



Рациональные и иррациональные неравенства

Теория и разобранные примеры

Свойства, условия применения и пошаговые объяснения. Используйте оглавление и закладки PDF для перехода к нужной теме.

Содержание

01. Решить неравенство - описать все точки, где сравнение верно	3
02. Какие преобразования неравенств равносильны	3
03. Линейное неравенство и знак коэффициента	4
04. Знак квадратного трёхчлена выводится из разложения	4
05. Строгое и нестрогое неравенство различаются включением нулей	5
06. Метод интервалов: доказательный алгоритм	5
07. Почему знак меняется в корне нечётной кратности	5
08. Полиномиальное неравенство: пример с кратностями	6
09. Рациональное неравенство начинается с одной дроби	6
10. Нули знаменателя - выколотые точки	7
11. Сокращение общего множителя и сохранение ОДЗ	7
12. Знак дроби можно анализировать как знак произведения	8
13. Система неравенств означает пересечение	8
14. Совокупность неравенств означает объединение	9
15. Неравенство с модулем как расстояние	9
16. Квадратное неравенство без действительных корней	9
17. Замена $t=x^2$ в рациональном неравенстве	10
18. Метод замены знака произведения без раскрытия скобок	10
19. Положительный квадрат можно сократить из знакового выражения, но сохранить его нули	11
20. Рациональная функция с квадратом в знаменателе	11
21. Полный разбор полиномиального неравенства	11
22. Полный разбор рационального неравенства	12

23. Сложное неравенство после приведения к одной дроби	12
24. Параметр в линейном множителе	13
25. Параметр и касание квадратного трёхчлена	13
26. Неравенство через оценку	13
27. Лаборатория ошибок	14
28. Контроль восстановления доказательств	14
29. Дополнительная практика по основному банку	15
30. Карта урока	15
31. Быстрая проверка понимания	15
32. Как упростить или усложнить урок	16
33. Финальное упражнение: доказать собственную знаковую схему	16
34. Разбор сложных задач ЕГЭ	16
35. Задача 1 • четыре критические точки	17
36. Задача 2 • чётная кратность не меняет знак	18
37. Задача 3 • сокращение и скрытая выколота точка	19
38. Задача 4 • рациональное неравенство после замены	20
39. Задача 5 • система рациональных неравенств	21
40. Задача 6 • ровно четыре целых решения	22
41. Итог урока	23
42. Метод интервалов после разложения на множители	24
43. Иррациональные неравенства: учёт знака перед возведением в квадрат	24
44. Задачи повышенной сложности с подробным решением	26
45. Как объяснить неравенство с корнем	30
46. Параметр и точное число целых решений	30

01. Решить неравенство - описать все точки, где сравнение верно

Решением неравенства является множество значений переменной. В отличие от уравнения, ответ обычно состоит из промежутков, отдельных точек или их объединения.

$$f(x) > 0$$

Граница возникает там, где выражение равно нулю или перестаёт быть определено. Между соседними границами знак не может измениться без новой нулевой или запрещённой точки.

Главный принцип. Метод интервалов - не раскраска по памяти. Он основан на непрерывности выражения между критическими точками и анализе знака каждого множителя.

02. Какие преобразования неравенств равносильны

Переход	Условие	Что происходит со знаком
прибавить одно выражение к обеим частям	выражение определено	знак сохраняется
умножить на положительное число	число > 0	знак сохраняется
умножить на отрицательное число	число < 0	знак меняется
умножить на выражение с x	его знак заранее известен	зависит от знака выражения
возвести неотрицательные части в квадрат	обе части ≥ 0	знак сохраняется

Умножение на выражение неизвестного знака без разбиения на случаи запрещено. Оно может сохранить или изменить знак в разных точках.

Контрпример. Из $\frac{1}{x} > 1$ нельзя умножать на x без знания его знака. При $x > 0$ знак сохраняется, при $x < 0$ меняется; кроме того, $x = 0$ запрещён.

03. Линейное неравенство и знак коэффициента

Рассмотрим $ax > b$. Если $a > 0$, деление сохраняет знак; если $a < 0$, знак меняется; если $a = 0$, получаем числовое сравнение и отдельный случай.

$$ax > b$$

Условие	Результат
$a > 0$	$x > \frac{b}{a}$
$a < 0$	$x < \frac{b}{a}$
$a = 0$ и $0 > b$	верно для всех x
$a = 0$ и $0 \leq b$	решений нет

Параметрическая привычка. Перед делением на коэффициент с параметром определите его знак и отдельно рассмотрите нулевое значение.

04. Знак квадратного трёхчлена выводится из разложения

Если квадратный трёхчлен имеет два различных корня $x_1 < x_2$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Слева от обоих корней множители $(x - x_1)$ и $(x - x_2)$ имеют одинаковый знак; между корнями - разные знаки; справа - снова одинаковый знак. Поэтому при $a > 0$ трёхчлен положителен снаружи и отрицателен внутри.

При $a < 0$ все знаки меняются. При $D = 0$ выражение равно $a(x - x_0)^2$ и знак вне корня совпадает со знаком a .

