



Практикум: финансовые и целочисленные задачи

Теория и разобранные примеры

Урок 34. Практикум: финансовые и целочисленные задачи. Объяснения с начального уровня, исходные примеры с пошаговыми решениями и отдельный тест для самостоятельной проверки.

Две задачи части 2: модель и доказательство

Финансовая задача и задача на целые числа требуют разных видов обоснования. В первой нужно правильно описать изменение величины по периодам. Во второй — доказать утверждение для всех допустимых случаев или построить пример с полной проверкой.

Календарь финансовой модели

Зафиксируйте состояние долга на одну и ту же дату каждого периода. Если проценты начисляются до платежа, а долг до начисления равен D_{k-1} , то после начисления и платежа A_k остаётся $D_k = q_k D_{k-1} - A_k$. Если платёж происходит раньше начисления, формула будет другой. Порядок событий берётся только из условия.

При равном уменьшении основного долга величина $D_{k-1} - D_k$ постоянна, но платежи обычно различны: проценты начисляются на уменьшающийся остаток. Проверка модели — нулевой долг после последнего платежа и согласованность всех сумм с условием.

Что является доказательством в задаче 19а

Для утверждения о всех целых числах нескольких примеров недостаточно. Используйте разбиение на исчерпывающие случаи, запись числа через остаток или свойства делимости. Например, любое целое число имеет вид $2k$ или $2k + 1$; других случаев по модулю два нет.

Если требуется существование, достаточно предъявить один объект и проверить каждое условие. Если требуется минимальность, нужно дополнительно объяснить, почему меньшие допустимые кандидаты невозможны. Удобно сначала получить нижнюю границу, затем перебирать только числа нужного вида: кратные заданному модулю, числа с разрешённой последней цифрой или значения определённого остатка.



Общая привычка для обеих моделей

Подписывайте смысл каждой переменной и не меняйте его в середине решения. В финансовой таблице индекс обозначает дату; в доказательстве через остатки — целое число и модуль. Финальный ответ должен возвращаться к исходным словам задачи, а не оставаться промежуточным уравнением.

Подробные объяснения и разобранные примеры

Карта теории

Один год кредита

Если D — долг до процентов, $q = 1 + \frac{r}{100}$, а B — долг после платежа, то платёж равен $qD - B$. Сначала начисляются проценты, затем вносится платёж.

Равномерное погашение

При кредите S на n лет основной долг ежегодно уменьшается на $\frac{S}{n}$. Сумма выплат равна S плюс проценты на последовательность непогашенных остатков. Равное уменьшение долга не означает равные платежи.

Существование

Для ответа «да» предъявите пример и проверьте каждое условие. Проверка нескольких примеров не доказывает невозможность.

Невозможность

Ищите обязательное свойство: чётность, остаток, знак, оценку. Если оно противоречит требованию, подходящих объектов нет. В доказательстве должно быть ясно, почему свойство выполняется для всех допустимых чисел.

На первых разборах проговаривайте, почему выбран каждый шаг. Перед последними двумя задачами закройте решение, составьте собственный план и только затем сравните его с разбором.

Разбор 1. Кредит с равным уменьшением долга

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Платёж состоит из возвращаемой части долга и начисленных процентов.

Условие

В июле банк выдал кредит в размере 1 300 тыс. рублей на 4 года. Каждый январь долг увеличивается на 15%, после чего одним платежом уменьшается так, чтобы к июлю каждого следующего года долг становился на одну и ту же величину меньше. Найдите общую сумму всех выплат за весь срок. Ответ дайте в тысячах рублей.

1. Каждый год основной долг уменьшается на $\frac{1300}{4} = 325$.

Равномерно уменьшается долг после платежей, сами платежи могут быть разными.



2. Остатки перед процентами: 1300; 975; 650; 325.

Проценты первого года начисляются на весь кредит, последнего — на последний непогашенный остаток.

3. $1300 + 975 + 650 + 325 = 3250$.

Суммируем базы начисления процентов.

4. $0,15 \cdot 3250 = 487,5$.

Это все проценты за 4 года.

5. $1300 + 487,5 = 1787,5$ тыс. рублей.

Основной долг возвращается полностью ровно один раз.

Проверка	Типичная ошибка
Платежи: 520; 471,25; 422,5; 373,75. Их сумма — 1787,5.	Начислять 15% на первоначальные 1300 во все четыре года.

