



Наибольшее и наименьшее значение функции

Теория и разобранные примеры

Свойства, условия применения и пошаговые объяснения. Используйте оглавление и закладки PDF для перехода к нужной теме.

Содержание

01. Что именно требуется найти	2
02. Почему на отрезке есть максимум и минимум	2
03. Полный алгоритм и таблица кандидатов	3
04. Производные и знак: короткое восстановление	4
05. Рациональные функции: ОДЗ прежде преобразований	4
06. Корни, модули и негладкие точки	5
07. Логарифмы и экспоненты без лишних приближений	6
08. Замена переменной и сохранение промежутка	7
09. Как читать график функции и график производной	8
10. Незамкнутые промежутки: граница не всегда ответ	8
11. Геометрическая оптимизация: от рисунка к модели	9
12. Параметр: положение вершины и сравнение концов	10
13. Выпуклая функция с модулем: минимум в изломе	11
14. Наилучшее приближение: уравнивать две ошибки	11
15. Типичные ошибки и самостоятельная проверка	12
16. Практика: от алгоритма к исследованию	13

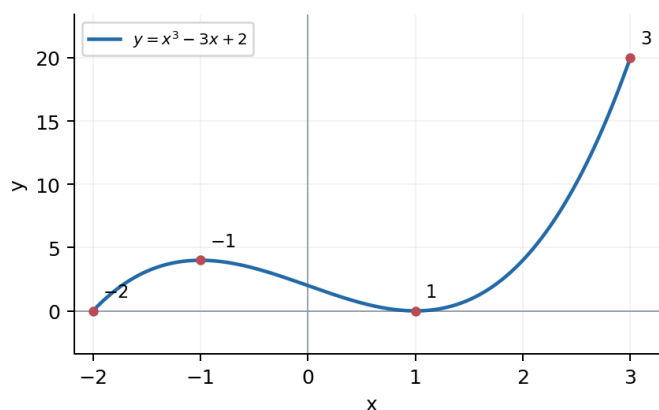
01. Что именно требуется найти

Наименьшее значение m функции на множестве D - такое число, что $f(x) \geq m$ при всех $x \in D$, причём хотя бы в одной точке равенство достигается. Для наибольшего значения M аналогично $f(x) \leq M$ и равенство обязательно.

Различайте три ответа: точка минимума x_0 ; значение $f(x_0)$; все точки, где достигается это значение. Для $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ минимум равен 1, а точка минимума равна 2.

Локальный максимум сравнивает значения только рядом с точкой. Глобальный максимум сравнивает их на всём заданном множестве. Например, у $x^3 - 3x + 2$ на $[-2; 3]$ локальный максимум в -1 равен 4, но наибольшее значение 20 достигается в правом конце.

Урок продолжает тему производной. Здесь отрабатываются задания на экстремальные значения и более сложные исследования; обозначение 55-100 характеризует направленность курса, а не гарантированный балл.



Задание 2: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

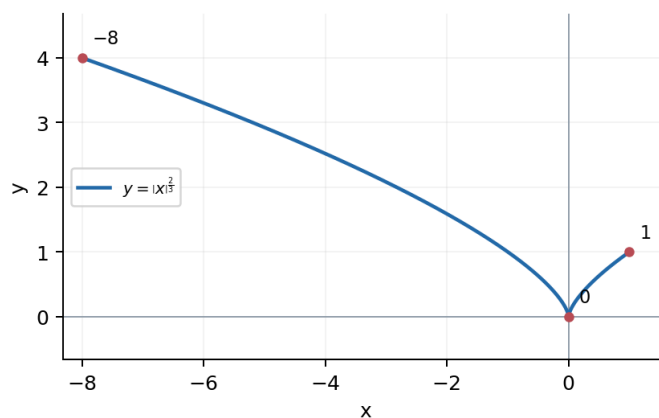
02. Почему на отрезке есть максимум и минимум

Теорема Вейерштрасса. Непрерывная функция на замкнутом ограниченном отрезке $[a; b]$ достигает на нём наименьшего и наибольшего значений. Важны оба условия: непрерывность и включение концов.

