отсюда $x-1 = 2$ или $x-1 = -2$, то есть $x = 3$ или $x = -1$. Второе значение нарушает положительность основания. Ответ: 3.

Почему нельзя сразу брать только положительный квадратный корень. Равенство $(x-1)^2 = 4$ имеет два алгебраических корня. Один из них исключает не операция извлечения корня, а исходное ОДЗ логарифма.

Уравнение 3. Логарифм переносится через произведение

Задача. Решите $\log_3(x+1) = 2 - \log_3(x-1)$. ОДЗ: $x > 1$. Переносим второй логарифм влево и объединяем:

$$\log_3((x+1)(x-1)) = 2, \quad x^2 - 1 = 9.$$

Кандидаты $x = \sqrt{10}$ и $x = -\sqrt{10}$. ОДЗ оставляет только $\sqrt{10}$. Проверка исходных аргументов завершает решение.

29. Неравенства: направление задаёт основание

Основание больше единицы

Задача. Решите $\log_3(x-2) \leq 2$. Сначала $x-2 > 0$, то есть $x > 2$. Поскольку основание 3 больше 1, логарифмическая функция возрастает и знак неравенства сохраняется:

$$x-2 \leq 3^2, \quad \text{поэтому} \quad 2 < x \leq 11.$$

Основание между нулём и единицей

Задача. Решите $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) > -1$. ОДЗ: $x > \frac{1}{2}$. Функция с основанием $\frac{1}{2}$ убывает, поэтому при переходе к аргументам знак меняется:

$$2x-1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2, \text{ поэтому } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}.$$

Переменное основание и разбиение на случаи

Задача. При каких x определён и положителен $\log_x 4$? ОДЗ: $x > 0$ и $x \neq 1$. Если $x > 1$, степени x с положительными показателями дают числа больше 1, поэтому $\log_x 4 > 0$. Если $0 < x < 1$, для получения числа $4 > 1$ требуется отрицательный показатель, поэтому логарифм отрицателен. Ответ: $x > 1$.

Запрет. Нельзя переносить знак неравенства через логарифм, пока не установлено, находится основание выше единицы или между нулём и единицей.

30. Логарифм в показателе: вычисление без десятичных приближений

Пример 1

Вычислим $2^{\log_4 9}$. По замене основания

$$\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \left(\frac{1}{2}\right) \log_2 9 = \log_2 3.$$

Тогда

$$2^{\log_4 9} = 2^{\log_2 3} = 3.$$

Пример 2

Вычислим $9^{\log_3 2}$. Представим 9 как 3^2 и применим закон степени степени:

$$9^{\log_3 2} = 3^{(2 \log_3 2)} = (3^{\log_3 2})^2 = 4.$$

Цепочка логарифмов

Теорема. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ при допустимых положительных основаниях и аргументах. Доказательство заменой основания:

$$\left(\frac{\log_c b}{\log_c a}\right) \cdot \left(\frac{\log_c c}{\log_c b}\right) = \frac{\log_c c}{\log_c a}.$$

Сокращение $\log_c b$ разрешено, потому что $b \neq 1$, если b используется как основание второго логарифма. Условие снова появляется внутри доказательства.

31. Ложные свойства и быстрые контрпримеры

Контрпример. Равенство $\log_2(x + y) = \log_2 x + \log_2 y$ неверно. При $x = y = 2$ слева $\log_2 4 = 2$, справа $1 + 1 = 2$ - случайно совпало. Поэтому берём второй пример: $x = 2, y = 6$. Слева $\log_2 8 = 3$, справа $1 + \log_2 6$, что не равно 3.

Более надёжное объяснение: справа по доказанному свойству находится $\log_2(xy)$, а не $\log_2(x + y)$. Чтобы равенство выполнялось, понадобилось бы $x + y = xy$, что верно далеко не всегда.

Контрпример. Нельзя писать $\log_a(x - y) = \log_a x - \log_a y$. Правая часть равна $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)$. Разность и частное — разные операции.

Контрпример. Из $\log_2(x^2) = 2\log_2 x$ нельзя делать вывод для отрицательного x : исходный логарифм квадрата может существовать, а $\log_2 x$ - нет. Корректная универсальная запись на области $x \neq 0$: $\log_2(x^2) = 2\log_2|x|$.

Контрпример. После объединения $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = \log_2(x^2-1)$ нельзя заменить исходную ОДЗ $x > 1$ условием $x^2 - 1 > 0$. Второе условие добавило бы $x < -1$, где оба исходных логарифма не существуют.

Критерий сильной группы. Для каждой ложной формулы ученик должен либо вывести правильную формулу из степеней, либо дать числовой контрпример и указать нарушенное условие ОДЗ.