Почему парабола не обязательна. Правило знаков полностью доказывается произведением трёх множителей. График является наглядной проверкой, но не единственным основанием.

05. Строгое и нестрогое неравенство различаются включением нулей

Точки, в которых числитель или многочлен равен нулю, включаются в ответ для знаков $\leq$ и $\geq$ и не включаются для $<$ и $>$.

Точки, в которых исходное выражение не определено, не включаются никогда - независимо от строгости знака.

Тип точки	$>$ или $<$	$\geq$ или $\leq$
нуль числителя	не включать	включать
нуль знаменателя	не включать	не включать

06. Метод интервалов: доказательный алгоритм

Пусть выражение разложено на множители. Выписываем все нули числителя и знаменателя, располагаем их на числовой прямой и делим область определения на интервалы.

- На каждом интервале каждый множитель сохраняет знак.
- Следовательно, произведение или частное также сохраняет знак.
- Достаточно определить знак в одной тестовой точке каждого интервала или последовательно отслеживать смену знака.
- Затем выбираем интервалы нужного знака и отдельно решаем вопрос о включении границ.



Метод интервалов: критические точки делят числовую прямую на области постоянного знака

07. Почему знак меняется в корне нечётной кратности

Рядом с точкой $x = a$ множитель $(x - a)$ меняет знак. Его нечётная степень сохраняет эту смену, а чётная степень делает оба соседних значения неотрицательными.

$$(x - a)^{2n} > 0 \text{ при } x \neq a$$

$$(x - a)^{2n+1} \text{ меняет знак при переходе через } a$$

Поэтому при проходе через корень нечётной кратности знак всего выражения меняется, а через корень чётной кратности - сохраняется, если остальные множители ненулевые.

08. Полиномиальное неравенство: пример с кратностями

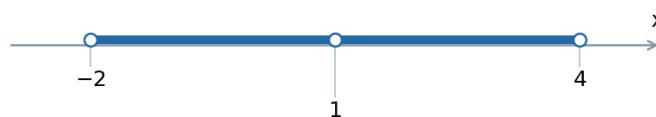
Задача. Решите $(x + 2)(x - 1)^2(x - 4) < 0$.

Критические точки: $-2, 1, 4$. Точка 1 имеет чётную кратность, поэтому знак при проходе через неё не меняется; в точках -2 и 4 меняется.

Справа при $x > 4$ все множители положительны. Двигаясь влево, получаем знаки: плюс, минус, минус, плюс.

Для строгого неравенства все нули исключаются. Выбираем интервалы отрицательного знака.

Проверка. Возьмите по одной точке из выбранного и невыбранного интервала. Числовая подстановка проверяет знаковую схему, но не заменяет доказательство постоянства знака.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

09. Рациональное неравенство начинается с одной дроби

Все члены переносим в одну часть и приводим к общему знаменателю. Только после этого анализируем знак одной рациональной функции.

Пример. Решите $\frac{x + 1}{x - 2} > 1$.

$$\frac{x + 1}{x - 2} - 1 > 0$$

$$\frac{3}{x - 2} > 0$$

Числитель 3 положителен, поэтому знак дроби совпадает со знаком знаменателя. Получаем $x > 2$. Точка 2 исключена как нуль исходного знаменателя.

Запрет. Нельзя переносить знаменатель вправо без знания его знака. Приведение к одной дроби избегает разбиения на лишние случаи.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

10. Нули знаменателя - выколотые точки

В рациональном неравенстве знаменатель не может равняться нулю. Его нули являются критическими точками, потому что при нечётной кратности знак дроби меняется, но сами точки никогда не входят в ответ.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \quad Q(x) \neq 0$$

Даже если после сокращения множитель исчез, соответствующая точка остаётся выколотой по исходной области определения.

11. Сокращение общего множителя и сохранение ОДЗ

Задача. Решите $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-2)} \geq 0$.

Исходная ОДЗ: $x \neq 1$ и $x \neq 2$. Сокращаем $x-1$ только на этой области:

$$\frac{x+3}{x-2} \geq 0, \quad x \neq 1, \quad x \neq 2$$

Метод интервалов для сокращённой дроби даёт предварительные промежутки, но точка $x = 1$ должна быть удалена из ответа, хотя в сокращённой записи знаменатель там не равен нулю.

Смысл выколотой точки. Сокращение делает функцию проще на её исходной области, но не доопределяет её в запрещённой точке.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

12. Знак дроби можно анализировать как знак произведения

Для ненулевого знаменателя числа Q и $\frac{1}{Q}$ имеют одинаковый знак. Поэтому знак дроби $\frac{P}{Q}$ совпадает со знаком произведения $P \cdot Q$.

$$\frac{P}{Q} \text{ и } PQ \text{ имеют одинаковый знак при } Q \neq 0$$

Это позволяет строить одну знаковую схему по всем множителям числителя и знаменателя. Но нули знаменателя всё равно отмечаются как выколотые.

Доказательство. Произведение $\left(\frac{P}{Q}\right) \cdot (PQ) = P^2$ неотрицательно и положительно при $P \neq 0$. Значит, ненулевые выражения имеют одинаковый знак; при $P = 0$ оба равны нулю.