Если точка глобального экстремума находится внутри отрезка и функция в ней дифференцируема, то по теореме Ферма производная равна нулю. Поэтому полный список кандидатов состоит из концов и внутренних критических точек: там производная равна нулю или не существует, но функция определена.

Почему Ферма работает. В точке внутреннего максимума приращение функции неположительно. Справа разностное отношение неположительно, слева неотрицательно. Если общий конечный предел существует, он одновременно не больше и не меньше нуля, то есть равен нулю. Для минимума знаки меняются, вывод тот же.

Обратное утверждение неверно: для $f(x) = x^3$ производная в нуле равна нулю, но функция продолжает возрастать. Для $|x|$ минимум в нуле существует, хотя производной нет. Сама теорема Вейерштрасса здесь используется без доказательства.



Задание 14: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

03. Полный алгоритм и таблица кандидатов

Шаг 1. Выпишите ОДЗ и проверьте, что исходная функция определена на всём указанном отрезке.

Шаг 2. Найдите производную на гладких участках. Решите $f'(x) = 0$, добавьте точки, где производная не существует, но функция определена.

Шаг 3. Отберите только точки нужного промежутка и добавьте его включённые концы.

Шаг 4. Подставьте кандидатов в исходную функцию, сравните значения, укажите требуемое число и точки достижения.

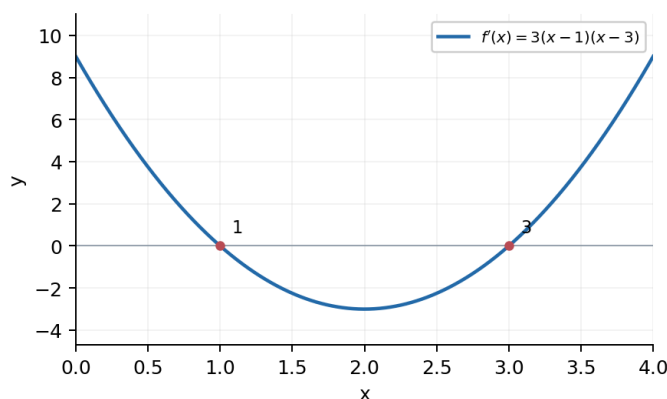
Пример. Для $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ на $[0; 4]$:

$$f'(x) = 3(x - 1)(x - 3).$$

Кандидат x	0	1	3	4
$f(x)$	1	5	1	5

Значит, минимум 1 достигается в 0 и 3, максимум 5 - в 1 и 4. Одного найденного значения недостаточно, если спрашиваются все точки достижения.

Если критических точек бесконечно много, нельзя механически ограничиться несколькими из них. Для функций урока список конечен либо используется отдельное доказательство монотонности или точной оценки.



Задание 12: график производной, а не исходной функции.

04. Производные и знак: короткое восстановление

Используем $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ при $x > 0$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$. Углы измеряются в радианах.

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

Для сложной функции $(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x)$. Так, $(\ln(x+11))' = \frac{1}{x+11}$, а $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

Как восстанавливается правило частного. Из $u = wv$, где $w = \frac{u}{v}$, следует $u' = w'v + wv'$. Выразив w' , получаем формулу выше.

Положительный множитель не меняет знак производной. Для $f(x) = x^3e^{-x}$:

$$f'(x) = x^2e^{-x}(3-x).$$

При $x > 0$ знак задаёт только $3-x$. Не требуется вычислять экспоненту численно. Для производной рациональной функции отдельно учитывается, что знаменатель-квадрат положителен лишь там, где он определён.

