



Обыкновенные и десятичные дроби

Теория и разобранные примеры

Обыкновенные и десятичные дроби — тема 2-го урока курса подготовки к профильному ЕГЭ с начального уровня. В этом уроке вы научитесь сравнивать дроби, выполнять четыре действия и находить целое по его доле.

Здесь собраны объяснения основных правил, 7 подробных разборов и ответы на частые вопросы. После изучения переходите к отдельному тесту из 40 заданий.

Что означает дробь

Обыкновенная дробь показывает, сколько равных частей целого взяли. В записи $\frac{3}{5}$ знаменатель 5 означает, что целое разделено на пять равных частей, а числитель 3 — что взяли три такие части. Дробная черта одновременно означает деление: $\frac{3}{5} = 3 : 5$.

Главное правило. Знаменатель не может быть равен нулю: деление на ноль не определено. Отрицательный знак можно поставить перед дробью или в числителе: $\frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$. Два минуса дают положительную дробь.

Если положительный числитель меньше положительного знаменателя, дробь меньше единицы. При равных числителе и знаменателе дробь равна единице. Неправильную положительную дробь можно записать смешанным числом: $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$, потому что $11 = 2 \cdot 4 + 3$.

Основное свойство и сокращение

Умножение или деление числителя и знаменателя на одно и то же ненулевое число не меняет дробь. Например, $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$: частей стало вдвое больше, но каждая часть вдвое меньше. Чтобы сократить $\frac{18}{24}$, делим оба числа на 6 и получаем $\frac{3}{4}$.

Частая ошибка. Сокращать можно общие множители, а не отдельные слагаемые. В дроби $\frac{2+6}{2}$ сначала складываем числитель либо делим на 2 оба слагаемых. Ответ равен 4, а не 7.

Как сравнивать и складывать дроби

Дроби с одинаковым положительным знаменателем сравнивают по числителям. При разных знаменателях их приводят к общему положительному знаменателю. Для $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$ удобно взять 12: получаем $\frac{8}{12}$ и $\frac{9}{12}$. Значит, $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

Чтобы сложить или вычесть дроби, нужны части одинакового размера:

1. Найдите общий знаменатель; наименьший общий знаменатель обычно делает вычисления короче.



2. Умножьте числитель каждой дроби на тот же дополнительный множитель, что и знаменатель.
3. Сложите или вычтите числители, оставив общий знаменатель.
4. Сократите результат, если это возможно.

Например, $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$. Складывать знаменатели нельзя: шестые и четвёртые доли ещё не являются одинаковыми частями.

Умножение, деление и смешанные числа

При умножении перемножают числители и отдельно знаменатели: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, где $b \neq 0$, $d \neq 0$. До умножения удобно сократить общие множители. Так, $\frac{14}{15} \cdot \frac{25}{28} = \frac{5}{6}$: сокращаем 14 и 28 на 14, а 25 и 15 на 5.

Деление на ненулевую дробь заменяют умножением на обратную: $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$. Переворачивают только делитель. Деление на число меньше единицы может увеличить результат — это нормально.

Перед умножением или делением смешанное число переводят в неправильную дробь: $2\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3}$. Запись $2\frac{1}{3}$ означает сумму $2 + \frac{1}{3}$, а не произведение.

Десятичные дроби и переход между записями

Цифры после запятой обозначают десятые, сотые, тысячные и следующие разряды. Поэтому $0,35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$. Нули справа после запятой не меняют значение: $0,5 = 0,50$.

Для перевода обыкновенной дроби в десятичную делят числитель на знаменатель. Иногда получается конечная запись, как у $\frac{3}{8} = 0,375$, а иногда бесконечная периодическая, как у $\frac{1}{3} = 0,(\overline{3})$. Если округление не требуется, периодическую дробь надёжнее оставить обыкновенной.

При сложении и вычитании десятичных дробей совмещают запятые и разряды. При умножении сначала считают без запятых, затем отделяют справа столько знаков, сколько было после запятых в обоих множителях вместе. При делении можно умножить делимое и делитель на одну степень 10: $1,26 : 0,3 = 12,6 : 3 = 4,2$.

Доля от числа и число по его доле

Чтобы найти $\frac{a}{b}$ от величины, умножают величину на эту дробь. Например, $\frac{3}{5}$ от 40 равно $40 \cdot \frac{3}{5} = 24$. Если известно, что 24 составляет $\frac{3}{5}$ целого, действуют обратно: $24 : \frac{3}{5} = 40$.

Проверка по смыслу. Доля положительного числа, меньшая единицы, должна быть меньше целого. При восстановлении целого по такой доле результат, наоборот, больше известной части. Это помогает заметить, что умножение и деление перепутаны.

Как проверить вычисления

Оцените результат до точного счёта. Сумма $\frac{1}{6} + \frac{1}{4}$ положительна и меньше $\frac{1}{2}$. После деления умножьте частное на делитель. В длинном выражении сначала выполните действия в скобках, затем умножение и деление слева направо, затем сложение и вычитание.