13. Система неравенств означает пересечение

Система требует одновременного выполнения всех условий, поэтому множества решений пересекаются.

$$A(x) > 0 \text{ и } B(x) \leq 0$$

В рабочей записи каждый ответ отмечаем на общей числовой прямой и оставляем только общую часть.

Пример. $x > -1$ и $x \leq 3$ дают $(-1; 3]$.

Язык множеств словами. Если символ пересечения мешает ученику, проговорите: «оставляем значения, которые подходят обоим неравенствам».



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

14. Совокупность неравенств означает объединение

Совокупность допускает выполнение хотя бы одного условия. Поэтому в ответ входят все значения из любого из найденных множеств.

Пример. $x < -2$ или $x \geq 1$ дают два промежутка: $(-\infty; -2)$ и $[1; +\infty)$.

В задачах с модулем совокупность часто появляется после ветвления, а в рациональных неравенствах несколько промежутков возникают из знаковой схемы.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

15. Неравенство с модулем как расстояние

Для $r \geq 0$ условие $|x - a| < r$ означает, что расстояние от x до a меньше r .

$$|x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r$$

Условие $|x - a| > r$ означает выход за пределы отрезка:

$$x < a - r \text{ или } x > a + r$$

Для сложного выражения $|f(x)| < g(x)$ сначала требуется $g(x) > 0$, после чего возникает двойное неравенство $-g(x) < f(x) < g(x)$.

16. Квадратное неравенство без действительных корней

Если $D < 0$, квадратный трёхчлен не обращается в ноль и сохраняет знак на всей прямой. Этот знак совпадает со знаком старшего коэффициента.

Пример. $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 > 0$ для любого x . Неравенство $x^2 + 4x + 5 \leq 0$ решений не имеет.

Дополнение до квадрата одновременно доказывает отсутствие корней и знак выражения.

17. Замена $t=x^2$ в рациональном неравенстве

Если выражение зависит только от x^2 , вводим $t = x^2 \geq 0$, решаем неравенство по t , а затем возвращаемся к x .

Пример. Решите $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 9} \geq 0$.

$$t = x^2, \quad t \geq 0, \quad t \neq 9$$

$$\frac{(t-1)(t-4)}{t-9} \geq 0$$

После метода интервалов по t пересекаем ответ с условием $t \geq 0$ и только затем возвращаем каждый допустимый промежуток к условию на x^2 .

Двойной контроль. Нужно сохранить и область новой переменной $t \geq 0$, и запрет $t \neq 9$, пришедший из исходного знаменателя.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

18. Метод замены знака произведения без раскрытия скобок

Раскрытие скобок часто скрывает критические точки. В неравенствах выгодно, наоборот, сохранять факторизацию.

Пример. Для $(2x - 3)(x + 5)(x^2 + 1) \leq 0$ множитель $x^2 + 1$ всегда положителен и не влияет на знак. Остаётся линейное произведение $(2x - 3)(x + 5) \leq 0$.

Факт $x^2 + 1 > 0$ должен быть доказан, после чего множитель можно безопасно удалить из знакового анализа.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

19. Положительный квадрат можно сократить из знакового выражения, но сохранить его нули

Множитель $(x - a)^2$ неотрицателен и положителен вне точки a . Для строгого неравенства его нуль всё равно исключает точку, а знак на соседних интервалах не меняется.

Пример. $(x - 2)^2(x + 1) > 0$. Вне $x = 2$ знак определяет $x + 1$. Поэтому предварительно $x > -1$, но точку $x = 2$ нужно удалить из ответа, поскольку там произведение равно нулю.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

20. Рациональная функция с квадратом в знаменателе

Ненулевой квадрат знаменателя положителен. Поэтому знак дроби определяется числителем, а нули знаменателя лишь вырезаются из ответа.

$$\frac{P(x)}{Q^2(x)} \text{ имеет знак } P(x) \text{ при } Q(x) \neq 0$$

Пример. $\frac{x-4}{(x+1)^2} \geq 0$. ОДЗ: $x \neq -1$. На ОДЗ знаменатель положителен, поэтому ответ $x \geq 4$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

21. Полный разбор полиномиального неравенства

Задача. Решите $(x - 3)(x + 1)(x - 2)^2 \geq 0$.

Критические точки: $-1, 2, 3$. Корень 2 имеет чётную кратность, остальные - нечётную.

Справа от 3 знак положительный. Через 3 знак меняется на отрицательный; через 2 сохраняется отрицательным; через -1 меняется на положительный.

Так как знак нестрогий, все три нуля включаются. Из схемы выбираем положительные интервалы и нулевые точки.

Проверка полноты. Критические точки перечислены все, между ними знак постоянен, а включение каждой границы разобрано - значит, других частей ответа нет.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

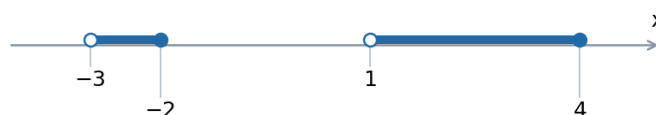
22. Полный разбор рационального неравенства

Задача. Решите $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)(x+3)} \leq 0$.

