

# Курс «Трудные вопросы математики» для 9 класса

Курс 9 класса объединяет усложнённые алгебраические и геометрические задачи, исследование функций, доказательства и работу с моделями. В исходнике общий итог указан как 68 часов, однако сумма восьми тематических строк составляет 70 часов. Оба значения сохранены без попытки самостоятельно устранять расхождение.

## Кратко о программе

| Параметр                 | Значение |
|--------------------------|----------|
| Класс                    | 9 класс  |
| Заявленный общий объём   | 68 часов |
| Сумма тематических строк | 70 часов |
| Тематические разделы     | 8        |

## Содержание обучения

Уравнения и неравенства Биквадратные уравнения. Методы равносильных преобразований, замены переменной, графического метода при решении уравнений 3-й и 4-й степеней.

Решение неравенств, содержащих знак модуля. Неравенство с двумя переменными. Применение графического метода решения систем неравенств с двумя переменными. Решение дробно-рациональных уравнений и неравенств. Построение графиков уравнений, в том числе с использованием цифровых ресурсов. Приводить графическую интерпретацию решения уравнения с двумя переменными и систем уравнений с двумя переменными. Исследование систем нелинейных уравнений с параметром. Решение неравенств с двумя переменными и их систем. Исследовательские работы: решение задач с параметрами – алгебраическим методом; графическим методом.

Решение треугольников Формулы приведения. Решение практических задач с использованием теоремы косинусов и теоремы синусов. Формула Герона. Формула площади выпуклого четырехугольника. Соотношения между тригонометрическими функциями. Простейшие формулы приведения из геометрических соображений. Решение задач с использованием теорем косинусов и синусов, нахождение радиуса описанной окружности.

Алгебраические выражения Степень с рациональным показателем. Определение корня  $n$ -й степени и степени с рациональным показателем. Применение операции извлечения корня  $n$ -й степени, используя при необходимости калькулятор. Вычисление значения степени с рациональным показателем. Оценка значений корня  $n$ -й степени, значение степени с рациональным показателем целыми числами и десятичными дробями. Сравнение и упорядочивание рациональных и иррациональных чисел, записанных с помощью корня  $n$ -й степени, степени с рациональным показателем. Выполнение тождественных преобразований выражений, содержащих корень  $n$ -й степени, степень с рациональным показателем.

Подобие треугольников Теоремы о произведении отрезков хорд, теоремы о произведении отрезков секущих, теорема о квадрате касательной, теоремы Чевы и Менелая. Исследование, в том числе с помощью цифровых ресурсов, изучаемых конфигураций. Применение данных теорем при решении геометрических задач. Знакомство с понятием гомотетии, с его применением, в том числе в практических ситуациях. Исследовательская работа (с использованием программных средств): гомотетия и ее свойства.

Функции Понятие «функция». Применение свойств функций: нули функции, промежутки знакопостоянства функции, промежутки возрастания и убывания функции, четные и нечетные функции, наибольшее и наименьшее значения функции при решении задач. Построение графиков функций с помощью преобразований вида:  $f(x) \rightarrow f(x) + a$ ;  $f(x) \rightarrow f(x - a)$ ;  $f(x) \rightarrow kf(x)$ ,  $f(x) \rightarrow f(|x|)$ ,  $f(x) \rightarrow |f(x)|$ . Распознавание степенных функций и построение эскизов графиков степенных функций с натуральными показателями разной четности. Использование свойств графиков степенных функций с натуральными показателями при решении задач. Построение графиков функций  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 3\sqrt{x}$ ,  $y = |x|$ . Исследовательская работа: поведение функции и ее графика в зависимости от параметра.

Метод координат Параллельность и перпендикулярность прямых (через угловой коэффициент). Нахождение пересечений окружностей и прямых в координатах. Формула расстояния от точки до прямой. Площадь параллелограмма в координатах, понятие об ориентированной площади. Применение метода координат

в практико-ориентированных геометрических задачах, исследование приложения метода координат в вычислительной математике и информатике. Исследовательская работа: решение практико-ориентированной геометрической задачи методом координат.

Числовые последовательности и прогрессии Определение видов последовательностей: ограниченная последовательность, монотонно возрастающая (убывающая) последовательность. Представление бесконечных периодических дробей в виде обыкновенных. Знакомство с понятием сходимости последовательности, нахождение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Применение метода математической индукции. Исследовательская работа: поведение последовательностей – от гипотезы до доказательства.

Движения плоскости Центральная симметрия. Центально-симметричные фигуры. Поворот. Осевая симметрия. Фигуры, симметричные относительно некоторой оси. Параллельный перенос. Понятие движения и его свойства. Равенство фигур. Проявления симметрии в природе, живописи, скульптуре, архитектуре. Композиции движений (простейшие примеры). Применение в решении геометрических задач. Исследовательская работа (с использованием программных средств): композиция движений.