Примеры с пошаговыми решениями

Разбор 1. Сравнение дробей через одинаковые доли

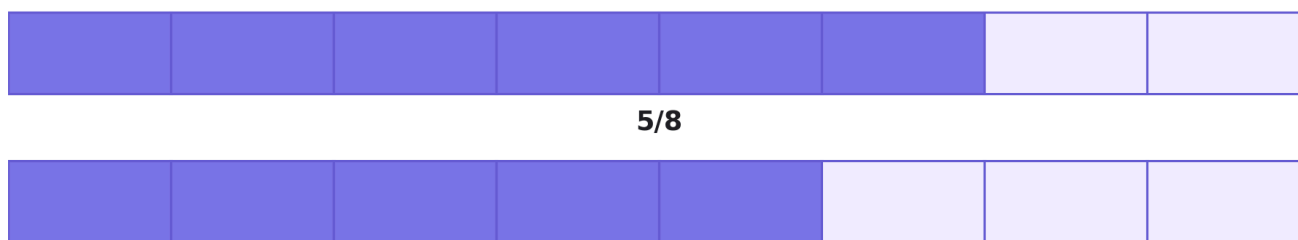
Уровень: База.

Условие

Сравните дроби.

$$\frac{3}{4} \quad \text{и} \quad \frac{5}{8}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$



Доли $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{8}$: три четверти занимают шесть из восьми равных частей.

Короткое правило.

Сравнивать удобно после приведения дробей к одинаковому знаменателю: тогда размер доли одинаков, остаётся сравнить их количество.

До вычислений.

Три четверти больше половины; пять восьмых тоже больше половины. Нужен точный перевод к одинаковым восьмым долям.

1. Выбираем общий знаменатель

$$4 \cdot 2 = 8$$

Четверти легко превратить в восьмые; дробь $\frac{5}{8}$ уже имеет нужный знаменатель.

2. Расширяем первую дробь

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$

Числитель и знаменатель умножаются на одно число, поэтому значение дроби не меняется.

3. Сравниваем числители

$$\frac{6}{8} > \frac{5}{8}$$

При одинаковом размере доли шесть долей больше пяти.



Проверка. На рисунке закрашенная часть $\frac{6}{8}$ действительно длиннее части $\frac{5}{8}$ на одну восьмую.

Типичная ошибка. Сравнивать 3 и 5, не учитывая, что четверти крупнее восьмых.

Ответ.

$$\frac{3}{4} > \frac{5}{8}$$

Разбор 2. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями

Уровень: База.

Условие

Вычислите.

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6}$$

Короткое правило.

Складывать и вычитать можно только одинаковые доли. Поэтому сначала приводим все дроби к общему знаменателю.

До вычислений.

$\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ больше 1, а затем вычитается число меньше 1. Итог должен быть положительным и меньше 1.

1. Находим наименьший общий знаменатель

$$\text{НОК}(4, 3, 6) = 12$$

12 делится на каждый из трёх знаменателей.

2. Приводим дроби к знаменателю 12

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}, \quad \frac{2}{3} = \frac{8}{12}, \quad \frac{5}{6} = \frac{10}{12}$$

Мы меняем запись, но не значение каждой дроби.

3. Выполняем действия с числителями

$$\frac{9}{12} + \frac{8}{12} - \frac{10}{12} = \frac{7}{12}$$

Знаменатель сохраняется: размер доли уже общий.

Проверка. $\frac{7}{12}$ примерно равно 0,58 — число положительное и меньше 1, как ожидалось.

Типичная ошибка. Сложить или вычесть знаменатели вместе с числителями.

Ответ.

$$\frac{7}{12}$$



Разбор 3. Умножение дробей с сокращением до вычисления

Уровень: Основной.

Условие

Вычислите.

$$\frac{14}{15} \cdot \frac{25}{28}$$

Короткое правило.

Перед перемножением сокращаем общий множитель числителя одной дроби и знаменателя другой.

До вычислений.

Обе дроби меньше 1, поэтому произведение тоже должно быть меньше 1.

1. Сокращаем 14 и 28

$$\frac{14}{28} = \frac{1}{2}$$

Оба числа делятся на 14.

2. Сокращаем 25 и 15

$$\frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

Оба числа делятся на 5.

3. Перемножаем оставшиеся множители

$$\frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

После сокращения числа небольшие, и ошибка менее вероятна.

Проверка. $5/6$ меньше 1. Приблизительно 0,83 — это согласуется с оценкой.

Типичная ошибка. Сначала получить $350/420$ и затем искать большой общий делитель.

Ответ.

$$\frac{5}{6}$$

Разбор 4. Деление дробей

Уровень: Основной.