Нули числителя: -2 и 4 . Нули знаменателя: -3 и 1 ; они запрещены. Все корни простые, поэтому знак меняется в каждой критической точке.

Справа при $x > 4$ знак положительный. Двигаясь влево, чередуем знаки и выбираем интервалы с отрицательным знаком, а также нули числителя.

Точки -3 и 1 ставятся пустыми; точки -2 и 4 включаются из-за знака $\leq$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

23. Сложное неравенство после приведения к одной дроби

Задача. Решите $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} \geq 1$.

ОДЗ: $x \neq 1, x \neq -2$. Переносим единицу влево и приводим к общему знаменателю.

$$\frac{2(x+2) - (x-1) - (x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} \geq 0$$

Числитель упрощаем и по возможности раскладываем на множители. После этого применяем метод интервалов к одной дроби. Умножать исходное неравенство на общий знаменатель нельзя, потому что его знак меняется.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

24. Параметр в линейном множителе

Задача. В зависимости от a решите $(a - 1)x > 2$.

При $a > 1$ коэффициент положителен и $x > \frac{2}{a - 1}$. При $a < 1$ коэффициент отрицателен, поэтому знак меняется: $x < \frac{2}{a - 1}$. При $a = 1$ получаем $0 > 2$ - решений нет.

Полнота случаев. Три возможности $a > 1$, $a < 1$ и $a = 1$ исчерпывают все значения параметра и определяют допустимость деления и направление знака.

25. Параметр и касание квадратного трёхчлена

Задача. При каких a неравенство $x^2 - 2ax + a^2 - 1 \geq 0$ верно для всех x ?

Дополняем до квадрата:

$$(x - a)^2 - 1 \geq 0$$

При $x = a$ левая часть равна -1 независимо от a . Поэтому неравенство не может быть верным для всех x ни при каком a .

Проверка экстремума. Для условия «при всех x » ищем наименьшее значение выражения. Одного контрпримера $x = a$ достаточно, чтобы исключить любое значение параметра.

26. Неравенство через оценку

Иногда знаковый метод заменяется доказанной оценкой. Например, для $t > 0$

$$t + \frac{1}{t} \geq 2$$

потому что $(t - 1)^2 \geq 0$. Поэтому неравенство $t + \frac{1}{t} < 2$ решений не имеет, а равенство возможно только при $t = 1$.

Такие оценки особенно полезны после замены $t = x^2$ или $t = a^x$.

27. Лаборатория ошибок

Ошибка	Почему неверно	Как восстановить
умножили на знаменатель	его знак неизвестен	перенести всё в одну дробь
включили нуль знаменателя	исходное выражение не определено	отметить точку выколотов
после сокращения забыли запрет	ОДЗ не расширяется	сохранить исходные нули знаменателя
знак чередовали через двойной корень	чётная степень не меняет знак	учесть кратность
в системе объединили ответы	нужны значения, подходящие обоим условиям	взять общую часть

28. Контроль восстановления доказательств

- вывести знак квадратного трёхчлена из разложения на множители;
- объяснить постоянство знака между соседними критическими точками;
- доказать смену знака в корне нечётной и сохранение в корне чётной кратности;
- объяснить, почему нуль знаменателя не включается при нестрогом знаке;
- доказать одинаковый знак $\frac{P}{Q}$ и $P \cdot Q$ при $Q \neq 0$;
- различить пересечение системы и объединение совокупности.

29. Дополнительная практика по основному банку

Номера	Назначение
1-10	Основа метода
11-16	Преобразования и ограничения
17-20	Повторение пройденного
21-30	Составные задачи
31-36	Развёрнутое решение
37-40	Сложные задачи и параметры

30. Карта урока

Объект	Критические точки	Знак между точками	Границы
многочлен	нули множителей	постоянен	нули включаются при $\geq$ или $\leq$
рациональная функция	нули числителя и знаменателя	постоянен на ОДЗ	нули знаменателя всегда исключены
чётная кратность	корень остаётся критическим	знак не меняется	включение зависит от строгости
замена	границы по новой переменной	анализируется после ограничений	обратный переход проверяет диапазон

31. Быстрая проверка понимания

Вопрос	Критерий полного ответа
Почему знак постоянен на интервале?	Ни один непрерывный множитель не обращается в ноль и не теряет определённости внутри интервала.
Почему двойной корень не меняет знак?	Чётная степень множителя положительна по обе стороны от корня.
Почему знаменатель нельзя включить?	В этой точке исходное выражение не существует.
Почему нельзя умножать на знаменатель?	Его знак может меняться и по-разному влиять на знак неравенства.

Вопрос	Критерий полного ответа
Что означает система?	Нужно пересечение множеств: значения, удовлетворяющие всем условиям.

32. Как упростить или усложнить урок

Уровень	Что оставить	Что добавить
55-65	линейные и квадратные неравенства, простые дроби	готовая числовая прямая
65-80	полный метод интервалов, кратности, задания 1-20	самостоятельное приведение к одной дроби
80-100	сложная факторизация, замены и параметры	доказательство знаковой схемы и высокий банк 21-40

33. Финальное упражнение: доказать собственную знаковую схему

Составьте рациональное неравенство с одним корнем числителя чётной кратности, одним простым корнем числителя и двумя нулями знаменателя. Постройте знаковую схему, объясните каждую смену знака и отдельно обоснуйте включение или исключение всех четырёх границ.