32. График логарифма выводится из графика степени

Функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ взаимно обратны. Поэтому их графики симметричны относительно прямой $y = x$. Точка $(0; 1)$ показательной функции превращается в точку $(1; 0)$ логарифма, а точка $(1; a)$ — в точку $(a; 1)$.

Область значений показательной функции — положительные числа, поэтому область определения логарифма $x > 0$. Область определения показательной функции — все действительные числа, поэтому логарифм принимает любые действительные значения.

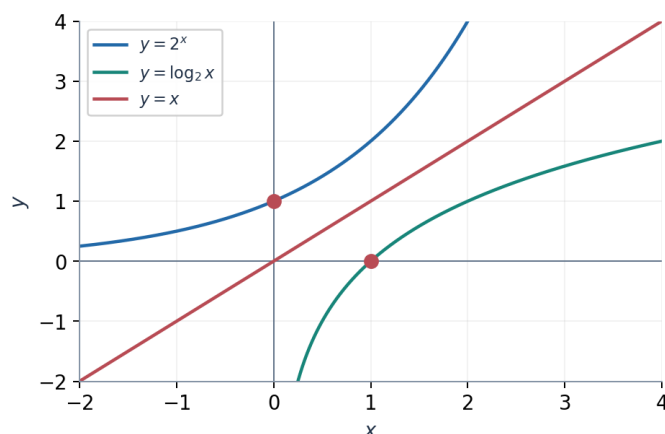
Основание больше единицы

Если $a > 1$, показательная функция возрастает. Отражение относительно $y = x$ сохраняет возрастание, поэтому $\log_a x$ также возрастает. Это объясняет сохранение знака в логарифмических неравенствах.

Основание между нулём и единицей

Если $0 < a < 1$, показательная функция убывает. Обратная функция тоже убывает, поэтому при переходе от логарифмов к аргументам знак неравенства меняется.

Проверка по опорным точкам. Для любого допустимого основания $\log_a 1 = 0$ и $\log_a a = 1$. При $a > 1$ точка $(a; 1)$ лежит справа от $(1; 0)$; при $0 < a < 1$ - слева, что согласуется с направлением графика.



Графики степени и логарифма симметричны относительно $y = x$.

33. Параметр в аргументе логарифма

Задача. В зависимости от параметра a решите уравнение $\log_2(x - a) = \log_2(2x - 3)$.

ОДЗ: $x - a > 0$ и $2x - 3 > 0$. Поскольку основание 2 больше 1 и логарифм строго возрастает, равенство логарифмов равносильно равенству аргументов:

$$x - a = 2x - 3, \quad \text{поэтому} \quad x = 3 - a.$$

Подставим найденное значение в оба условия ОДЗ. Первое даёт $3 - a - a > 0$, то есть $a < \frac{3}{2}$. Второе даёт $2(3 - a) - 3 > 0$, снова $a < \frac{3}{2}$.

Вывод. При $a < \frac{3}{2}$ существует единственное решение $x = 3 - a$. При $a \geq \frac{3}{2}$ решений нет. Граница появилась не из алгебраического равенства, а из исходной области допустимых значений.

Важно. В задачах с параметром ОДЗ проверяется после получения формулы для x . Именно эта проверка обычно превращает одно алгебраическое выражение в несколько случаев по параметру.

34. Вложенные логарифмы и логарифм в знаменателе

Вложенный логарифм

Задача. Решите $\log_2(\log_3 x) = 1$. Внешний логарифм требует $\log_3 x > 0$. Сам внутренний логарифм требует $x > 0$. Из определения внешнего логарифма получаем $\log_3 x = 2$, откуда $x = 9$. Проверка: внутренний логарифм равен $2 > 0$.

Логарифм в знаменателе

Выражение $\frac{1}{\log_2 x}$ требует $x > 0$ и $\log_2 x \neq 0$. Последнее равносильно $x \neq 1$. По формуле взаимно обратных логарифмов

$$\frac{1}{\log_2 x} = \log_x 2, x > 0, x \neq 1.$$

ОДЗ правой части совпадает с найденной областью. Если забыть условие $x \neq 1$, появится деление на ноль слева и запрещённое основание справа.

Два одинаковых логарифма

Задача. Решите $\log_2 x = 3 - \log_2 x$. ОДЗ: $x > 0$. Переносим одинаковые выражения: $2\log_2 x = 3$, поэтому $\log_2 x = \frac{3}{2}$ и $x = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$. Полученное значение положительно.

