



Рациональные и иррациональные уравнения

Теория и разобранные примеры

Свойства, условия применения и пошаговые объяснения. Используйте оглавление и закладки PDF для перехода к нужной теме.

Содержание

01. Уравнение - это вопрос о множестве допустимых значений	3
02. Равносильность и следствие - разные логические отношения	3
03. Какие преобразования сохраняют корни	4
04. Линейное уравнение и полный разбор случаев	4
05. Формула корней квадратного уравнения выводится дополнением до квадрата	5
06. Что именно показывает дискриминант	5
07. Теорема Виета - следствие разложения на множители	6
08. Нулевое произведение и полнота ветвления	6
09. Биквадратное уравнение и ограничение новой переменной	7
10. Рациональное уравнение начинается с ОДЗ	7
11. Почему умножение на общий знаменатель равносильно только на ОДЗ	8
12. Сокращение дроби не возвращает выколотую точку	8
13. Арифметический квадратный корень неотрицателен	8
14. Когда возведение в квадрат становится равносильным	9
15. Алгоритм уравнения с одним радикалом	9
16. Два радикала: изолировать, а не квадратировать всё сразу	9
17. Замена переменной в иррациональном уравнении	10
18. Уравнения с модулем как две знаковые ветви	10
19. Система уравнений: замена должна сохранять связь между переменными	10
20. Функциональный метод: равенство значений строго монотонной функции	11
21. Полный разбор рационального уравнения	11
22. Полный разбор иррационального уравнения	11
23. Смешанная модель: дробь и радикал	12

24. Параметр: сначала особые значения коэффициентов	12
25. Как доказать полноту ответа	13
26. Доказательный практикум	13
27. Лаборатория ошибок	13
28. Контроль восстановления доказательств	14
29. Дополнительная практика по основному банку	14
30. Карта урока	15
31. Быстрая проверка понимания	15
32. Как упростить или усложнить урок	16
33. Финальное упражнение: ученик проектирует решение	16
34. Разбор сложных задач ЕГЭ	16
35. Задача 1 • Рациональная симметрия	16
36. Задача 2 • Сумма двух радикалов через сумму и произведение	18
37. Задача 3 • Радикалы от взаимно обратных дробей	19
38. Задача 4 • Параметр в рациональном уравнении	20
39. Задача 5 • Число корней суммы радикалов	21
40. Задача 6 • модель работы двух насосов	22
41. Итог урока	23
42. Биквадратное уравнение с параметром	24
43. Замена переменной и число корней уравнения	24
44. Задачи повышенной сложности с подробным решением	26
45. Рисунок как проверка, равносильность как доказательство	30

01. Уравнение - это вопрос о множестве допустимых значений

Уравнение содержит переменную и утверждает равенство двух выражений. Решить уравнение — значит найти все допустимые значения переменной, при которых равенство истинно, и доказать, что других значений нет.

$$f(x) = g(x)$$

Корень уравнения — одно подходящее значение. Решение уравнения — всё множество корней. Поэтому фраза «нашёл один ответ» ещё не доказывает полноту решения.

Пример. Уравнение $x^2 = 4$ имеет два корня. Проверка только $x = 2$ подтверждает существование корня, но не исключает $x = -2$.

Главный принцип. Каждый переход должен либо сохранять множество корней, либо явно давать лишь следствие. Во втором случае обязательна проверка в исходном уравнении.

02. Равносильность и следствие - разные логические отношения

Два уравнения равносильны, если у них одинаковые множества решений. Равносильный переход разрешает двигаться в обе стороны.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow F(x) = G(x)$$

Если каждый корень первого уравнения является корнем второго, но обратное не доказано, второе уравнение называется следствием первого.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow F(x) = G(x)$$

Возведение обеих частей в квадрат обычно создаёт следствие: противоположные числа имеют одинаковые квадраты. Например, из $x = -2$ следует $x^2 = 4$, но из $x^2 = 4$ не следует $x = -2$.

Проверка языка. Слова «получаем равносильное уравнение» допустимы только после объяснения обратного перехода. Если обратимость не доказана, пишите «получаем следствие».

03. Какие преобразования сохраняют корни

Переход	Условие	Что происходит
Прибавить одно выражение к обеим частям	выражение определено на рассматриваемой области	равносильность
Умножить обе части на число	число не равно нулю	равносильность
Умножить на выражение с переменной	выражение заранее доказано ненулевым	равносильность
Возвести в нечётную степень	обе части определены	равносильность
Возвести в чётную степень	нужен контроль знаков	обычно только следствие
Применить строго монотонную функцию	обе части лежат в её области определения	равносильность

Умножение на выражение без проверки особенно опасно. Если умножить на x , можно добавить корень $x = 0$; если разделить на x , можно потерять этот корень.

Контрпример. Из $x(x - 1) = 0$ делением на x получается $x - 1 = 0$. Корень $x = 0$ потерян, потому что делитель мог равняться нулю.

04. Линейное уравнение и полный разбор случаев

Рассмотрим уравнение с параметрами a и b :

$$ax = b$$

Если a не равно нулю, деление на a равносильно и даёт единственный корень.

$$x = \frac{b}{a}$$

Если $a = 0$, делить нельзя. Тогда получается $0 = b$. При $b = 0$ верно любое значение x ; при $b \neq 0$ решений нет.

Важно. Даже простейшее линейное уравнение учит главному правилу второй части: перед делением нужно проверить, не обращается ли делитель в ноль.

05. Формула корней квадратного уравнения выводится дополнением до квадрата

Пусть $a \neq 0$. Разделим квадратное уравнение на a :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Перенесём свободный член и дополним левую часть до полного квадрата:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Число $D = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом. Оно появляется не как отдельная формула, а как числитель после дополнения до квадрата.

Если $D \geq 0$, извлекаем арифметический квадратный корень и учитываем оба знака:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2|a|}$$

После согласования знака знаменателя получаем привычную школьную запись:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Контроль вывода. Ученик должен уметь восстановить формулу через полный квадрат. Запоминание трёх символов D, b и $2a$ без происхождения не считается пониманием.