В курсе встречаются, в частности, обратная пропорциональность  $y = \frac{k}{x}$  и дробно-линейная функция  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ .

Формулы встроены без внешних загрузок.

## Планируемые результаты

Применять свойства числовых неравенств для сравнения, оценки, решать линейные неравенства с одной переменной и их системы, давать графическую иллюстрацию множества решений неравенства, системы неравенств. Понимать и использовать функциональные понятия и язык (термины, символические обозначения), определять значение функции по значению аргумента, определять свойства функции по ее графику. Строить графики функций, описывать свойства числовой функции по ее графику. Распознавать основные виды четырехугольников, их элементы, пользоваться их свойствами при решении геометрических задач. Различать признаки и свойства параллелограмма, ромба и прямоугольника, доказывать их и уверенно применять при решении геометрических задач. Распознавать centrally-симметричные фигуры и использовать их свойства при решении задач. Владеть понятиями подобия треугольников, коэффициента подобия, соответственных элементов подобных треугольников. Иметь представление о преобразовании подобия и о подобных фигурах. Пользоваться признаками подобия треугольников при решении геометрических задач. Доказывать и применять отношения пропорциональности в прямоугольных треугольниках. Применять подобие в практических задачах. Выводить и использовать простейшие формулы для площади треугольника, параллелограмма, ромба и трапеции. Вычислять (различными способами) площадь треугольника и площади многоугольных фигур (пользуясь, где необходимо, калькулятором). Знать отношение площадей подобных фигур и применять при решении задач. Применять полученные умения в практических задачах. Применять полученные знания на практике – строить математические модели для задач реальной жизни и проводить соответствующие вычисления с применением подобия и тригонометрии (пользуясь, где необходимо, калькулятором).

освоения программы учебного курса к концу обучения в 9 классе: Свободно оперировать понятиями: корень  $n$ -й степени, степень с рациональным показателем, находить корень  $n$ -й степени, степень с рациональным показателем, используя при необходимости калькулятор, применять свойства корня  $n$ -й степени, степени с рациональным показателем. Использовать понятие множества действительных чисел при решении задач, проведении рассуждений и доказательств. Сравнить и упорядочивать действительные числа, округлять действительные числа, выполнять прикидку результата вычислений, оценку числовых выражений. Свободно оперировать понятием квадратного трехчлена, находить корни квадратного трехчлена. Раскладывать квадратный трехчлен на линейные множители. Решать несложные квадратные уравнения с параметром. Решать несложные системы нелинейных уравнений с параметром. Применять методы равносильных преобразований, замены переменной, графического метода при решении уравнений 3-й и 4-й степеней. Решать уравнения, неравенства и их системы, в том числе с ограничениями, например в целых числах. Проводить исследования уравнений и систем уравнений, в том числе с применением графических представлений (устанавливать, имеет ли уравнение или система уравнений решения, если имеет, то сколько, и прочее). Решать текстовые задачи алгебраическим способом. Использовать уравнения, неравенства и их системы для составления математической модели реальной ситуации или прикладной задачи, интерпретировать полученные результаты в заданном контексте. Свободно оперировать понятиями: зависимость, функция, график функции, прямая пропорциональность, линейная функция, обратная пропорциональность, парабола, гипербола, кусочно-заданная функция.

Исследовать функцию по ее графику, устанавливать свойства функций: область определения, множество значений, нули функции, промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и убывания, четность и нечетность, наибольшее и наименьшее значения, асимптоты. Распознавать квадратичную функцию по формуле, приводить примеры квадратичных функций из реальной жизни, физики, геометрии. Определять положение графика квадратичной функции в зависимости от ее коэффициентов. Строить график квадратичной функции, описывать свойства квадратичной функции по ее графику. Использовать свойства квадратичной функции для решения задач. На примере квадратичной функции строить график функции  $y = af(kx + b) + c$  с помощью преобразований графика функции  $y = f(x)$ . Иллюстрировать с помощью графика реальную зависимость или процесс по их характеристикам. Свободно оперировать понятиями: последовательность, арифметическая и геометрическая прогрессии. Задавать последовательности разными способами: описательным, табличным, с помощью формулы  $n$ -го члена, рекуррентным. Выполнять вычисления с использованием формул  $n$ -го члена арифметической и геометрической прогрессий, суммы первых  $n$  членов. Изображать члены последовательности точками на координатной плоскости. Решать задачи, связанные с числовыми последовательностями, в том числе задачи из реальной жизни (с использованием калькулятора, цифровых технологий). Распознавать и приводить примеры конечных и бесконечных последовательностей, ограниченных последовательностей, монотонно возрастающих (убывающих) последовательностей.