35. Степени в основании и аргументе

Пусть $a > 0, a \neq 1, b > 0, m \neq 0$. По замене основания

$$\log_{a^m} (b^n) = \frac{\log_a (b^n)}{\log_a (a^m)}.$$

Числитель равен $n \cdot \log_a b$, знаменатель — m . Поэтому

$$\log_{a^m} (b^n) = \left(\frac{n}{m}\right) \log_a b.$$

Ограничение $m \neq 0$ нужно потому, что при $m = 0$ основание a^m равно 1. Если m отрицательно, формула сохраняется: основание остаётся положительным и не равно единице.

Пример

Вычислим $\log_8 \sqrt{2}$. Представим $8 = 2^3$ и $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$. По доказанной формуле

$$\log_{2^3} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$$

Проверка определением:

$$(2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Обратное основание

Так как $\frac{1}{a} = a^{-1}$, получаем $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$. Знак минус возникает из показателя -1 у основания, а не из отдельного правила «перевернули основание - поменяли знак».

36. Система логарифмических уравнений

Задача. Решите систему $\log_2 x + \log_2 y = 3$ и $\log_2 x - \log_2 y = 1$.

ОДЗ: $x > 0, y > 0$. Сложим уравнения: $2\log_2 x = 4$, откуда $\log_2 x = 2$ и $x = 4$. Вычитая второе уравнение из первого, получаем $2\log_2 y = 2$, поэтому $y = 2$.

Проверка: $\log_2 4 + \log_2 2 = 2 + 1 = 3$; разность равна 1. Оба числа положительны.

Альтернативный вывод. Первое уравнение даёт $xy = 8$, второе $\frac{x}{y} = 2$. Перемножая равенства, получаем $x^2 = 16$. Условие $x > 0$ выбирает $x = 4$, затем $y = 2$. ОДЗ снова участвует в выборе знака.

Почему нельзя вводить логарифмы отрицательных переменных

Если после алгебраического решения системы $xy = 8, \frac{x}{y} = 2$ возникли бы пары $(4; 2)$ и $(-4; -2)$, исходная логарифмическая ОДЗ сразу исключила бы отрицательную пару. Поэтому переход к произведению и частному выполняется только вместе с условиями $x > 0, y > 0$.

37. Сравнение двух логарифмов

Возрастающее основание

Задача. Решите $\log_2(x-1) > \log_2(3-x)$. ОДЗ: $x-1 > 0$ и $3-x > 0$, то есть $1 < x < 3$. Основание больше 1, поэтому сравниваем аргументы без изменения знака:

$$x-1 > 3-x, \quad x > 2.$$

Пересечение с ОДЗ даёт ответ $2 < x < 3$.

Убывающее основание

Если в той же задаче основание заменить на $\frac{1}{2}$, ОДЗ сохранится, но функция будет убывать. Поэтому знак меняется:

$$x-1 < 3-x, \quad x < 2.$$

Ответ во втором случае: $1 < x < 2$. Одна и та же пара аргументов даёт разные половины ОДЗ только из-за направления монотонности.

Финальная проверка. До сравнения аргументов ученик обязан назвать ОДЗ и тип основания. Без этих двух шагов решение логарифмического неравенства не засчитывается.

38. Лаборатория ошибок

Ошибка	Почему неверно	Как восстановить верный ход
$\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$	степени перемножаются при сложении показателей, а не складываются	взять $a = 10, x = y = 1$ как контрпример
основание равно 1	показатель не единственен	исследовать уравнение $1^t = x$
аргумент допускают отрицательным	положительная степень не даёт отрицательное число	вернуться к $a^t = x$
замена основания перевёрнута	формула угадана	вывести через $a^y = x$ и логарифмирование по b
после объединения расширили ОДЗ	произведение может быть положительно при двух отрицательных множителях	сохранить условия каждого исходного аргумента
неравенство решено без основания	потеряна монотонность	отдельно рассмотреть $a > 1$ и $0 < a < 1$

39. Контроль вывода

1. объяснить все три ограничения $a > 0, a \neq 1, x > 0$;
2. доказать единственность логарифма через монотонность степени;
3. вывести логарифм произведения;
4. вывести логарифм частного;
5. вывести логарифм степени и объяснить появление модуля;
6. вывести замену основания;
7. получить формулу взаимно обратных логарифмов;
8. объяснить знак логарифма при основании меньше 1;
9. доказать равносильность равенства логарифмов равенству аргументов на ОДЗ.

40. Быстрая проверка понимания

Вопрос ученику	Критерий полного ответа
Почему основание логарифма положительно?	Действительная показательная функция должна быть определена для всех показателей.
Почему основание не равно 1?	Функция 1^t постоянна, показатель не определяется однозначно.
Почему аргумент положителен?	Положительная степень положительного основания не бывает неположительной.
Как вывести логарифм произведения?	Обозначить показатели u и v и перемножить a^u и a^v .
Как восстановить замену основания?	Записать $x = a^y$ и выразить логарифмы по новому основанию.
Почему нет простого логарифма суммы?	Сложению аргументов не соответствует базовый закон степеней.

