



# Производная и чтение графиков

## Задания для самостоятельной работы

40 заданий. Записывайте ход решения в тетради. Ответы и подробные разборы находятся в отдельном PDF этого урока.

Имя: \_\_\_\_\_

Дата: \_\_\_\_\_

### 01. Свойства и базовые методы: задания 1-10

#### Задание 1

Найдите угловой коэффициент секущей через точки  $A(1; 2)$  и  $B(3; 6)$  графика функции.

#### Задание 2

Вычислите  $f'(3)$  для  $f(x) = x^2$  непосредственно по определению производной.

#### Задание 3

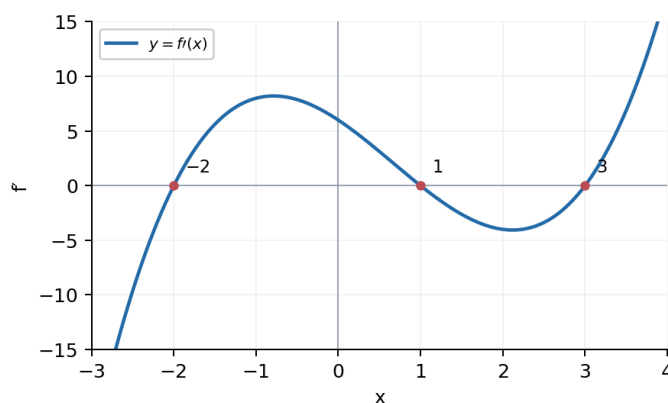
Известно, что  $f'(2) = -3$ . Найдите угловой коэффициент касательной и объясните направление её наклона.

#### Задание 4

Составьте уравнение касательной, если  $f(1) = 2$ ,  $f'(1) = 4$ .

**Задание 5**

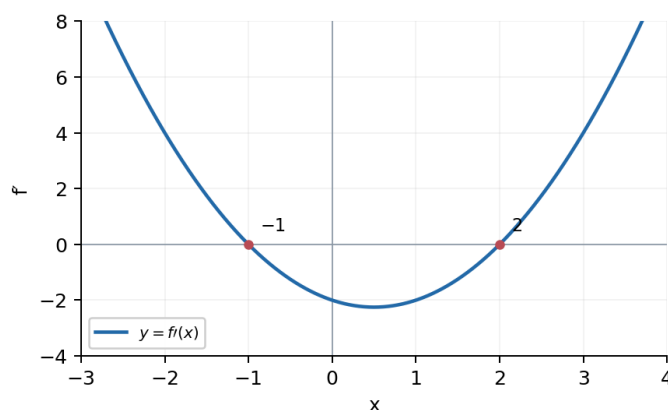
На рисунке показана производная функции  $f$ , дифференцируемой на  $\mathbb{R}$ . Все её нули  $-2, 1, 3$  отмечены; знак за пределами окна продолжает знак крайней ветви. Укажите промежутки, на которых  $f'(x) > 0$ , и максимальные промежутки возрастания  $f$ .



Задание 5. График производной; все её нули отмечены.

**Задание 6**

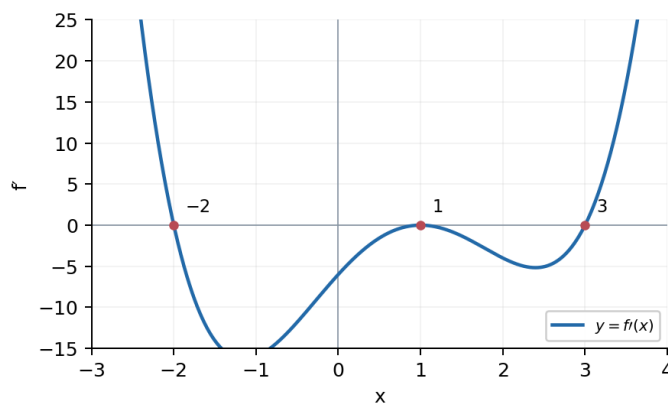
На рисунке дана производная дифференцируемой на  $\mathbb{R}$  функции. Её единственные нули  $-1$  и  $2$ ; знаки крайних ветвей сохраняются вне окна. Найдите максимальный промежуток убывания  $f$ .