06. Что именно показывает дискриминант

Левая часть после дополнения до квадрата неотрицательна. Поэтому знак D полностью определяет число действительных корней.

Знак D	Уравнение для квадрата	Число корней
$D > 0$	квадрат равен положительному числу	два различных корня
$D = 0$	квадрат равен нулю	один корень кратности 2

Знак D	Уравнение для квадрата	Число корней
$D < 0$	квадрат должен равняться отрицательному числу	действительных корней нет

Пример. Для $x^2 - 6x + 5 = 0$ имеем $(x - 3)^2 = 4$, поэтому $x = 1$ или $x = 5$. Дискриминант равен 16 и заранее сообщает, что корней два.

07. Теорема Виета - следствие разложения на множители

Если квадратное уравнение имеет корни x_1 и x_2 , то его левая часть раскладывается так:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

Сравнивая коэффициенты с $ax^2 + bx + c$, получаем:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Обратное утверждение тоже верно: если два числа имеют указанную сумму и произведение, то подстановка показывает, что они являются корнями.

Пример. Для $x^2 - 11x + 24 = 0$ ищем два числа с суммой 11 и произведением 24. Это 3 и 8. Быстрая проверка обеих связей заменяет вычисление дискриминанта.

08. Нулевое произведение и полнота ветвления

Произведение действительных чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один множитель равен нулю.

$$A(x)B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ или } B(x) = 0$$

Это равносильность. Поэтому разложение на множители не создаёт и не теряет корней, если само разложение является тождественным на исходной области.

Разбор. Уравнение $x^3 - 4x = 0$ преобразуем в $x(x - 2)(x + 2) = 0$. Три ветви дают $x = 0, x = 2, x = -2$. Деление на x сократило бы запись, но потеряло бы корень 0.

09. Биквадратное уравнение и ограничение новой переменной

Если встречаются только x^4 и x^2 , вводим $t = x^2$. Но новая переменная не произвольна: для действительного x обязательно $t \geq 0$.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0, \quad t = x^2, \quad t \geq 0$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

Получаем $t = 1$ или $t = 4$. Оба значения неотрицательны, поэтому возвращаемся к x :

$$x^2 = 1 \text{ или } x^2 = 4$$

Ответ: $-2, -1, 1, 2$. Если квадратное уравнение по t дало отрицательное значение, его нужно отбросить до обратной замены.

Общий принцип замены. После введения новой переменной сразу записывайте её область значений. $t = x^2$ требует $t \geq 0$; $t = a^x$ требует $t > 0$; $t = \sqrt{x}$ требует $t \geq 0$.

10. Рациональное уравнение начинается с ОДЗ

Рациональное уравнение содержит переменную в знаменателе. Значения, обращающие хотя бы один исходный знаменатель в ноль, запрещены до любых сокращений.

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{3}{x}, \quad x \neq 2, \quad x \neq 0$$

На ОДЗ можно умножить обе части на общий знаменатель $x(x-2)$, потому что он гарантированно не равен нулю.

$$x(x+1) = 3(x-2)$$

После решения квадратного уравнения каждый кандидат сверяется с исходным ОДЗ, а не только с преобразованной записью.

11. Почему умножение на общий знаменатель равносильно только на ОДЗ

Пусть L — общий знаменатель. На области, где $L \neq 0$, умножение на L обратимо: обе части можно затем разделить на L . Поэтому множества решений совпадают.

$$\frac{A}{L} = \frac{B}{L} \Leftrightarrow A = B, \quad L \neq 0$$

Без условия $L \neq 0$ обратный переход незаконен: преобразованное уравнение может оказаться истинным в точке, где исходные дроби не существуют.

Контрпример. Равенство $\frac{x-1}{x-1} = 1$ после сокращения выглядит верным для любого x , но при $x = 1$ исходная дробь не определена.

12. Сокращение дроби не возвращает выколотую точку

При сокращении одинакового множителя меняется форма выражения, но не исходная область определения.

$$\frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = x+2, \quad x \neq 3$$

Справа стоит многочлен, который определён при $x = 3$, однако исходная дробь там не существовала. Поэтому в уравнениях и неравенствах выколотая точка сохраняется до ответа.

Проверка. После любого сокращения отдельно перепишите ограничения исходного знаменателя. Именно они отличают тождественное преобразование выражения от расширения его области определения.

13. Арифметический квадратный корень неотрицателен

Запись $\sqrt{A}$ означает не любой квадратный корень числа A , а единственное неотрицательное число, квадрат которого равен A . Поэтому для действительного выражения требуется $A \geq 0$, а само значение корня всегда неотрицательно.

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow B \geq 0 \text{ и } B^2 = A$$

Системная запись в формуле здесь читается словами: правая часть B должна быть неотрицательной и её квадрат должен равняться A . В документах решения эти два условия записываются отдельными строками.

Контрпример. Уравнение $\sqrt{x+1} = -2$ не имеет решений: левая часть неотрицательна. Простое возведение в квадрат дало бы $x = 3$ - посторонний корень.

14. Когда возведение в квадрат становится равносильным

Если обе части уравнения заранее неотрицательны, функция $y \mapsto y^2$ строго возрастает на этой области. Тогда возведение в квадрат равносильно.

$$A \geq 0, B \geq 0 \Rightarrow A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$$

В уравнении $\sqrt{f(x)} = g(x)$ левая часть уже неотрицательна. Поэтому достаточно потребовать $g(x) \geq 0$, а затем возвести в квадрат.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \text{ и } f(x) = g^2(x)$$

Запрет. Не пишите двойную стрелку между $\sqrt{f} = g$ и $f = g^2$ без условия $g \geq 0$. Это главный источник посторонних корней в иррациональных уравнениях.

15. Алгоритм уравнения с одним радикалом

Задача. Решите $\sqrt{2x+3} = x$.

Шаг 1. Правая часть должна быть неотрицательной: $x \geq 0$. При этом подкоренное выражение автоматически положительно.