Иметь представление о сходимости последовательности, уметь находить сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Применять метод математической индукции при решении задач. Доказывать теорему синусов и теорему косинусов, применять их для нахождения различных элементов треугольника («решение треугольников»), при решении геометрических задач. Применять полученные знания при решении практических задач. Применять тригонометрию в задачах на нахождение площади, выводить и владеть тригонометрическими формулами для площади треугольника, параллелограмма, ромба, трапеции, выводить и применять формулу Герона и формулу для площади выпуклого четырехугольника. Иметь представление о гомотетии, применять в практических ситуациях. Использовать теоремы Чевы и Менелая при решении задач. Использовать теоремы о вписанных углах, углах между хордами (секущими) и угле между касательной и хордой при решении геометрических задач. Доказывать и применять теоремы о произведении отрезков хорд, о произведении отрезков секущих, о квадрате касательной. Владеть понятием координат на плоскости, работать с уравнением прямой на плоскости. Владеть понятиями углового коэффициента и свободного члена, понимать их геометрический смысл и связь углового коэффициента с возрастанием и убыванием линейной функции. Уметь решать методом координат задачи, связанные с параллельностью и перпендикулярностью прямых, пересечением прямых, нахождением точек пересечения. Выводить и владеть уравнением окружности. Использовать метод координат для нахождения пересечений окружностей и прямых. Владеть формулами расстояния от точки до прямой, площади параллелограмма в координатах, иметь понятие об ориентированной площади. Пользоваться методом координат на плоскости, применять его при решении геометрических и практических задач. Применять метод координат в практико-ориентированных геометрических задачах.

Владеть понятием вектора. Уметь складывать и вычитать векторы, умножать на число, владеть правилами треугольника и параллелограмма. Владеть практическими интерпретациями векторов. Уверенно пользоваться координатами вектора. Владеть сложением и вычитанием векторов, умножением вектора на число в координатах. Иметь представление о базисе (на плоскости). Раскладывать векторы по базису. Раскладывать векторы сил с помощью проецирования и тригонометрических соотношений. Применять полученные знания в простейших физических задачах. Владеть понятием скалярного произведения векторов, понимать его геометрический смысл и уверенно пользоваться его выражением в декартовых координатах. Знать дистрибутивность скалярного произведения и его связь с проецированием. Применять скалярное произведение векторов для нахождения длин и углов. Решать геометрические задачи с помощью скалярного произведения. Использовать скалярное произведение векторов в алгебраических и физических задачах. Владеть понятиями правильного многоугольника, длины окружности, длины дуги окружности и радианной меры угла, вычислять площадь круга и его частей. Понимать смысл числа  $\pi$ . Применять полученные умения при решении практических задач. Знать исторические сведения об измерении длины окружности и площади круга. Иметь представление о преобразовании плоскости, о движениях. Находить оси, центры симметрии фигур, центры поворота, находить композиции простейших преобразований. Применять движения плоскости при решении геометрических задач. Применять полученные знания на практике – строить математические модели для задач реальной жизни и проводить соответствующие вычисления с применением подобия и тригонометрических функций (пользуясь, где необходимо, калькулятором).

## Тематическое планирование

| № | Раздел                                                       | Часы | Содержание и деятельность                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|---|--------------------------------------------------------------|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Уравнения и неравенства: уравнения, неравенства и их системы | 12   | Биквадратные уравнения. Методы равносильных преобразований, замены переменной, графического метода при решении уравнений 3-й и 4-й степеней. Решение неравенств, содержащих знак модуля. Неравенство с двумя переменными. Применение графического метода решения систем неравенств с двумя переменными. Решение дробно-рациональных уравнений и неравенств. Построение графиков уравнений, в том числе с использованием цифровых ресурсов. Графическая интерпретация решения уравнения с двумя переменными и систем уравнений с двумя переменными. Исследование систем нелинейных уравнений с параметром. Решение неравенств с двумя переменными и их систем. Самостоятельное открытие: решение уравнений 3-й и 4-й степеней. Практикумы по решению задач: от простого к сложному – дробно-рациональные уравнения и неравенства. Исследовательские работы: решение задач с параметрами – алгебраическим методом; графическим методом (в том числе с использованием «математических пакетов») |
| 2 | Решение треугольников                                        | 8    | Формулы приведения. Решение практических задач с использованием теоремы косинусов и теоремы синусов. Формула Герона. Формула площади выпуклого четырехугольника. Соотношения между тригонометрическими функциями. Простейшие формулы приведения из геометрии. Решение задач с использованием теорем косинусов и синусов, нахождение радиуса описанной окружности. Практикумы по решению задач. Математическое соревнование – решение геометрических/практико-ориентированных задач разными методами                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 3 | Алгебраические выражения                                     | 4    | Степень с рациональным показателем. Определение корня $n$ -й степени и степени с рациональным показателем. Применение операции извлечения корня $n$ -й степени, используя при необходимости калькулятор. Вычисление значения степени с рациональным показателем. Оценка значений корня $n$ -й степени, значение степени с рациональным показателем целыми числами и десятичными дробями. Сравнение и упорядочивание рациональных и иррациональных чисел, записанных с помощью корня $n$ -й степени, степени с рациональным показателем. Выполнение тождественных преобразований выражений, содержащих корень $n$ -й степени, степень с рациональным показателем. Практикум по решению задач: от простого к сложному. Математическое соревнование                                                                                                                                                                                                                                             |