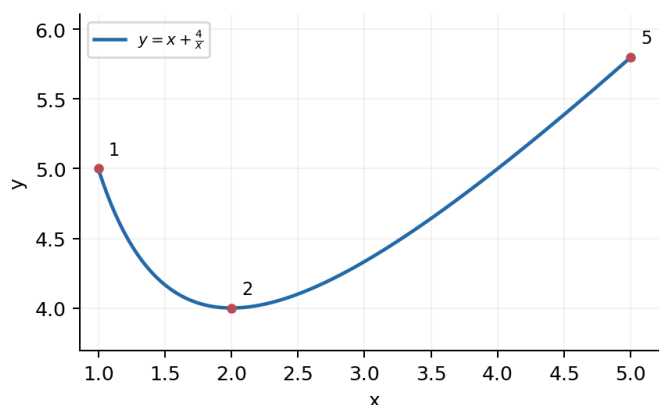
05. Рациональные функции: ОДЗ прежде преобразований

Для $f(x) = x + \frac{4}{x}$ на $[1; 5]$ производная равна $\frac{x^2-4}{x^2}$. Из корней ± 2 нужен только 2; значения в 1, 2, 5 дают минимум 4 и максимум $\frac{29}{5}$.

Если на заданном отрезке есть разрыв, теорему о непрерывной функции применять ко всему отрезку нельзя. Например, $\frac{1}{x-1}$ на допустимых точках $[0; 2]$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения: по разные стороны от 1 значения неограниченно растут по модулю.

Сокращение дроби не восстанавливает запрещённую точку. Выражение $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ равно $x + 1$ только при $x \neq 1$. На графике исходной функции в $(1; 2)$ остаётся выколотая точка.

Точный приём. Для $\frac{x^2 + 1}{x + 1}$ удобно выделить целую часть $x - 1 + \frac{2}{x + 1}$. Это сокращает вычисления производной, но не отменяет условие $x \neq -1$.



Задание 4: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

06. Корни, модули и негладкие точки

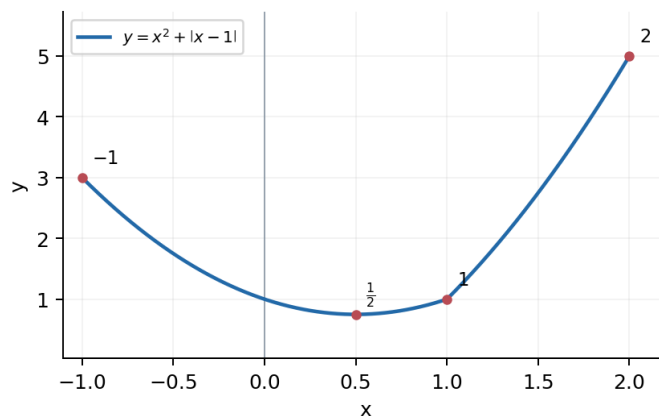
У $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ОДЗ $[-2; 2]$. Внутри неё $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$, но в концах производная не определена. Значения функции там существуют и равны нулю, поэтому концы обязательно проверяются.

Разбор модуля. Для $f(x) = x^2 + |x - 1|$ на $[-1; 2]$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \leq 1, \\ x^2 + x - 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Левая ветвь имеет допустимую стационарную точку $\frac{1}{2}$. Формальная точка $-\frac{1}{2}$ правой ветви не удовлетворяет $x \geq 1$ и отбрасывается. Добавляем точку излома 1 и концы $-1, 2$. Сравнение даёт минимум $\frac{3}{4}$ и максимум 5.

Не решайте уравнение производной одной ветви за пределами области этой ветви. В точке излома сравнивают значения либо односторонние знаки; не присваивают производной выдуманное значение.



Задание 10: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

07. Логарифмы и экспоненты без лишних приближений

Для $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ при $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

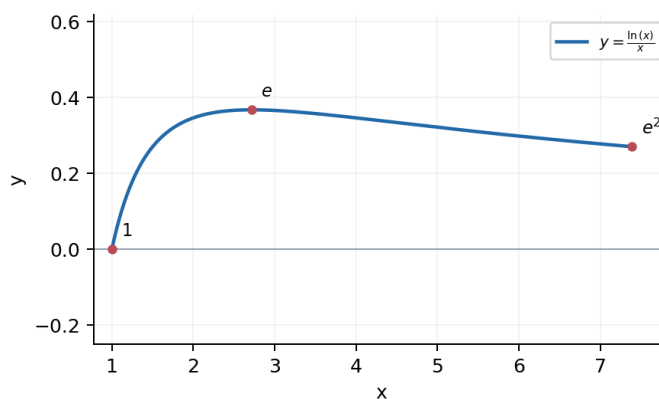
Положительный знаменатель показывает: функция возрастает до e и убывает после. Поэтому максимум на всей области равен $\frac{1}{e}$, только при $x = e$. На $[1; e^2]$ минимум равен нулю в 1 .