Шаг 2. На найденной области возводим обе части в квадрат:

$$2x + 3 = x^2$$

Шаг 3. Решаем $x^2 - 2x - 3 = 0$ и получаем $x = 3$ или $x = -1$. Ограничение $x \geq 0$ оставляет $x = 3$.

Шаг 4. Проверка в исходном уравнении: $\sqrt{9} = 3$. Ответ: 3.

16. Два радикала: изолировать, а не квадратировать всё сразу

В уравнении $\sqrt{A} + \sqrt{B} = C$ первое возведение в квадрат создаёт смешанный радикал $2\sqrt{AB}$. Поэтому до второго квадрата нужно изолировать оставшийся корень и проверить знак противоположной части.

Задача. Решите $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3$.

ОДЗ: $x \geq 2$. После первого квадрата получаем $2x - 1 + 2\sqrt{(x+1)(x-2)} = 9$, то есть

$$\sqrt{(x+1)(x-2)} = 5 - x$$

Левая часть неотрицательна, значит дополнительно $x \leq 5$. Только после этого снова возводим в квадрат и решаем полученное уравнение. Проверка кандидатов в исходной сумме обязательна.

Экономия ошибок. Изоляция радикала перед каждым квадратом позволяет увидеть знак правой части. Квадратирование длинной суммы скрывает условие и резко увеличивает число посторонних корней.

17. Замена переменной в иррациональном уравнении

Если одно и то же подкоренное выражение повторяется, обозначаем его новой переменной вместе с областью значений.

$$t = \sqrt{x+2}, \quad t \geq 0$$

Тогда $x = t^2 - 2$. Например, уравнение $x + 2 - 5\sqrt{x+2} + 6 = 0$ превращается в

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

Получаем $t = 2$ или $t = 3$, затем $x = 2$ или $x = 7$. Оба значения проверяются в исходном уравнении.

Почему замена полна. Каждому допустимому x соответствует ровно одно $t = \sqrt{x+2} \geq 0$, а каждому $t \geq 0$ соответствует $x = t^2 - 2$. Поэтому на указанной области замена обратима.

18. Уравнения с модулем как две знаковые ветви

Модуль числа — его расстояние до нуля. Поэтому уравнение $|f(x)| = g(x)$ сначала требует $g(x) \geq 0$, а затем распадается на две ветви.

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \text{ и } (f(x) = g(x) \text{ или } f(x) = -g(x))$$

Пример. $|2x - 3| = 5$ даёт $2x - 3 = 5$ или $2x - 3 = -5$. Ответ: $x = 4$ или $x = -1$.

Если справа отрицательное число, решений нет. Если модулей несколько, полезно разбить числовую прямую точками, в которых выражения под модулями меняют знак.

19. Система уравнений: замена должна сохранять связь между переменными

В симметрической системе удобно перейти к сумме $s = x + y$ и произведению $q = xy$. Тогда x и y являются корнями квадратного уравнения.

$$t^2 - st + q = 0$$

Задача. Решите систему $x + y = 5, x^2 + y^2 = 13$.

Используем $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$. Получаем $13 = 25 - 2xy$, поэтому $xy = 6$. Числа x и y — корни $t^2 - 5t + 6 = 0$, то есть 2 и 3.

Поскольку переменные упорядочены, система имеет два решения: (2; 3) и (3; 2).

20. Функциональный метод: равенство значений строго монотонной функции

Если функция строго возрастает или строго убывает на общей области, она принимает каждое значение не более одного раза. Поэтому

$$F(u) = F(v) \Leftrightarrow u = v$$

на той области, где доказана строгая монотонность. Этот принцип уже использовался для степеней и логарифмов и будет основным на следующих уроках.

Пример. Функция $t \mapsto t^3$ строго возрастает на всей прямой. Поэтому $(2x - 1)^3 = (x + 4)^3$ равносильно $2x - 1 = x + 4$, откуда $x = 5$.

21. Полный разбор рационального уравнения

Задача. Решите $\frac{x+2}{x-1} - \frac{3}{x+1} = 2$.

Шаг 1. ОДЗ: $x \neq 1$ и $x \neq -1$.

Шаг 2. На ОДЗ умножаем обе части на $(x - 1)(x + 1)$:

$$(x + 2)(x + 1) - 3(x - 1) = 2(x - 1)(x + 1)$$

Шаг 3. Раскрываем скобки и переносим все члены в одну часть. После приведения получаем квадратное уравнение. Его корни являются лишь кандидатами до проверки ОДЗ.

Шаг 4. Каждый кандидат подставляется в исходные знаменатели и затем в исходное равенство. Полное решение заканчивается отдельной строкой ответа.

22. Полный разбор иррационального уравнения

Задача. Решите $\sqrt{3x + 4} = x + 2$.

Правая часть должна быть неотрицательной: $x \geq -2$. Подкоренное выражение требует $x \geq -\frac{4}{3}$. Вместе получаем $x \geq -\frac{4}{3}$.

На этой области квадратирование равносильно:

$$3x + 4 = (x + 2)^2$$

$$x^2 + x = 0$$

Кандидаты $x = 0$ и $x = -1$ оба входят в найденную область. Проверка: $\sqrt{4} = 2$ и $\sqrt{1} = 1$. Ответ: $-1; 0$.

Почему проверка всё равно полезна. Знаковое условие сделало квадратирование равносильным, но финальная подстановка одновременно проверяет вычисления и исходное ОДЗ.

23. Смешанная модель: дробь и радикал

Задача. Решите $\sqrt{x-1} = \frac{6}{x+1}$.

ОДЗ радикала даёт $x \geq 1$, а знаменатель - $x \neq -1$. На $x \geq 1$ правая часть положительна, поэтому квадратирование равносильно.

$$x - 1 = \frac{36}{(x + 1)^2}$$

После умножения на положительный квадрат $(x + 1)^2$ получаем кубическое уравнение. Прежде чем раскрывать скобки, ищем простой целый корень и раскладываем многочлен на множители.