Ответ: 1787,5 тыс. рублей

Разбор 2. Сумма выплат через прогрессию

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Остатки долга образуют арифметическую прогрессию.

Условие

В июле банк выдал кредит в размере 1 400 тыс. рублей на 5 лет. Каждый январь долг увеличивается на 20%, после чего одним платежом уменьшается так, чтобы к июлю каждого следующего года долг становился на одну и ту же величину меньше. Найдите общую сумму всех выплат за весь срок. Ответ дайте в тысячах рублей.

1. Уменьшение долга $\frac{1400}{5} = 280$.

Пять равных частей погашают весь основной долг.

2. Остатки: 1400; 1120; 840; 560; 280.

Это базы начисления процентов в пяти годах.

3. Сумма остатков: $\frac{5(1400 + 280)}{2} = 4200$.

Сумма прогрессии — полусумма крайних членов, умноженная на их количество.

4. $1400 + 0,2 \cdot 4200 = 2240$ тыс. рублей.

Возвращаем основной долг и платим проценты.

Проверка	Типичная ошибка
Проценты составляют 840, что меньше $5 \cdot 0,2 \cdot 1400 = 1400$ при неизменном долге.	Добавить нулевой остаток как шестую базу начисления процентов.



Ответ: 2 240 тыс. рублей

Разбор 3. Делимость для любого натурального показателя

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Если числа дают одинаковый остаток, их степени дают одинаковые остатки.

Условие

Всегда ли число $10^n - 1$ делится на 9 при натуральном n ? Докажите.

1. $10 = 9 + 1$, поэтому $10 \equiv 1$ по модулю 9.

Вместо большого числа достаточно работать с остатком.

2. $10^n \equiv 1^n = 1$ по модулю 9.

Это верно для любого натурального n .

3. $10^n - 1 \equiv 0$ по модулю 9.

Нулевой остаток означает делимость на 9.

Проверка	Типичная ошибка
При $n = 1$ получаем 9, при $n = 2$ — 99. Примеры согласуются с общим доказательством.	Проверить два примера и объявить утверждение доказанным для всех n .

Ответ: Да

Разбор 4. Доказательство невозможности

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Для отрицательного ответа нужно исключить все натуральные n .

Условие

Существует ли натуральное n , при котором $10^n + 1$ делится на 3? Обоснуйте ответ.

1. $10 \equiv 1$ по модулю 3.

У числа 10 остаток 1.

2. $10^n + 1 \equiv 1 + 1 = 2$ по модулю 3.

Остаток не зависит от показателя.

3. Нулевой остаток невозможен.

Значит ни одно натуральное n не подходит.

Проверка	Типичная ошибка
Числа 11 и 101 действительно дают остаток 2.	Ограничиться перебором первых нескольких показателей.



Ответ: Нет

Разбор 5. Платёж в конкретном году

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Перед третьим начислением процентов уже сделаны два платежа.

Условие

В июле банк выдал кредит в размере 900 тыс. рублей на 5 лет. Каждый январь долг увеличивается на 20%, после чего одним платежом уменьшается так, чтобы к июлю каждого следующего года долг становился на одну и ту же величину меньше. Найдите платёж в 3-й год. Ответ дайте в тысячах рублей.

1. Уменьшение долга: $\frac{900}{5} = 180$.

В каждом году погашают одну и ту же часть основного долга.

2. $D_2 = 900 - 2 \cdot 180 = 540$.

Это остаток после второго платежа и база процентов третьего года.

3. $0,2 \cdot 540 = 108$.

Процентная часть третьего платежа.

4. $P_3 = 180 + 108 = 288$ тыс. рублей.

К процентам добавляем очередное уменьшение основного долга.

Проверка	Типичная ошибка
После процентов долг 648, после платежа 288 остаётся 360 $= 900 - 3 \cdot 180$.	Начислить проценты на остаток после третьего платежа.

Ответ: 288 тыс. рублей

Разбор 6. Чётность суммы

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Любое нечётное целое число имеет вид $2k + 1$.

Условие

Может ли сумма трёх нечётных целых чисел быть равна 2026? Обоснуйте ответ.

1. Сумма первых двух нечётных чисел чётна.

$$(2a + 1) + (2b + 1) = 2(a + b + 1).$$

2. Добавление третьего нечётного даёт нечётное число.

$$\text{Получаем } 2(a + b + c + 1) + 1.$$

3. 2026 чётно, значит равенство невозможно.