Пример с внутренней функцией. Для $g(x) = 9x - 9\ln(x + 11) + 7$ сначала получаем $x > -11$, затем

$$g'(x) = \frac{9(x + 10)}{x + 11}.$$

На $[-10, 5; 0]$ знак меняется с минуса на плюс при -10 , а значение минимума -83 вычисляется точно через $\ln 1 = 0$.

При сравнении значений полезнее использовать знак производной, монотонность и точные преобразования. Десятичные приближения не должны заменять обоснование того, какое значение больше.



Задание 7: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

08. Замена переменной и сохранение промежутка

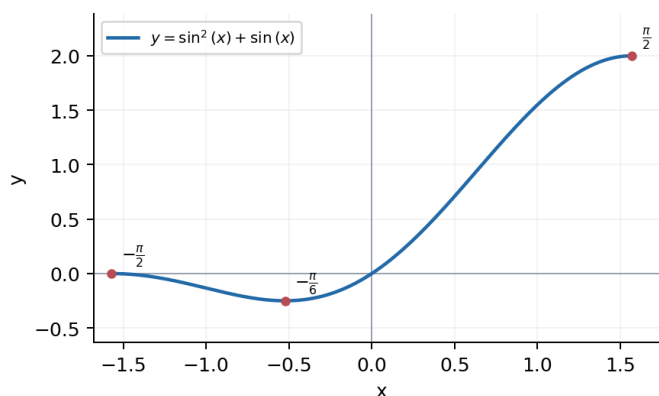
Замена помогает, только если известен весь диапазон новой переменной и достижимость каждого её значения.

Пример. В выражении $\sin^2 x + \sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ положим $t = \sin x$. Здесь $t \in [-1; 1]$, все значения достигаются. Квадратный трёхчлен $t^2 + t$ имеет минимум $-\frac{1}{4}$ при $t = -\frac{1}{2}$ и максимум 2 при $t = 1$. Возврат даёт $x = -\frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{\pi}{2}$.

Для $t = e^x$ на $[-\ln 2; \ln 3]$ новый отрезок $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$, а не исходный.

Для $t = x^2$ на $[-1; 2]$ новый отрезок $[0; 4]$, но обратных корней может быть один или два. Если $0 < t \leq 1$, допустимы $\pm\sqrt{t}$; если $1 < t \leq 4$, допустим только положительный корень.

Если внешняя функция строго возрастает, например $\ln t$ или $\sqrt{t}$, её наибольшее значение соответствует наибольшему допустимому t . При убывающей внешней функции максимум и минимум меняются местами.



Задание 25: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

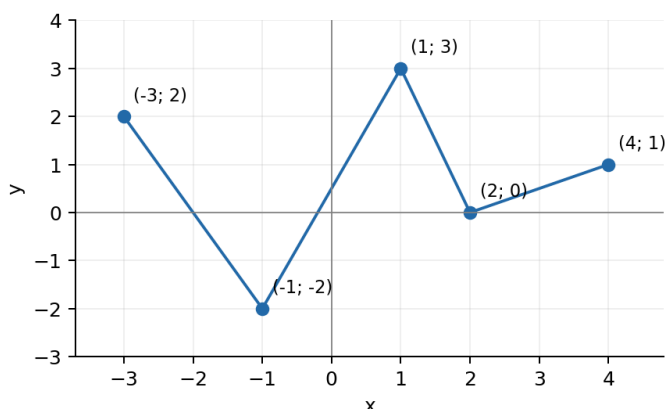
09. Как читать график функции и график производной

На графике $y = f(x)$ искомые значения - самая низкая и самая высокая достигнутые ординаты. Учитываются границы, изломы, выколотые точки и горизонтальные участки.