Этот пример показывает, что ОДЗ может не только запрещать значения, но и обосновывать знак множителя и равносильность следующего перехода.

24. Параметр: сначала особые значения коэффициентов

Задача. В зависимости от параметра a решите $(a - 1)x = a + 1$.

При $a \neq 1$ уравнение линейное и имеет единственный корень:

$$x = \frac{a + 1}{a - 1}$$

При $a = 1$ коэффициент при x равен нулю, а правая часть равна 2. Получаем ложное равенство $0 = 2$, поэтому решений нет.

Правило параметра. До деления на выражение с параметром выделите значения, при которых оно обращается в ноль. Именно там обычно меняется число решений.

25. Как доказать полноту ответа

- Каждый равносильный переход снабжён условием обратимости.
- После перехода-следствия все кандидаты проверены в исходном уравнении.
- Учтены все ветви: оба знака квадратного корня, каждый множитель нулевого произведения, все случаи параметра.
- Сохранена исходная область определения после сокращений и замен.
- В ответе перечислены только допустимые значения, без неразобранных кандидатов.

Полнота — не дополнительная фраза в конце. Она складывается из обратимости переходов и исчерпывающего ветвления на каждом шаге.

26. Доказательный практикум

Практикум 1. Почему деление на переменную опасно

Докажите, что уравнение $x(x - a) = 0$ имеет два различных корня при $a \neq 0$ и один корень при $a = 0$. Затем объясните, какой корень теряется при делении на x .

Практикум 2. Критерий равносильного квадратирования

Докажите: если $A(x) \geq 0$ и $B(x) \geq 0$ на рассматриваемой области, то $A(x) = B(x)$ равносильно $A^2(x) = B^2(x)$. Используйте разложение разности квадратов и знак суммы $A + B$.

Практикум 3. Обратимость замены $t = x^2$

Объясните, почему отрицательные корни вспомогательного уравнения по t не дают действительных x , а каждому $t \geq 0$ соответствуют ровно два x , кроме $t = 0$.

27. Лаборатория ошибок

Ошибка	Почему неверно	Как восстановить ход
разделили на выражение с x	оно могло быть нулём	вынести множитель и рассмотреть нулевую ветвь
сократили дробь и вернули точку	исходное ОДЗ не меняется	переписать запреты до сокращения
возвели радикальное уравнение в квадрат	потерян знак правой части	изолировать корень и потребовать неотрицательность

Ошибка	Почему неверно	Как восстановить ход
после $t = x^2$ взяли $t < 0$	квадрат действительного числа неотрицателен	записать область новой переменной
нашли один корень	не доказана полнота	проверить все ветви и обратимость переходов

28. Контроль восстановления доказательств

- вывод формулы корней квадратного уравнения через полный квадрат;
- доказательство теоремы Виета сравнением коэффициентов;
- обоснование равносильности умножения на общий знаменатель на ОДЗ;
- критерий равносильного квадратирувания неотрицательных частей;
- область новой переменной в заменах $t = x^2$ и $t = \sqrt{f(x)}$;
- полноту разложения нулевого произведения на ветви.

29. Дополнительная практика по основному банку

Задания практики	Этап работы
1-10	Основные приёмы урока
11-16	Сочетание приёмов и контроль ограничений
17-20	Повторение ранее изученного
21-30	Многошаговое решение
31-36	Полное обоснование и проверка ответа
37-40	Итоговые задачи повышенной сложности

30. Карта урока

Понятие	Откуда берётся	Что доказываем	Где применяем
равносильность	совпадение множеств корней	обратимость перехода	каждая строка решения
ОДЗ	определённость исходных выражений	запрет нулевых знаменателей и отрицательных подкоренных выражений	отбор кандидатов
дискриминант	дополнение до квадрата	число действительных корней	квадратные и биквадратные уравнения
проверка	переходы-следствия	отсутствие посторонних корней	радикалы и сложные замены

31. Быстрая проверка понимания

Вопрос ученику	Критерий полного ответа
Когда можно делить на выражение с x ?	После доказательства, что оно не равно нулю, либо после отдельного разбора нулевого случая.
Почему D определяет число корней?	После дополнения до квадрата знак D становится знаком числа, которому должен равняться квадрат.
Почему сокращение не возвращает выколотую точку?	Исходное выражение там не определено, даже если сокращённая формула имеет значение.
Когда квадратирование равносильно?	Когда обе части неотрицательны на рассматриваемой области.
Как доказать полноту?	Обосновать обратимость переходов или проверить всех кандидатов после следствий.

32. Как упростить или усложнить урок

Уровень	Что оставить	Что добавить
55-65	линейные, квадратные, рациональные и уравнения с одним корнем	каркас ОДЗ и проверки с пропусками
65-80	все основные методы и задания 1-20	самостоятельный выбор между факторизацией и заменой
80-100	полный доказательный маршрут	системы, параметры, два радикала, функциональный метод и задания 21-40

33. Финальное упражнение: ученик проектирует решение

Составьте уравнение, в котором квадратирование добавляет посторонний корень. Решите его двумя способами: через систему равносильных условий и через получение кандидатов с последующей проверкой. Сравните, на какой строке каждого решения контролируется знак.

Критерий. Ученик не только получает правильный ответ, но и может показать, какое преобразование создало риск и почему проверка устраняет его.

34. Разбор сложных задач ЕГЭ

Шесть крупных задач разбираются полностью: от ОДЗ и выбора метода до проверки, графической интерпретации и доказательства полноты ответа.