Критерий. Ответ считается полным только вместе с исходной ОДЗ, факторизацией, кратностями, контрольной точкой и правилами включения границ.

34. Разбор сложных задач ЕГЭ

Шесть крупных задач разбираются полностью: от ОДЗ и выбора метода до проверки, графической интерпретации и доказательства полноты ответа.

35. Задача 1 • четыре критические точки

Условие

Решите неравенство

$$\frac{(x-4)(x+1)}{(x-2)(x+3)} \geq 0.$$

Разбор

Шаг 1.

ОДЗ:

$$x \neq -3, \quad x \neq 2.$$

Шаг 2.

Нули числителя:

$$x = -1, \quad x = 4.$$

Шаг 3.

Все критические точки в порядке возрастания:

$$-3, -1, 2, 4.$$

Шаг 4.

Каждый линейный множитель имеет нечётную кратность, поэтому знак меняется при переходе через каждую критическую точку. Справа выражение положительно.

$$\text{Знаки } \frac{(x-4)(x+1)}{(x-2)(x+3)}$$



Рисунок 1. Закрашенные точки - нули числителя; пустые точки - запрещённые значения знаменателя.

Шаг 5.

Для знака «больше или равно нулю» выбираем положительные интервалы и включаем нули числителя:

$$(-\infty, -3) \cup [-1, 2) \cup [4, +\infty).$$

Контроль полноты

Учтены все нули числителя и знаменателя; знак на крайнем интервале проверен, а дальнейшее чередование оправдано нечётными кратностями.

Ответ: $(-\infty, -3) \cup [-1, 2) \cup [4, +\infty)$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

36. Задача 2 • чётная кратность не меняет знак

Условие

Решите неравенство

$$\frac{(x-2)^2(x+1)}{x-3} \leq 0.$$

Разбор

- ОДЗ:

$$x \neq 3.$$

- Критические точки:
 1. $x = -1$ - ноль нечётной кратности;
 2. $x = 2$ - ноль чётной кратности;
 3. $x = 3$ - полюс нечётной кратности.
- На интервале $(3, +\infty)$ выражение положительно. Через $x = 3$ знак меняется, через $x = 2$ сохраняется, через $x = -1$ снова меняется.
- Неположительный знак получаем на промежутке от -1 до 3 . Точка 2 входит как ноль числителя, а точка 3 исключается:

$$[-1, 3).$$

Контроль полноты

В точке $x = 2$ знак не меняется, но само выражение равно нулю; это не повод разрывать итоговый промежуток.

Ответ: $[-1, 3)$.

Экзаменационный акцент: механическое чередование знаков без учёта кратности дало бы неверный ответ.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

37. Задача 3 • сокращение и скрытая выколота точка

Условие

Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} \leq 0.$$

Разбор

Факторизуем и фиксируем исходную ОДЗ:

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} \leq 0,$$

$$x \neq 1, \quad x \neq 2.$$

На ОДЗ сокращаем общий множитель:

$$\frac{x+1}{x-2} \leq 0.$$

Для сокращённого выражения решение:

$$[-1, 2).$$

Возвращаем запрет $x = 1$, который после сокращения исчез из записи:

$$[-1, 1) \cup (1, 2).$$

Контроль полноты

Точка $x = 1$ не может быть включена, хотя сокращённая дробь в ней имеет конечное значение: исходное выражение там не определено.

Ответ: $[-1, 1) \cup (1, 2)$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

38. Задача 4 • рациональное неравенство после замены

Условие

Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \leq 0.$$

Разбор

ОДЗ:

$$x \neq -2, \quad x \neq 2.$$

Вводим

$$t = x^2, \quad t \geq 0.$$

- Получаем

$$\frac{t - 1}{t - 4} \leq 0.$$

В переменной t :

$$t \in [1, 4).$$

- Это согласуется с условием $t \geq 0$.

Возвращаемся к x :

$$1 \leq x^2 < 4.$$

- Следовательно,

$$x \in (-2, -1] \cup [1, 2).$$

Контроль полноты

При обратном переходе учтены обе симметричные ветви $x < 0$ и $x > 0$; точки ± 2 исключены, точки ± 1 включены.

Ответ: $(-2, -1] \cup [1, 2)$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

39. Задача 5 • система рациональных неравенств

Условие

Решите систему

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+2} \geq 0, \\ \frac{(x-3)(x+1)}{x-4} \leq 0. \end{cases}$$

Разбор

Первое неравенство:

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup [1, +\infty).$$

Во втором неравенстве критические точки $-1, 3, 4$. Справа знак положителен, поэтому

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x-4} \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [3, 4).$$

Система означает пересечение:

$$((-\infty, -2) \cup [1, +\infty)) \cap ((-\infty, -1] \cup [3, 4)).$$

Получаем

$$(-\infty, -2) \cup [3, 4).$$

Контроль полноты

Точка -2 исключена первым знаменателем, точка 4 - вторым; точки 3 и -1 проверены по знаку, но -1 не проходит первое неравенство.