График $y = f'(x)$ показывает направление изменения f . Его высота не равна высоте f и не является ответом на вопрос о наибольшем значении исходной функции.

Если $f' > 0$ на $(a; c)$ и $f' < 0$ на $(c; b)$, максимум на $[a; b]$ достигается в c . Если знаки меняются несколько раз, могут понадобиться значения f в нескольких кандидатах.

В задании 12 график производной дополнен значениями $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$. Эти данные позволяют найти глобальные значения без интегрирования. Если значений или иной связи недостаточно, числовой ответ нельзя угадывать по высоте графика производной.



Задание 11: исходный график функции; все пять вершин входят в область.

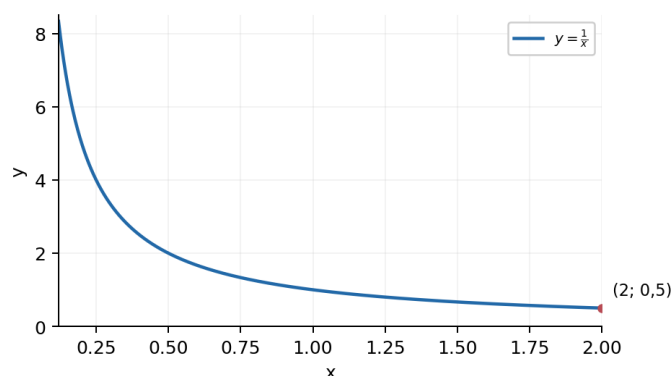
10. Незамкнутые промежутки: граница не всегда ответ

На $(0; 2]$ функция $\frac{1}{x}$ имеет минимум $\frac{1}{2}$ в правом конце, но не имеет максимума. При движении к нулю справа значения неограниченно растут.

На $(0; 2]$ функция x^2 имеет максимум 4, но не имеет минимума: нуль не достигается. Число 0 - точная нижняя грань, то есть наилучшая нижняя оценка. Называть его наименьшим значением неверно.

В задачах оптимизации естественная область часто открыта: например, сторона невырожденного прямоугольника положительна. Тогда отдельно доказывают, что найденный внутренний кандидат даёт глобальный максимум, и исследуют поведение у исключённых границ.

Предел помогает понять поведение у границы, но не добавляет эту границу в область определения.



Задание 13: при $x \rightarrow 0$ справа график неограниченно поднимается.

11. Геометрическая оптимизация: от рисунка к модели

Прямоугольник под параболой. Для верхних вершин $(\pm x; 12 - x^2)$ ширина равна $2x$, высота $12 - x^2$. Поэтому

$$S = 2x(12 - x^2), \quad 0 < x < 2\sqrt{3}, \quad S' = 24 - 6x^2.$$

Максимум в $x = 2$: размеры 4 и 8, площадь 32. Распространённая ошибка - принять x за полную ширину.

Коробка. После вырезания квадратов x из листа $A \times B$ основание имеет стороны $A - 2x$ и $B - 2x$:

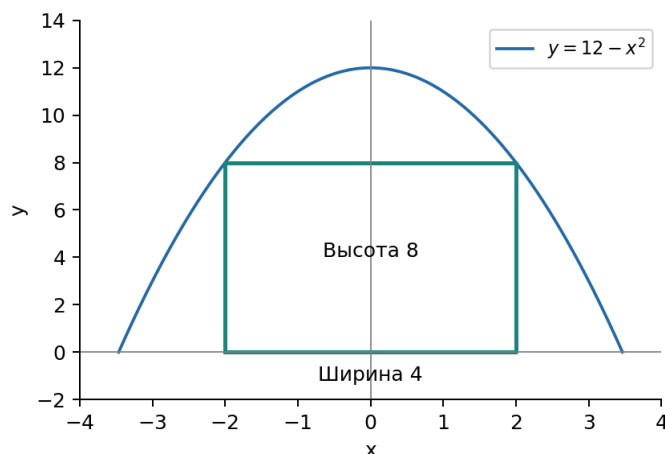
$$V = x(A - 2x)(B - 2x), \quad 0 < x < \frac{\min(A, B)}{2}.$$

Сначала записывают геометрическое ограничение, затем отбирают корни производной.