35. Задача 1 • Рациональная симметрия

Условие

Решите уравнение

$$\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x+1} = \frac{5}{2}.$$

Разбор

1. Фиксируем ОДЗ:

$$x \neq 2, \quad x \neq -1.$$

1. На ОДЗ вводим ненулевую замену

$$t = \frac{x+1}{x-2}.$$

- Тогда второе слагаемое равно $\frac{1}{t}$, поэтому исходное уравнение равносильно

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}.$$

1. Умножаем на $2t$, причём $t \neq 0$:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0, \quad (2t - 1)(t - 2) = 0.$$

- Следовательно,

$$t = 2 \quad \text{или} \quad t = \frac{1}{2}.$$

1. Возвращаемся к x :

$$\frac{x+1}{x-2} = 2 \Rightarrow x = 5,$$

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -4.$$

Контроль полноты

Замена однозначно определялась каждым допустимым x , оба значения t рассмотрены, обратные линейные уравнения решены полностью. Числа 5 и -4 входят в ОДЗ.

Ответ: -4 ; 5.

Экзаменационный акцент: нельзя раскрывать дроби до фиксации двух запрещённых точек; замена экономит вычисления и сохраняет симметрию.

36. Задача 2 • Сумма двух радикалов через сумму и произведение

Условие

Решите уравнение

$$\sqrt{x+8} + \sqrt{12-x} = 6.$$

Разбор

1. ОДЗ:

$$-8 \leq x \leq 12.$$

1. Обозначим

$$A = \sqrt{x+8}, \quad B = \sqrt{12-x}.$$

- Тогда $A \geq 0, B \geq 0$,

$$A + B = 6, \quad A^2 + B^2 = 20.$$

1. Из квадрата суммы:

$$36 = A^2 + B^2 + 2AB = 20 + 2AB,$$

- поэтому $AB = 8$. Неотрицательные числа A и B имеют сумму 6 и произведение 8, значит

$$\{A, B\} = \{2, 4\}.$$

1. Если $A = 2$, то $x + 8 = 4$ и $x = -4$. Если $A = 4$, то $x + 8 = 16$ и $x = 8$.



Рисунок 1. График подтверждает два найденных корня, но доказательством служит обратимая замена.

Контроль полноты

Переход от пары (A, B) к её сумме и произведению обратим для неотрицательных чисел; оба порядка пары $\{2, 4\}$ учтены.

Ответ: -4 ; 8 .

Экзаменационный акцент: приём заменяет два последовательных квадратирования и резко уменьшает риск посторонних корней.

37. Задача 3 • Радикалы от взаимно обратных дробей**Условие**

Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} + \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{5}{2}.$$

Разбор

- Оба подкоренных выражения должны быть определены, а знаменатели - ненулевы. Поскольку дроби взаимно обратны, они должны быть положительны:

$$x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty).$$

- Введём

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} > 0.$$

- Второй радикал равен $\frac{1}{t}$. Получаем

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2},$$

- откуда, как в задаче 1,

$$t = 2 \quad \text{или} \quad t = \frac{1}{2}.$$

- Возводим уже не исходное уравнение, а положительную замену в квадрат:

$$\frac{x+1}{x-2} = 4 \Rightarrow x = 3,$$

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -2.$$

Контроль полноты

На ОДЗ оба радикала положительны и взаимно обратны, поэтому замена и обратный переход равносильны. Оба найденных числа входят в ОДЗ.

Ответ: -2 ; 3 .

Экзаменационный акцент: условие $t > 0$ - часть решения, а не формальная приписка.

38. Задача 4 • Параметр в рациональном уравнении

Условие

В зависимости от параметра a определите число корней уравнения

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = a.$$

Разбор

1. ОДЗ не зависит от параметра:

$$x \neq -1, \quad x \neq 1.$$

1. На ОДЗ приводим к одной дроби:

$$\frac{2x}{x^2 - 1} = a.$$

1. Особый случай $a = 0$ рассматриваем до деления на параметр:

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

- Получен один корень.

1. При $a \neq 0$ имеем квадратное уравнение

$$ax^2 - 2x - a = 0.$$

- Его дискриминант

$$D = 4 + 4a^2 > 0,$$

- поэтому корней два. Ни один из них не равен ± 1 : подстановка $x = 1$ даёт -2 , а подстановка $x = -1$ даёт 2 .

Контроль полноты

Случаи $a = 0$ и $a \neq 0$ покрывают все действительные параметры; запрещённые точки проверены отдельно.

Ответ: один корень при $a = 0$; два корня при $a \neq 0$.

Экзаменационный акцент: при исследовании параметра сначала рассматривают особые значения, а затем применяют формулу корней. Этот подход требуется в задании 18 профильного ЕГЭ.

39. Задача 5 • Число корней суммы радикалов

Условие

В зависимости от параметра a определите число решений уравнения

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{5-x} = a.$$

Разбор

ОДЗ:

$$-1 \leq x \leq 5.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{5-x}.$$

- Она симметрична относительно $x = 2$. На концах:

$$f(-1) = f(5) = \sqrt{6},$$

- а в центре

$$f(2) = 2\sqrt{3}.$$

Для внутренних точек

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}}.$$

- Поэтому f строго возрастает на $(-1, 2)$ и строго убывает на $(2, 5)$.

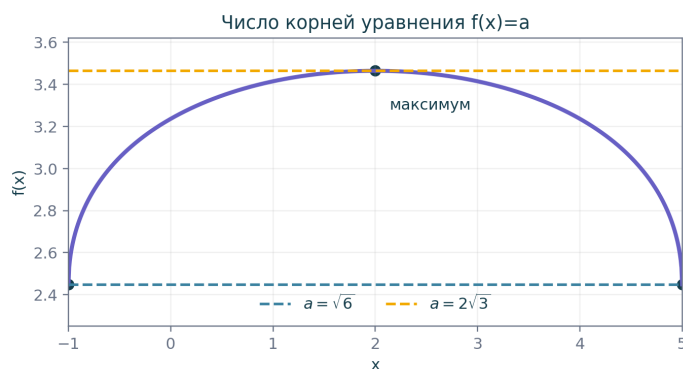


Рисунок 2. Две монотонные ветви дают полный подсчёт пересечений с горизонталью $y = a$.

Считываем число решений:

при $a < \sqrt{6}$ или $a > 2\sqrt{3}$ решений нет;

при $\sqrt{6} \leq a < 2\sqrt{3}$ решений два;

при $a = 2\sqrt{3}$ решение одно.