Условие

Вычислите.

$$\frac{7}{12} : \frac{14}{9}$$

**Короткое правило.**

Деление на дробь заменяется умножением на обратную дробь. Переворачивается только делитель.

До вычислений.

Делим число меньше 1 на число больше 1, поэтому ответ должен стать ещё меньше.

1. Заменяем деление умножением

$$\frac{7}{12} : \frac{14}{9} = \frac{7}{12} \cdot \frac{9}{14}$$

Дробь 9/14 обратна делителю 14/9.

2. Сокращаем до умножения

$$\frac{7}{14} = \frac{1}{2}, \quad \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Сокращение уменьшает числа и сохраняет значение произведения.

3. Перемножаем

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

Полученное число меньше 7/12, что соответствует предварительной оценке.

Проверка. Умножьте 3/8 на 14/9: получится 7/12.

Типичная ошибка. Перевернуть обе дроби или оставить знак деления после переворота.

Ответ.

$$\frac{3}{8}$$

Разбор 5. Смешанное число и неправильная дробь

Уровень: Основной.

Условие

Вычислите.

$$2\frac{1}{3} - \frac{5}{6}$$

Короткое правило.

Универсальный путь: смешанное число переводим в неправильную дробь, затем приводим к общему знаменателю.

До вычислений.

Из числа немного больше 2 вычитается число немного меньше 1. Ответ ожидается между 1 и 2.

**1. Переводим смешанное число**

$$2\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3}$$

Две целых — это шесть третьих; вместе с одной третью получаем семь третьих.

2. Приводим к знаменателю 6

$$\frac{7}{3} = \frac{14}{6}$$

Теперь обе дроби состоят из шестых долей.

3. Вычитаем и выделяем целую часть

$$\frac{14}{6} - \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Сокращаем на 3 и переводим результат в смешанную форму.

Проверка. 1,5 находится между 1 и 2, как показала оценка.

Типичная ошибка. Вычесть 5/6 только из числителя 1, сохранив целую часть 2.

Ответ.

$$1\frac{1}{2}$$

Разбор 6. Переход между десятичной и обыкновенной дробью

Уровень: Экзамен.

Условие

Вычислите.

$$1,25 + \frac{7}{20}$$

Короткое правило.

Перед действием выбираем одну форму записи. Здесь знаменатель 20 удобен, поэтому десятичную дробь переводим в обыкновенную.

До вычислений.

1,25 + 0,35 должно дать 1,60. Это позволяет заранее контролировать ответ.

1. Переводим десятичную дробь

$$1,25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$$

В числе две цифры после запятой, поэтому первоначальный знаменатель равен 100.

2. Приводим к знаменателю 20

$$\frac{5}{4} = \frac{25}{20}$$

Знаменатель 4 умножаем на 5; числитель также умножаем на 5.



3. Складываем и переводим ответ

$$\frac{25}{20} + \frac{7}{20} = \frac{32}{20} = \frac{8}{5} = 1,6$$

Ответ удобно записать десятичной дробью для краткого ответа.

Проверка. $7/20 = 0,35$; сумма $1,25 + 0,35 = 1,60$.

Типичная ошибка. Складывать 1,25 и числитель 7 без перевода к одной форме.

Ответ.

1,6

Разбор 7. Целое по известной дробной части

Уровень: Экзамен.

Условие

Ученик выполнил 24 задания, что составляет $3/8$ всей работы. Сколько заданий было всего и сколько осталось?

Короткое правило.

Чтобы восстановить целое по известной части, известное число делят на соответствующую дробь.

До вычислений.

$3/8$ меньше половины. Поэтому полное число заданий должно быть больше 48.

1. Обозначаем всё количество

$$\frac{3}{8}x = 24$$

Три восьмых от полного количества равны 24.

2. Восстанавливаем целое

$$x = 24 : \frac{3}{8} = 24 \cdot \frac{8}{3} = 64$$

Деление на $3/8$ показывает, сколько составляет восемь таких частей.

3. Находим оставшуюся часть

$$64 - 24 = 40$$

Из полного количества вычитаем уже выполненные задания.

Проверка. $3/8$ от 64 равно 24; $24 + 40 = 64$.

Типичная ошибка. Умножить 24 на $3/8$ и получить ещё меньшую величину вместо целого.

Ответ. всего 64 задания, осталось 40.

64; 40



Основные формулы

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Вопросы по теме

Нужно ли всегда переводить дроби в десятичные?

Нет. Обыкновенная запись удобнее, если десятичная дробь бесконечна или в выражении можно сократить множители. Выбирайте форму, которая сохраняет точность и упрощает счёт.

Почему нельзя складывать знаменатели?

Знаменатель описывает размер доли. При сложении сначала делают доли одинаковыми, затем складывают их количество — числители.

Практика по теме

Проверьте понимание правил на отдельной странице: [40 заданий с ответами и решениями](#). Начните с первого уровня; к следующему переходите, когда можете объяснить каждый шаг.