Расстояние. Для точки $A(0; b)$ и $M(x; x^2)$ удобно минимизировать квадрат:

$$AM^2 = x^2 + (x^2 - b)^2.$$

Корень строго возрастает на неотрицательных числах, поэтому минимизатор сохраняется. В конце из минимального квадрата извлекают корень и перечисляют все допустимые точки.



Задание 29: прямоугольник максимальной площади под параболой.

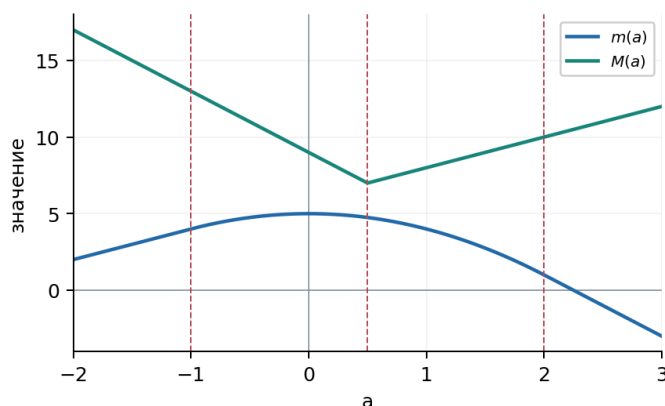
12. Параметр: положение вершины и сравнение концов

Для $f_a(x) = x^2 - 2ax + 5$ на $[-1; 2]$ вершина движется вместе с параметром: её абсцисса a . Минимум достигается в ближайшей к вершине точке отрезка. Поэтому границы случаев $a = -1$ и $a = 2$ возникают из геометрии, а не из подбора.

Максимум достигается в одном из концов. Чтобы выяснить, в каком, сравниваем $6 + 2a$ и $9 - 4a$; граница равенства $a = \frac{1}{2}$ отличается от границ для минимума.

При замене $t = x^2$ появляются ещё ограничения обратного перехода. В задании 38 значение минимума меняет формулу при $a = 0,4$, а число точек достижения меняется также при $a = 1$.

Проверка на каждой границе: совпадают ли значения соседних формул; входят ли концы; не появляется ли дополнительная точка; не сливаются ли две точки в одну.



Задание 35: минимум и максимум как функции параметра; границы $a = -1, 1/2, 2$.

13. Выпуклая функция с модулем: минимум в изломе

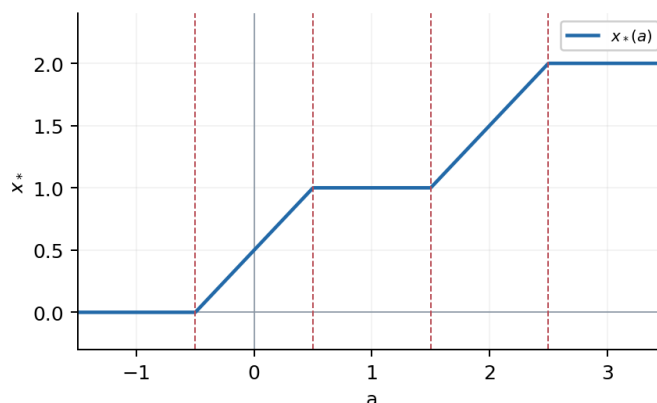
Рассмотрим $f_a(x) = x^2 - 2ax + |x - 1|$. На отрезках слева и справа от 1 производные равны $2x - 2a - 1$ и $2x - 2a + 1$. Они возрастают, а при переходе через 1 наклон увеличивается.