Контроль полноты

Точные значения получены на концах и в единственной точке максимума; строгая монотонность исключает дополнительные пересечения.

Экзаменационный акцент: рисунок организует случаи, но полноту доказывают ОДЗ, экстремум и монотонность.

40. Задача 6 • модель работы двух насосов

Условие

Первый насос заполняет резервуар на 5 часов быстрее второго. Насосы работали вместе 2 часа, после чего первый отключили, а второй за следующие 3 часа закончил заполнение. За сколько часов каждый насос заполняет резервуар в одиночку?

Разбор

Пусть первый насос заполняет резервуар за t часов. Тогда второму требуется $t + 5$ часов. Физическое ограничение:

$$t > 0.$$

За первые два часа выполнена доля

$$\frac{2}{t} + \frac{2}{t+5},$$

- а за следующие три часа второй насос выполнил ещё

$$\frac{3}{t+5}.$$

- Поэтому модель имеет вид

$$\frac{2}{t} + \frac{5}{t+5} = 1.$$

На области $t > 0$ умножаем на положительное $t(t+5)$:

$$2(t+5) + 5t = t(t+5),$$

$$t^2 - 2t - 10 = 0.$$

- Отсюда

$$t = 1 \pm \sqrt{11}.$$

Отрицательное значение не имеет физического смысла. Значит,

$$t = 1 + \sqrt{11}, \quad t + 5 = 6 + \sqrt{11}.$$

Контроль модели

Обе скорости положительны; первый насос действительно быстрее. Подстановка в исходное равенство долей даёт ровно единицу.

Ответ: первый - $1 + \sqrt{11}$ ч; второй - $6 + \sqrt{11}$ ч.

При решении текстовой задачи важно не только вычислить корни, но и обосновать модель, ограничения величин и смысл ответа.

41. Итог урока

ОДЗ фиксируется до алгебраических преобразований.

Деление на выражение и квадратирование требуют отдельного логического контроля.

Замена считается завершённой только после обратного перехода.

В параметрической задаче нужны особые значения, границы случаев и доказательство полноты.

В прикладной задаче ответ обязан удовлетворять смысловым ограничениям модели.

42. Биквадратное уравнение с параметром

Эталонный разбор 2 • Биквадратное уравнение с параметром

Условие

В зависимости от a определите число действительных корней уравнения $x^4 + (a - 5)x^2 + 4 = 0$.

Решение с обоснованием

Шаг 1. Положим $y = x^2 \geq 0$. Получаем $y^2 + (a - 5)y + 4 = 0$.

Шаг 2. Чтобы получить четыре корня x , уравнение по y должно иметь два различных положительных корня. Их произведение $4 > 0$, сумма $5 - a$ должна быть положительна, а дискриминант $D = (a - 5)^2 - 16 = (a - 1)(a - 9)$ - положителен.

Шаг 3. Совместно условия дают $a < 1$: тогда оба y положительны и различны, каждый даёт два корня x — всего четыре.

Шаг 4. При $a = 1$ имеется двойной положительный корень $y = 2$ и два корня x . При $a > 1$ положительных корней y нет: на $(1; 5)$ дискриминант отрицателен, а при $a \geq 5$ сумма корней неположительна.

Контроль полноты. Рассмотрены не только знак дискриминанта, но и ограничение $y \geq 0$, без которого классификация была бы неверной.

Ответ. 4 корня при $a < 1$; 2 корня при $a = 1$; 0 корней при $a > 1$.

Экзаменационный акцент. В оформлении отдельно фиксируйте переход $y = x^2 \geq 0$ и обратный подсчёт корней x .

43. Замена переменной и число корней уравнения

Степенная замена в уравнениях

Если в уравнении повторяются x^4 и x^2 , новая переменная вводится не формально: она должна отражать область значений исходного выражения. При $t = x^2$ обязательно $t \geq 0$.

Биквадратное уравнение

Задача. Решите $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Положим $t = x^2, t \geq 0$. Получаем $t^2 - 5t + 4 = 0$, то есть $(t - 1)(t - 4) = 0$.

Оба значения t допустимы. Возвращаясь к x , решаем $x^2 = 1$ и $x^2 = 4$:

$$x = -2, -1, 1, 2.$$

Почему нельзя остановиться на $t = 1$ и $t = 4$. Новая переменная не является исходной; каждый допустимый t нужно перевести обратно и получить все значения x .

Замена с корнем

Задача. Решите $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$. ОДЗ: $x \geq 0$. Положим $t = \sqrt{x}$, тогда $t \geq 0$ и $x = t^2$. Получаем $t^2 - 3t + 2 = 0$, откуда $t = 1$ или $t = 2$. Поэтому $x = 1$ или $x = 4$.

Проверка в исходном уравнении подтверждает оба корня. Ограничение $t \geq 0$ не исключило их, но в другой задаче могло бы убрать отрицательный корень вспомогательного квадратного уравнения.

Ещё два полных разбора с корнями

Сумма двух корней

Задача. Решите $\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x} = 4$. ОДЗ: $-3 \leq x \leq 7$. Переносить один корень и дважды возводить в квадрат можно, но сначала используем оценку.

Квадрат суммы равен $10 + 2\sqrt{(x+3)(7-x)}$. Чтобы сумма была равна 4, должно выполняться $\sqrt{(x+3)(7-x)} = 3$, то есть

$$(x+3)(7-x) = 9.$$

Раскрываем скобки: $-x^2 + 4x + 21 = 9$, или $x^2 - 4x - 12 = 0$. Кандидаты $x = 6$ и $x = -2$. Оба лежат на ОДЗ; проверка даёт $3 + 1 = 4$ и $1 + 3 = 4$. Ответ: -2 и 6 .