Ответ: $(-\infty, -2) \cup [3, 4)$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

40. Задача 6 • ровно четыре целых решения

Условие

Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$\frac{x-a}{x-2} \leq 0$$

имеет ровно четыре целых решения.

Разбор

При $a = 2$ дробь равна 1 на ОДЗ $x \neq 2$, поэтому решений нет.

Пусть $a < 2$. Тогда

$$x \in [a, 2).$$

- Целые решения имеют вид

$$[a], [a] + 1, \dots, 1.$$

- Их число равно $2 - [a]$. Требуем четыре:

$$2 - [a] = 4,$$

- поэтому $[a] = -2$, то есть

$$-3 < a \leq -2.$$

Пусть $a > 2$. Тогда

$$x \in (2, a].$$

- Целые решения: $3, 4, \dots, [a]$. Их число

$$[a] - 2.$$

- Условие четырёх решений даёт $[a] = 6$, то есть

$$6 \leq a < 7.$$

Параметрическая граница и подсчёт целых решений

$a < 2$: четыре целых при $-3 < a \leq -2$



$a > 2$: четыре целых при $6 \leq a < 7$



Рисунок 2. Выколотая точка $x = 2$ разделяет два принципиально разных положения параметра.

Контроль полноты

Случаи $a < 2$, $a = 2$, $a > 2$ попарно не пересекаются и покрывают все действительные значения параметра; граничные значения проверены через функции пола и потолка.

Ответ: $a \in (-3, -2] \cup [6, 7)$.

Экзаменационный акцент: подсчёт целых решений требует отдельно контролировать открытые и закрытые границы.

41. Итог урока

Нули знаменателя никогда не входят в ответ.

Чётная кратность сохраняет знак, нечётная - меняет.

После сокращения сохраняется исходная ОДЗ.

Замена $t = x^2$ требует $t \geq 0$ и двух ветвей при возврате.

Система означает пересечение множеств решений.

В задаче с параметром граничные значения определяют точный целочисленный счёт.

42. Метод интервалов после разложения на множители

Эталонный разбор 1 • Рациональное неравенство с пятью критическими точками

Условие

Решите неравенство $\frac{(x^2 - 4)(x - 1)}{x^2 - 9} \leq 0$.

Решение с обоснованием

Шаг 1. Разложим выражение: $\frac{(x - 2)(x + 2)(x - 1)}{(x - 3)(x + 3)}$. ОДЗ: $x \neq -3, x \neq 3$.

Шаг 2. Критические точки: $-3, -2, 1, 2, 3$. Все множители имеют первую степень, поэтому знак меняется при переходе через каждую точку.

Шаг 3. Справа от 3 знак положительный. Последовательно восстанавливая знаки, получаем отрицательные или нулевые участки $(-\infty; -3)$, $[-2; 1]$ и $[2; 3)$.

Шаг 4. Нули числителя $-2, 1, 2$ включаются, а нули знаменателя ± 3 исключаются.

Контроль полноты. Учтены все нули числителя и знаменателя; пробный знак справа и кратности однозначно задают всю таблицу.

Ответ. $(-\infty; -3) \cup [-2; 1] \cup [2; 3)$.

Экзаменационный акцент. Критическая ошибка - включить ± 3 или потерять участок из-за несистемной проверки знаков.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

43. Иррациональные неравенства: учёт знака перед возведением в квадрат

Неравенства с корнем: разбиение по знаку

При сравнении корня с выражением нельзя сразу возводить обе части в квадрат. Сначала нужно определить знак правой части. Если она отрицательна, неотрицательный корень автоматически больше неё.

Полный разбор

Задача. Решите $\sqrt{x + 1} \geq x - 1$.

Шаг 1. ОДЗ корня: $x \geq -1$. Если $x - 1 \leq 0$, то есть $x \leq 1$, неравенство выполняется автоматически: левая часть неотрицательна. Получаем промежуток $[-1; 1]$.

Шаг 2. Пусть $x > 1$. Теперь обе части положительны, поэтому можно равносильно возвести их в квадрат:

$$x + 1 \geq (x - 1)^2, \quad x + 1 \geq x^2 - 2x + 1.$$

После переноса получаем $x^2 - 3x \leq 0$, то есть $0 \leq x \leq 3$. Пересечение с условием $x > 1$ даёт $(1; 3]$. Объединяя оба случая, получаем ответ $[-1; 3]$.

Проверка границ. При $x = -1$ левая часть 0, правая -2 ; при $x = 3$ обе части равны 2. Точки входят. При $x = 4$ получаем $\sqrt{5} < 3$, поэтому правее 3 решений нет.

Рационализация разности корней

Для натурального n рассмотрим разность $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Умножим и разделим на сопряжённую сумму:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Знаменатель растёт с увеличением n , поэтому разность соседних корней уменьшается. Кроме того, знаменатель больше $2\sqrt{n}$, следовательно, разность меньше $\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Такая оценка позволяет сравнивать выражения без десятичных приближений.