| № | Раздел                                   | Часы | Содержание и деятельность                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|---|------------------------------------------|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4 | Подобие треугольников                    | 10   | Теоремы о произведении отрезков хорд, теоремы о произведении отрезков секущих, теорема о квадрате касательной, теоремы Чебы и Менелая. Исследование, в том числе с помощью цифровых ресурсов, изучаемых конфигураций. Применение данных теорем при решении геометрических задач. Знакомство с понятием гомотетии, с его применением, в том числе в практических ситуациях. Самостоятельное открытие (в том числе с использованием «математических пакетов»): Теоремы Чебы и Менелая. Практикум по решению задач. Практикум по построению динамических моделей с помощью программных средств. Исследовательская работа с помощью программных средств: гомотетия и ее свойства                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 5 | Функции                                  | 10   | Понятие «функция». Применение свойств функций: нули функции, промежутки знакопостоянства функции, промежутки возрастания и убывания функции, четные и нечетные функции, наибольшее и наименьшее значения функции при решении задач. Построение графиков функций с помощью преобразований вида: $f(x) \rightarrow f(x) + a$ ; $f(x) \rightarrow f(x + a)$ ; $f(x) \rightarrow kf(x)$ , $f(x) \rightarrow f( x )$ , $f(x) \rightarrow  f(x) $ . Распознавание степенных функций и построение эскизов графиков степенных функций с натуральными показателями разной четности. Использование свойств графиков степенных функций с натуральными показателями при решении задач. Построение графиков функций $y = \sqrt{x}$ , $y = 3\sqrt{x}$ , $y =  x $ . Исследовательская работа (в том числе с использованием «математических пакетов»): Поведение функции и ее графика в зависимости от параметра. Практикумы по решению задач: построение графиков функций $y = \sqrt{x}$ , $y = 3\sqrt{x}$ , $y =  x $ ; с помощью преобразований и проверка с использованием программных средств |
| 6 | Метод координат                          | 8    | Параллельность и перпендикулярность прямых (через угловой коэффициент). Нахождение пересечений окружностей и прямых в координатах. Формула расстояния от точки до прямой. Площадь параллелограмма в координатах, понятие об ориентированной площади. Применение метода координат в практико- ориентированных геометрических задачах, исследование приложения метода координат в вычислительной математике и информатике. Самостоятельное открытие: как решить геометрическую задачу с помощью аппарата алгебры? Исследовательская работа (в том числе с использованием «математических пакетов»): решение практико- ориентированной геометрической задачи методом координат. Математическое соревнование – решение геометрических задач разными методами                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 7 | Числовые последовательности и прогрессии | 8    | Определение видов последовательностей: ограниченная последовательность, монотонно возрастающая (убывающая) последовательность. Представление бесконечных периодических дробей в виде обыкновенных. Знакомство с понятием сходимости последовательности, нахождение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Применение метода математической индукции. Исследовательская работа: поведение последовательностей – от гипотезы до доказательства. Дискуссия на основе решения задач: является ли ММИ универсальным? Самостоятельное открытие: ММИ – метод доказательства: сумма членов последовательности. Практикум по решению задач: доказательство неравенств и доказательство делимости ММИ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

| № | Раздел             | Часы | Содержание и деятельность                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|---|--------------------|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 8 | Движения плоскости | 10   | Центральная симметрия. Центральные симметричные фигуры. Поворот. Осевая симметрия. Фигуры, симметричные относительно некоторой оси. Параллельный перенос. Понятие движения и его свойства. Равенство фигур. Проявления симметрии в природе, живописи, скульптуре, архитектуре. Композиции движений (простейшие примеры). Применение в решении геометрических задач Исследовательская работа (в том числе с использованием программных средств): композиция движений. Самостоятельное открытие: формулировка выводов о свойствах композиций движений. Проект: преобразования (движения) в искусстве |

## Логика курса

### Математическая модель



Последовательность помогает связать действия, наблюдения и обоснованный результат

От условия и математической модели — к доказательству, решению и проверке.

## Общая программа курса

[Перейти к общей программе курса «Трудные вопросы математики».](#)