Параметр под корнем

Задача. Решите $\sqrt{x-a} = x-a$. Положим $t = x-a$. ОДЗ требует $t \geq 0$. Уравнение $\sqrt{t} = t$. Обе части неотрицательны, поэтому после возведения в квадрат получаем $t = t^2$, то есть $t = 0$ или $t = 1$.

$$x = a \quad \text{или} \quad x = a + 1.$$

Оба решения существуют при любом действительном a : соответствующие значения под корнем равны 0 и 1. Параметр не требует разбиения на случаи, потому что после замены полностью исчезает из условия на t .

Эталонный разбор 2 • Число корней радикального уравнения

Условие

В зависимости от a определите число решений уравнения $\sqrt{x+4} = x+a$.

Решение с обоснованием

Шаг 1. Введём $t = \sqrt{x+4} \geq 0$. Тогда $x = t^2 - 4$, и уравнение становится $t^2 - t + a - 4 = 0$ при дополнительном условии $t \geq 0$.

Шаг 2. Дискриминант равен $D = 17 - 4a$. При $a > \frac{17}{4}$ действительных t нет; при $a = \frac{17}{4}$ есть один положительный $t = \frac{1}{2}$.

Шаг 3. Если $4 \leq a < \frac{17}{4}$, оба корня $t = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{2}$ неотрицательны, поэтому решений x два. При $a < 4$ меньший корень t отрицателен, а больший положителен — решение одно.

Шаг 4. При $a = 4$ корни $t = 0$ и $t = 1$ оба допустимы, поэтому это значение относится к двухкорневому случаю.

Контроль полноты. Ограничение $t \geq 0$ проверено для каждого диапазона параметра, включая границы $a = 4$ и $a = \frac{17}{4}$.

Ответ. 1 решение при $a < 4$; 2 при $4 \leq a < \frac{17}{4}$; 1 при $a = \frac{17}{4}$; 0 при $a > \frac{17}{4}$.

Экзаменационный акцент. Одного дискриминанта недостаточно: отрицательный корень по t не соответствует исходной задаче.

44. Задачи повышенной сложности с подробным решением**Разбор 1**

Для каждого действительного a определите число различных корней уравнения $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = a$.

Шаг 1. Положим $t = x^2 \geq 0$. Получаем $t^2 - 5t + 4 = a$. Дискриминант квадратного уравнения по t равен $9 + 4a$.

Шаг 2. При $a < -\frac{9}{4}$ действительных t нет. При $a = -\frac{9}{4}$ имеется одно положительное $t = \frac{5}{2}$, которому отвечают два значения x .

Шаг 3. При $a > -\frac{9}{4}$ есть два различных корня t . Их сумма равна 5, произведение $4 - a$. При $-\frac{9}{4} < a < 4$ оба корня положительны, поэтому значений x четыре.

Шаг 4. При $a = 4$ корни t равны 0 и 5: получаем три значения x . При $a > 4$ один корень t положителен, другой отрицателен, поэтому остаются два значения x .

Проверка полноты. Условие $t \geq 0$ разобрано отдельно, а для каждого допустимого t учтено точное число прообразов: два при $t > 0$ и один при $t = 0$.

Ответ. 0 корней при $a < -\frac{9}{4}$; 2 при $a = -\frac{9}{4}$; 4 при $-\frac{9}{4} < a < 4$; 3 при $a = 4$; 2 при $a > 4$.

Разбор 2

Найдите все a , при которых уравнение $\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}$ имеет ровно один действительный корень.

Шаг 1. Знаменатель $x^2 + 1$ положителен, поэтому умножение равносильно.

Шаг 2. Получаем $x^2 + 2ax + 1 = 0$.

Шаг 3. Квадратное уравнение имеет ровно один действительный корень при нулевом дискриминанте: $4a^2 - 4 = 0$.

Шаг 4. Отсюда $a = -1$ или $a = 1$. При этих значениях уравнение превращается соответственно в $(x - 1)^2 = 0$ и $(x + 1)^2 = 0$.

Проверка полноты. Знаменатель не создаёт запрещённых значений, а критерий $D = 0$ является необходимым и достаточным.

Ответ. $a = -1$ или $a = 1$.

Разбор 3

Для каждого действительного a определите число различных действительных корней уравнения $x^4 + (a - 3)x^2 + a = 0$.

Шаг 1. Положим $t = x^2 \geq 0$. Получаем $t^2 + (a - 3)t + a = 0$. Дискриминант равен $(a - 1)(a - 9)$, сумма корней $3 - a$, произведение a .

Шаг 2. При $a < 0$ корни t имеют разные знаки, поэтому один положительный t даёт два корня x .

Шаг 3. При $a = 0$ корни t равны 0 и 3, поэтому корней x три. При $0 < a < 1$ оба t положительны и различны, поэтому корней четыре.

Шаг 4. При $a = 1$ имеется двойной положительный корень $t = 1$, поэтому корней x два. При $a > 1$ допустимых неотрицательных t нет: для $1 < a < 9$ дискриминант отрицателен, а при $a \geq 9$ оба корня неположительны; при $a = 9$ они равны -3 .

Проверка полноты. Все критические значения параметра 0, 1, 9 получены из произведения, дискриминанта и условия $t \geq 0$; каждый случай разобран.

Ответ. 2 корня при $a < 0$; 3 при $a = 0$; 4 при $0 < a < 1$; 2 при $a = 1$; 0 при $a > 1$.

Разбор 4

Решите уравнение $\sqrt{x + 2} = x$.

1. Правая часть должна быть неотрицательной, поэтому $x \geq 0$.

2. На этой области возведение в квадрат равносильно: $x + 2 = x^2$.

3. Получаем $x^2 - x - 2 = 0$.

4. Корни квадратного уравнения: $x = 2$ и $x = -1$.

5. Условие $x \geq 0$ оставляет только $x = 2$; подстановка даёт $\sqrt{4} = 2$.

Ответ. 2

Разбор 5

Решите уравнение $\sqrt{x+6} = x$.

1. Правая часть должна быть неотрицательной, поэтому $x \geq 0$.
2. На этой области возведение в квадрат равносильно: $x+6 = x^2$.
3. Получаем $x^2 - x - 6 = 0$.
4. Корни квадратного уравнения: $x = 3$ и $x = -2$.
5. Условие $x \geq 0$ оставляет только $x = 3$; подстановка даёт $\sqrt{9} = 3$.