Задание 6. График производной с отмеченными нулями.

**Задание 7**

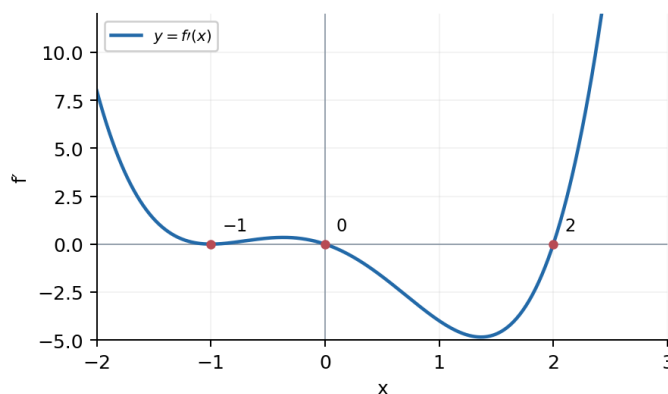
По изображённому графику производной найдите абсциссы локальных максимумов функции  $f$ , дифференцируемой на  $\mathbb{R}$ . Все нули производной:  $-2, 1, 3$ ; в точке  $1$  график касается оси.



Задание 7. График производной; исследуйте поведение около каждого нуля.

**Задание 8**

Сколько локальных экстремумов имеет дифференцируемая функция  $f$  по данному графику производной? Все нули производной:  $-1, 0, 2$ ; других смен знака нет.



Задание 8. График производной с тремя отмеченными нулями.

**Задание 9**

Касательная к графику функции параллельна прямой  $y = 5x - 1$ . Чему равна производная в точке касания?

**Задание 10**

У функции  $f(x) = x^3$  найдите все горизонтальные касательные. Есть ли в точке касания локальный экстремум?

**02. Графики и связка методов: задания 11-16****Задание 11**

Найдите производную функции  $f(x) = x^2 \ln x$  и её область определения.

**Задание 12**

Найдите производную  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ , сохраняя ограничения.

**Задание 13**

Для  $f(x) = \sqrt{3x + 1}$  найдите производную во внутренних точках области и проверьте существование конечной правой производной на её границе.

**Задание 14**

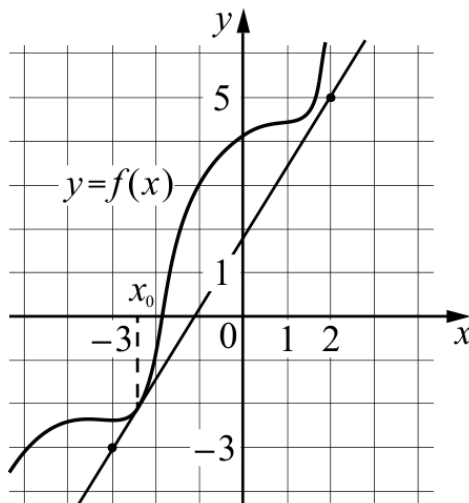
Найдите производную функции  $f(x) = \ln(1 + x^2)$  и укажите её область.

**Задание 15**

Докажите, что  $f(x) = |x|$  имеет локальный минимум при  $x = 0$ , но не имеет производной в этой точке.

**Задание 16**

На рисунке изображены график  $y = f(x)$  и касательная в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите  $f'(x_0)$ . Источник: вариант задания 8 официальной демоверсии ФИПИ ЕГЭ-2026.



Задание 16. Оригинальный рисунок ФИПИ-2026: график и касательная через отмеченные узлы.

**03. Повторение пройденного: задания 17-20****Задание 17**

Повторение функций. Найдите область определения  $f(x) = \sqrt{x-1}$ .