Если левый наклон у 1 неположителен, а правый неотрицателен, минимум находится именно в изломе:

$$1 - 2a \leq 0, \quad 3 - 2a \geq 0, \quad \frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}.$$

В остальных случаях ищут вершину соответствующей ветви и проверяют её попадание в $[0; 1]$ или $[1; 2]$. Если вершина ушла за край, минимум на ближайшем конце. Так получается пять случаев задания 39.

Строгую выпуклость здесь можно понять без специальной теории: наклон на каждом гладком участке строго возрастает и в точке излома скачком возрастает. Функция не может иметь два разных минимума с меньшим значением между ними.



Задание 39: единственная точка минимума; средний участок соответствует излому $x = 1$.

14. Наилучшее приближение: уравнивать две ошибки

Иногда минимизируют величину, которая сама является максимумом. Например,

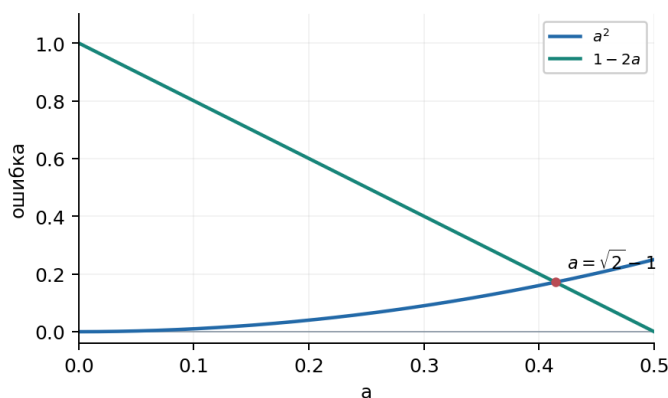
$$M(a) = \max_{0 \leq x \leq 1} |x^2 - 2ax|.$$

Внутри $0 \leq a \leq 1$ парабола имеет минимум $-a^2$ в вершине $x = a$, а значения в концах равны 0 и $1 - 2a$. Поэтому достаточно рассмотреть

$$M(a) = \max\{a^2, |1 - 2a|\}.$$

На $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ одна ошибка возрастает, другая убывает. До пересечения максимумом является убывающая ошибка, после - возрастающая; следовательно, наименьший максимум в точке пересечения.

Однако уравнивать ошибки недостаточно: нужно проверить остальные диапазоны параметра, концы и уникальность решения. Именно эту полную проверку требуется выполнить в задании 40.



Задание 40: минимум большей из двух ошибок достигается в точке пересечения.

15. Типичные ошибки и самостоятельная проверка

Ошибка	Как исправить
В ответе корень $f' = 0$ вместо значения	Подставить аргумент в исходную функцию
Пропущен конец отрезка	Добавить оба включённых конца в список
Удалена негладкая точка	Проверить, определена ли в ней сама функция
Максимум f найден по высоте графика f'	Использовать знак f' и значения f
Замена не учитывает диапазон	Найти образ заданного промежутка
После $t = x^2$ записан только один корень	Проверить оба корня в исходной области
Предел назван минимумом	Доказать достижение значения
Найдена одна ветвь параметра	Разобрать все критические границы

Проверка ответа. Подставьте точки достижения, убедитесь в принадлежности области, сравните со всеми оставшимися кандидатами. Для параметра проверьте отдельно каждую границу. График помогает увидеть ошибку, но не заменяет точное доказательство.

16. Практика: от алгоритма к исследованию

Задания	Что отрабатываем
1-10	Полный список кандидатов, разные типы функций
11-16	Графики, негладкие точки и задачи экзаменационного формата
17-20	Повторение неравенств, логарифмов, тригонометрии и касательной
21-28	Составные функции и точные замены
29-34	Оптимизация, расстояния и доказательства
35-40	Параметры, все точки достижения и наилучшее приближение

В каждом разборе важен полный переход от области определения к ответу. Задания 35-40 предназначены для развёрнутого исследования. Три печатных файла содержат ту же окончательную теорию, условия и решения, что и статьи.