Сравниваем чётность обеих сторон.

Проверка	Типичная ошибка
Рассуждение верно и для отрицательных нечётных чисел.	Использовать лишь пример вместо общего обоснования.



Ответ: Нет

Разбор 7. Постоянный долг и равные финальные выплаты

ИСТОЧНИК	УРОВЕНЬ	ТРЕНИРУЕМ
ФИПИ, открытый вариант КИМ ЕГЭ-2026, задача 16; условие пересказано Открыть источник	официальный КИМ • задача 16	финансовая модель с параметром

Условие

Кредит 6,6 млн рублей взят на пять лет. Каждый январь долг увеличивается на $r\%$. После платежей первых трёх лет июльский долг снова равен 6,6 млн рублей.

Выплаты четвёртого и пятого годов одинаковы, после последней долг равен нулю. Общая сумма выплат — 12,6 млн рублей. Найдите r .

До решения: что заметить

Считаем в миллионах рублей.

Пусть $q = 1 + r/100$, B — остаток после четвёртого платежа.

Схему надо перенести из модели урока 27, но все числа пересчитать заново.

Решение по шагам

Шаг 1. Первые три платежа. Долг после платежа снова равен 6,6:

$$P_1 = P_2 = P_3 = 6,6 (q - 1)$$

Шаг 2. Связываем последние платежи. Четвёртый равен $6,6q - B$, пятый — Bq :

$$6,6q - B = Bq$$

$$B = \frac{6,6q}{q + 1}$$

Шаг 3. Составляем уравнение суммы. Последние платежи равны Bq :

$$19,8 (q - 1) + \frac{13,2q^2}{q + 1} = 12,6$$

Шаг 4. Упрощаем. Умножаем на $q + 1$:

$$55q^2 - 21q - 54 = 0$$

Шаг 5. Отбираем корень. Дискриминант равен 111^2 ; допустимый корень:

$$q = \frac{21 + 111}{110} = 1,2$$
$$r = 20$$

Проверка

Первые три платежа равны по 1,32 млн рублей.

Второй корень $q = -9/11$ не является коэффициентом роста.



ТИПИЧНАЯ ОШИБКА

Приравнять последний платёж к В. Перед последним платежом проценты начисляются ещё раз, поэтому платёж равен Bq .

ОТВЕТ: 20%

Полная проверка суммы: после четвёртого платежа долг 3,6 млн рублей; последние два платежа по $3,6 \cdot 1,2 = 4,32$ млн. Итого $3 \cdot 1,32 + 2 \cdot 4,32 = 12,6$ млн рублей.

Разбор 8. Задание 19а: цепочка разрешённых ходов

ИСТОЧНИК	УРОВЕНЬ	ТРЕНИРУЕМ
ФИПИ, демонстрационный вариант ЕГЭ-2026, задача 19а; условие пересказано Открыть источник	официальная демоверсия • задача 19а	конструкция и инвариант двух ходов

Условие

Пару натуральных чисел $(a; b)$, $a > b$, заменяют на $(a + b; a - b)$. Можно ли из $(100; 1)$ получить пару, большее число которой равно 400?

$$(a, b) \mapsto (a + b, a - b)$$

До решения: что заметить

Для положительного ответа нужна конкретная цепочка.

Два последовательных хода превращают $(a; b)$ в $(2a; 2b)$.

Промежуточные пары всё равно выписываем для проверки допустимости.

Решение по шагам

Шаг 1. Выводим эффект двух ходов. Применяем операцию к уже преобразованной паре:

$$((a + b) + (a - b), (a + b) - (a - b)) = (2a, 2b)$$

Шаг 2. Первые два хода. Исходная пара удваивается:

$$(100, 1) \rightarrow (101, 99) \rightarrow (200, 2)$$

Шаг 3. Ещё два хода. Повторяем удвоение:

$$(200, 2) \rightarrow (202, 198) \rightarrow (400, 4)$$

Шаг 4. Формулируем вывод. Последняя пара допустима, её больший компонент равен 400.

Проверка

Все разности положительны.

Два удвоения превращают $(100; 1)$ в $(400; 4)$.



ТИПИЧНАЯ ОШИБКА

Сослаться на удвоение без вывода. Одной строкой покажите, почему два хода дают $(2a; 2b)$.

ОТВЕТ: Да: получается пара $(400; 4)$