Задача. Сравните $\sqrt{101} - 10$ и $\frac{1}{20}$. После рационализации

$$\sqrt{101} - 10 = \frac{1}{\sqrt{101} + 10}.$$

Знаменатель больше 20, поэтому выражение меньше $\frac{1}{20}$.

Запрет. Возведение неравенства в квадрат равносильно только при неотрицательности обеих частей. Если знак неизвестен, сначала разбейте задачу на случаи.

Эталонный разбор 1 • Неравенство с корнем и меняющей знак правой частью

Условие

Решите неравенство $\sqrt{x+4} \geq x$.

Решение с обоснованием

Шаг 1. ОДЗ: $x \geq -4$. Если $-4 \leq x \leq 0$, правая часть неположительна, а левая неотрицательна, поэтому весь этот отрезок подходит.

Шаг 2. Если $x > 0$, обе части положительны и можно равносильно возвести их в квадрат: $x + 4 \geq x^2$.

Шаг 3. Получаем $x^2 - x - 4 \leq 0$. Корни равны $\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$; с учётом $x > 0$ остаётся

$$0 < x \leq \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$

Шаг 4. Объединяем два случая.

Контроль полноты. Разбиение по знаку правой части обязательно: без него возведение в квадрат потеряло бы весь участок $[-4; 0]$.

Ответ. $\left[-4; \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right]$.

Экзаменационный акцент. В решении должны быть явно разделены случаи $x \leq 0$ и $x > 0$.



Решение примера: корень из $x + 1$ не меньше $x - 1$.



Решение примера: корень из $x + 4$ не меньше x .

44. Задачи повышенной сложности с подробным решением**Разбор 1**

Решите неравенство

$$\frac{(x^2 - 5x + 6)(x^2 + x - 6)}{(x^2 - 4)(x - 3)} \leq 0.$$

Шаг 1. Исходная ОДЗ: $x \neq -2, x \neq 2, x \neq 3$.

Шаг 2. Разложим на множители и сократим только на ОДЗ: выражение принимает вид $\frac{(x - 2)(x + 3)}{x + 2}$. Точки $x = 2$ и $x = 3$ остаются запрещёнными.

Шаг 3. Критические точки сокращённого выражения: $-3, -2, 2$. Таблица знаков даёт неположительный знак на $(-\infty; -3]$ и $(-2; 2]$.

Шаг 4. Точку $x = 2$ исключаем как нуль исходного знаменателя. Точка $x = 3$ и без того не входит в найденные промежутки.

Проверка полноты. Все нули числителя и знаменателя исходной дроби учтены до сокращения; знаки постоянны между соседними критическими точками.

Ответ. $(-\infty; -3] \cup (-2; 2)$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Разбор 2

Решите неравенство $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 13x^2 + 36} \geq 0$.

Шаг 1. Положим $t = x^2 \geq 0$. Исходный знаменатель равен $(t - 4)(t - 9)$, поэтому $x \neq \pm 2, \pm 3$.

Шаг 2. Дробь равна $\frac{(t - 1)(t - 4)}{(t - 4)(t - 9)}$. После сокращения сохраняем запрет $t \neq 4$.

Шаг 3. Неравенство $\frac{t - 1}{t - 9} \geq 0$ даёт $t \in [0; 1] \cup (9; +\infty)$ с учётом $t \geq 0$. Запрещённое $t = 4$ в этот набор не входит.

Шаг 4. Возвращаясь к x , получаем $|x| \leq 1$ или $|x| > 3$.

Проверка полноты. Замена $t = x^2$ взаимно однозначно переводит допустимые значения t в пары $\pm x$, а нули исходного знаменателя исключены до сокращения.

Ответ. $(-\infty; -3) \cup [-1; 1] \cup (3; +\infty)$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Разбор 3

Решите неравенство $\sqrt{x + 3} \geq x - 1$.

Шаг 1. Область определения: $x \geq -3$.

Шаг 2. При $-3 \leq x \leq 1$ правая часть неположительна, а корень неотрицателен, поэтому весь этот промежуток подходит.

Шаг 3. При $x > 1$ обе части положительны, и возведение в квадрат равносильно: $x + 3 \geq (x - 1)^2$, то есть $x^2 - 3x - 2 \leq 0$.

Шаг 4. Корни квадратного трёхчлена равны $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$. С учётом $x > 1$ получаем $x \leq \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$.

Проверка полноты. Область определения разделена по знаку правой части; только в положительном режиме использовано равносильное возведение в квадрат.

Ответ. $\left[-3; \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right]$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Разбор 4

Решите неравенство $\frac{\sqrt{x+1}}{x-2} \leq 1$.

Шаг 1. ОДЗ: $x \geq -1, x \neq 2$.

Шаг 2. При $-1 \leq x < 2$ знаменатель отрицателен, поэтому левая часть неположительна и неравенство выполняется.