Ответ. 3

Разбор 6

Решите уравнение $\sqrt{x+12} = x$.

1. Правая часть должна быть неотрицательной, поэтому $x \geq 0$.
2. На этой области возведение в квадрат равносильно: $x+12 = x^2$.
3. Получаем $x^2 - x - 12 = 0$.
4. Корни квадратного уравнения: $x = 4$ и $x = -3$.
5. Условие $x \geq 0$ оставляет только $x = 4$; подстановка даёт $\sqrt{16} = 4$.

Ответ. 4

Разбор 7

Для каждого действительного a определите число корней уравнения $\sqrt{x+3} = x+a$.

Шаг 1. Положим $y = \sqrt{x+3} \geq 0$. Тогда $x = y^2 - 3$, а уравнение принимает вид $y^2 - y + a - 3 = 0$.

Шаг 2. Дискриминант равен $13 - 4a$, сумма корней y равна 1, произведение $a - 3$.

Шаг 3. При $a < 3$ корни y разных знаков, поэтому допустим один корень. При $a = 3$ корни $y = 0$ и $y = 1$, поэтому допустимы два.

Шаг 4. При $3 < a < \frac{13}{4}$ оба корня положительны и различны — два решения. При $a = \frac{13}{4}$ получаем один двойной положительный корень. При $a > \frac{13}{4}$ действительных y нет.

Проверка полноты. Замена взаимно однозначна между $x \geq -3$ и $y \geq 0$; знак каждого корня y определён по сумме и произведению.

Ответ. 1 корень при $a < 3$; 2 при $3 \leq a < \frac{13}{4}$; 1 при $a = \frac{13}{4}$; 0 при $a > \frac{13}{4}$.

Разбор 8

Решите уравнение $\sqrt{x-a} + \sqrt{a+2-x} = 2$ для каждого действительного a .

Шаг 1. ОДЗ: $a \leq x \leq a+2$. Положим $u = x - a$, тогда $0 \leq u \leq 2$, а уравнение становится $\sqrt{u} + \sqrt{2-u} = 2$.

Шаг 2. После возведения в квадрат получаем $2 + 2\sqrt{u(2-u)} = 4$, то есть $u(2-u) = 1$.

Шаг 3. Следовательно, $u^2 - 2u + 1 = 0$, откуда $u = 1$.

Шаг 4. Возвращаемся к x : $x = a + 1$. Это значение лежит внутри ОДЗ при любом a .

Проверка. $\sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$; квадратирование выполнялось для неотрицательных частей и не создало постороннего знака.

Ответ. При любом a единственное решение $x = a + 1$.

Разбор 9

Для каждого действительного a определите число корней уравнения

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{5-x} = a.$$

Шаг 1. ОДЗ: $-1 \leq x \leq 5$. Функция симметрична относительно $x = 2$.

Шаг 2. На концах отрезка её значение равно $\sqrt{6}$. По неравенству Коши сумма не превосходит $\sqrt{2 \cdot 6} = 2\sqrt{3}$; равенство достигается при $x+1 = 5-x$, то есть $x = 2$.

Шаг 3. На $[-1; 2]$ функция строго возрастает, а на $[2; 5]$ строго убывает. Поэтому уровень между краевым и максимальным значениями пересекает график дважды.

Шаг 4. Получаем: ниже $\sqrt{6}$ и выше $2\sqrt{3}$ решений нет; при $a = 2\sqrt{3}$ решение одно; при $\sqrt{6} \leq a < 2\sqrt{3}$ решений два.

Проверка полноты. Установлены непрерывность, симметрия и строгая монотонность на двух ветвях, поэтому дополнительных пересечений нет.

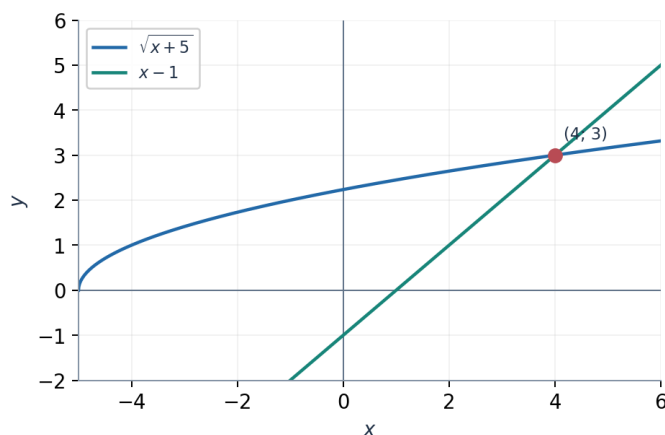
Ответ. 0 решений при $a < \sqrt{6}$ или $a > 2\sqrt{3}$; 2 при $\sqrt{6} \leq a < 2\sqrt{3}$; 1 при $a = 2\sqrt{3}$.

45. Рисунок как проверка, равносильность как доказательство

В уравнении $\sqrt{x+5} = x-1$ рисунок показывает одно пересечение. Для строгого решения сначала фиксируем $x \geq 1$, затем возводим в квадрат и выбираем допустимый корень 4. Кандидат -1 удовлетворяет уравнению квадратов, но не исходному равенству.

В параметрическом уравнении $\sqrt{x+4} = |x-a|$ ситуация другая: на ОДЗ обе части неотрицательны. После квадратирования $x+4 = (x-a)^2$ каждый найденный действительный корень автоматически удовлетворяет $x \geq -4$. Поэтому дискриминант $4a+17$ действительно определяет число решений: 0, 1 или 2.

Для преподавателя. Каждый раз задайте два вопроса: «Одинаковые ли знаки у частей перед квадратированием?» и «Все ли корни нового уравнения разрешены исходной записью?» Ответы должны быть написаны, даже если график очевиден.



Учитываем знак правой части: отрицательный кандидат -1 не является пересечением.