Два общих эталона по теме урока: №15 и №18: логарифмические ограничения, переменное основание и параметр. Это не набор коротких шаблонов, а полные модели экзаменационного рассуждения.

41. Эталонный разбор 1 • Логарифм с основанием меньше единицы

Условие

Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) \geq -1$.

Решение с обоснованием

Шаг 1. Аргумент должен быть положительным: $x^2 - 1 > 0$.

Шаг 2. Основание $\frac{1}{2}$ лежит между 0 и 1, поэтому логарифм убывает. Неравенство равносильно $0 < x^2 - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$.

Шаг 3. Получаем $1 < x^2 \leq 3$.

Шаг 4. Следовательно, $-\sqrt{3} \leq x < -1$ или $1 < x \leq \sqrt{3}$.

Контроль полноты. Строгая нижняя граница обусловлена ОДЗ, а верхняя нестрогая — знаком исходного неравенства.

Ответ. $[-\sqrt{3}; -1) \cup (1; \sqrt{3}]$.

Экзаменационный акцент. При основании меньше единицы знак сравнения аргументов обязательно меняется.

42. Эталонный разбор 2 • Касание в сумме логарифмов

Условие

В зависимости от a определите число решений уравнения $\log_2(x - a) + \log_2(6 - x) = 2$.

Решение с обоснованием

Шаг 1. ОДЗ: $a < x < 6$; при $a \geq 6$ решений нет. На ОДЗ уравнение равносильно $(x - a)(6 - x) = 4$.

Шаг 2. Левая часть — обращённая вниз парабола с нулями a и 6. Её максимум в середине интервала равен $\frac{(6 - a)^2}{4}$.

Шаг 3. При $a < 2$ максимум больше 4, поэтому пересечений с уровнем 4 два. При $a = 2$ максимум равен 4 — одно касание.

Шаг 4. При $a > 2$ максимум меньше 4 либо ОДЗ пусто, поэтому решений нет.

Контроль полноты. На каждой половине ОДЗ функция строго монотонна, что доказывает точное, а не приблизительное число пересечений.

Ответ. 2 решения при $a < 2$; 1 при $a = 2$; 0 при $a > 2$.

Экзаменационный акцент. В параметрической задаче требуется обосновать количество корней, а не только вычислить дискриминант.

43. Параметр: ОДЗ, максимум и число пересечений

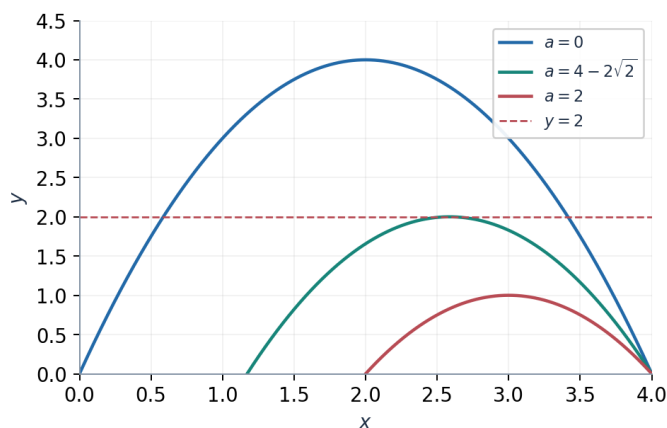
В уравнении $\log_2(x-a) + \log_2(4-x) = 1$ сначала получаем $a < x < 4$. При $a \geq 4$ интервал пуст.

На ОДЗ уравнение равносильно $(x-a)(4-x) = 2$. Левая часть — парабола

$$\frac{(4-a)^2}{4} - \left(x - \frac{a+4}{2}\right)^2.$$

Её максимум на $(a; 4)$ равен $\frac{(4-a)^2}{4}$. Сравниваем его с 2: два корня при $a < 4 - 2\sqrt{2}$, один при равенстве, ни одного при $a > 4 - 2\sqrt{2}$. В последнем случае учтены и непустая, и пустая ОДЗ.

Объяснение для преподавателя. Логарифмы здесь лишь переводят вопрос к высоте параболы. Но дуга между a и 4 — единственная разрешённая часть графика. Поэтому одного дискриминанта без ОДЗ недостаточно.



Допустимые дуги $(x-a)(4-x)$ при трёх значениях a .
Уровень 2 даёт два, один или ноль корней.