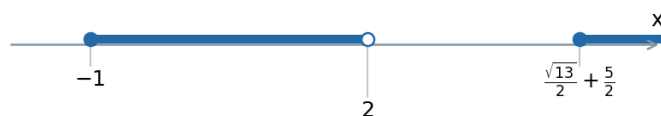
Шаг 3. При $x > 2$ умножаем на положительный знаменатель: $\sqrt{x+1} \leq x-2$. Обе части неотрицательны, поэтому квадрат равносильен.

Шаг 4. Получаем $x+1 \leq (x-2)^2$, или $x^2 - 5x + 3 \geq 0$. При $x > 2$ остаётся $x \geq \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$.

Проверка полноты. Знак знаменателя разобран до умножения; в квадрат возведены только неотрицательные части.

Ответ.

$$[-1; 2) \cup \left[\frac{5 + \sqrt{13}}{2}; +\infty\right).$$



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Разбор 5

Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 1} \leq x + 1$.

Шаг 1. ОДЗ: $x \leq -1$ или $x \geq 1$.

Шаг 2. При $x < -1$ правая часть отрицательна, а левая неотрицательна, поэтому решений нет. При $x = -1$ обе части равны нулю.

Шаг 3. При $x \geq 1$ обе части неотрицательны. Возводим в квадрат: $x^2 - 1 \leq (x + 1)^2$, откуда $x \geq -1$, что выполняется на всём рассматриваемом луче.

Проверка полноты. Обе компоненты ОДЗ рассмотрены, а условие неотрицательности правой части проверено до квадратирования.

Ответ: $\{-1\} \cup [1; +\infty)$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Разбор 6

Решите неравенство $\sqrt{x + 2} + \sqrt{6 - x} \geq 4$.

Шаг 1. ОДЗ: $-2 \leq x \leq 6$. Обе части неотрицательны.

Шаг 2. По неравенству Коши $(\sqrt{x + 2} + \sqrt{6 - x})^2 \leq 2((x + 2) + (6 - x)) = 16$.

Шаг 3. Следовательно, левая часть не превосходит 4. Неравенство выполняется только при равенстве в оценке.

Шаг 4. Равенство Коши требует $x + 2 = 6 - x$, откуда $x = 2$.

Проверка. При $x = 2$ получаем $2 + 2 = 4$; других значений быть не может из-за строгой верхней оценки.

Ответ. $x = 2$.



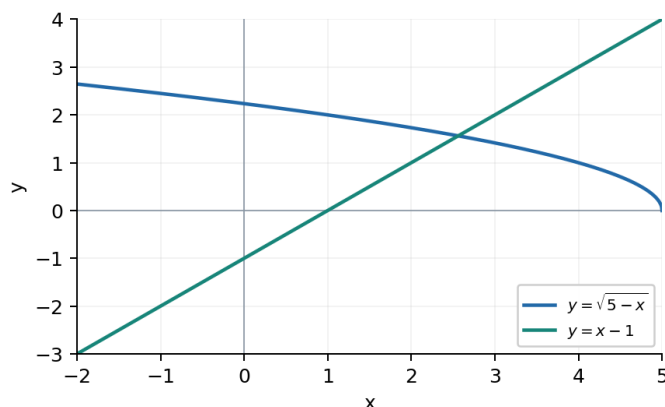
Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

45. Как объяснить неравенство с корнем

Вопрос перед возведением в квадрат: какой знак у правой части? Например, в $\sqrt{5-x} > x-1$ ОДЗ даёт $x \leq 5$. При $x < 1$ слева неотрицательное, справа отрицательное число: всё уже верно. Только на $[1; 5]$ можно сравнивать квадраты.

Получается $x^2 - x - 4 < 0$ и ответ $x < \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$.

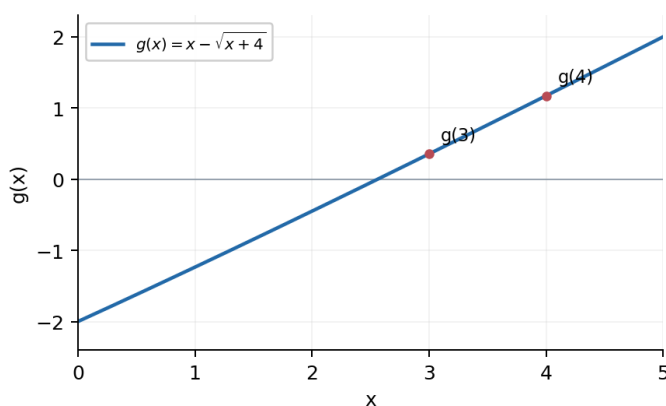
Ученик должен назвать обе ветви, затем объединить их. График показывает результат, а проверка знака доказывает равносильность переходов.



Корень выше прямой до единственной точки пересечения.
Отрицательную правую часть проверяем до квадрата.

46. Параметр и точное число целых решений

Если условие для целого $n \geq 0$ записано как $a \geq g(n)$, сначала докажете монотонность $g(n)$. Тогда число решений меняется только в порогах $g(0), g(1), \dots$. Чтобы решений было четыре, включаем четвертый порог $g(3)$ и исключаем пятый $g(4)$. При строгом исходном знаке включение границ изменится.



Четыре неотрицательных целых решения: уровень a достигает $g(3)$, но ещё не достигает $g(4)$.