**Задание 18**

Повторение показательных неравенств. Решите  $3^x \leq 9$ .

**Задание 19**

Повторение рациональных неравенств. Решите  $x^2 - 4 \leq 0$ .

**Задание 20**

Повторение отбора корней. Сколько решений имеет  $\cos x = 0$  на  $[0; 2\pi]$ ?

**04. Составные задачи: задания 21-30****Задание 21**

Исследуйте монотонность и локальные экстремумы  $f(x) = x^3 - 3x$ . Укажите значения в точках экстремума.

**Задание 22**

Составьте уравнение касательной к  $y = x^3$  при  $x = 1$  и проверьте, пересекает ли она график в других точках.

**Задание 23**

В какой точке параболы  $y = x^2$  касательная параллельна прямой  $y = 6x + 1$ ? Найдите саму касательную.

**Задание 24**

В какой точке параболы  $y = x^2$  касательная образует угол  $45^\circ$  с положительным направлением оси абсцисс? Найдите её уравнение.

**Задание 25**

Для  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$  найдите все критические точки и их типы. Является ли  $x = 1$  критической точкой?

**Задание 26**

Найдите максимальные промежутки монотонности  $f(x) = x - \ln x$  и докажите, что функция имеет единственный глобальный минимум.

**Задание 27**

Найдите все горизонтальные касательные к  $f(x) = \ln x - x^2$  на  $(0; +\infty)$  и определите характер стационарной точки.

**Задание 28**

Координата точки задана  $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$  метрами при времени  $0 \leq t \leq 4$  секунд. Найдите скорость при  $t = 2$ , моменты остановки и интервалы движения в положительном направлении оси.

**Задание 29**

Пусть  $f'(x) = (x - 1)^2(x + 2)$  на  $\mathbb{R}$ . Найдите локальные экстремумы по абсциссам и сравните  $f(-1)$  и  $f(2)$ . Можно ли найти их численные значения без дополнительных данных?

**Задание 30**

Докажите, что касательная к  $y = x^2$  в любой точке не лежит выше параболы. Найдите все случаи равенства.

**05. Развёрнутое обоснование: задания 31-34****Задание 31**

Для каждого  $a \in \mathbb{R}$  определите число различных корней  $x^3 - 3x^2 = a$ . При каких  $a$  их ровно два?

**Задание 32**

Для каждого  $a \in \mathbb{R}$  определите число различных корней  $x^4 - 2x^2 = a$ . При каком  $a$  их ровно три?

**Задание 33**

Исследуйте монотонность и локальные экстремумы  $f_a(x) = x^4 - 2ax^2$ . Найдите  $a$ , если критических точек три, а разность значений в локальном максимуме и минимуме равна 16.

**Задание 34**

Докажите для каждого  $x \geq 1$  двойную оценку  $\frac{2(x-1)}{x+1} \leq \ln x \leq \frac{x - \frac{1}{x}}{2}$ . Установите все случаи равенства.

**06. Сложные задачи и параметры: задания 35-40****Задание 35**

Функция задана

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \leq 1, \\ b \ln x + c, & x > 1. \end{cases}$$

Найдите  $a, b, c$ , если она непрерывна и дифференцируема в 1, а  $f(e) = 7$ .

**Задание 36**

Для каждого  $a \in \mathbb{R}$  найдите число различных корней  $x^4 - 4x^2 = a$ , используя производную и горизонтальные уровни.

**Задание 37**

Найдите все пары  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , при которых  $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3bx$  строго возрастает на всей прямой.

**Задание 38**

Для всех действительных  $a, b$  определите число различных решений  $e^x = ax + b$ .

**Задание 39**

Для всех  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  найдите число различных корней  $x^3 - 3ax = b$ . Обоснуйте все критические и вырожденные случаи.

**Задание 40**

Для  $f(x) = x^4 - 2x^2$  найдите все  $k$ , при которых существуют ровно три различные касательные с угловым коэффициентом  $k$ . Одна прямая, касающаяся в двух точках, считается одной касательной.