



Урок 20. Тестовые задания (40 вопросов): ответы и решения

40 заданий: 36 по теме «Планиметрия первой части» и 4 на повторение. Задания 1-20: начальный уровень, 21-35: средний, 36-40: повышенный уровень. Решения открываются отдельно под каждым заданием.

01. Начальный уровень: задания 1-20

Задание 1

Прямые AC и BD пересекаются в точке O. Угол AOB равен 47° . Найдите угол COD.

Урок 20 • задание 1

РАБОЧАЯ СХЕМА

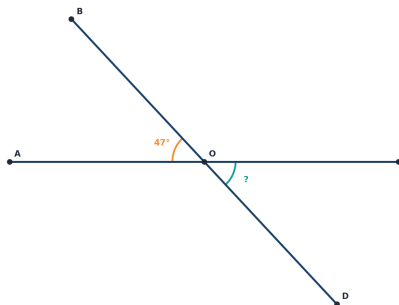


Схема не в масштабе

ГОДОВЫЕ • МАТЕМАТИКА ЕГЭ 9-11

Figure 1: Задание 1

1. Углы AOB и COD расположены напротив друг друга при пересечении двух прямых, значит, они вертикальные.
2. Вертикальные углы равны, поэтому $\angle COD = \angle AOB = 47^\circ$.

Ответ: 47°

Задание 2

Точки A, O и C лежат на одной прямой. Луч OB делит развёрнутый угол AOC на углы $AOB = 3x + 10^\circ$ и $BOC = 5x - 6^\circ$. Найдите x и оба угла.

1. Углы AOB и BOC смежные, поэтому их сумма равна 180° .
2. Составим уравнение: $(3x + 10) + (5x - 6) = 180$.
3. $8x + 4 = 180$, откуда $8x = 176$ и $x = 22$.
4. $\angle AOB = 3 \cdot 22 + 10 = 76^\circ$, $\angle BOC = 5 \cdot 22 - 6 = 104^\circ$.

5. Проверка: $76^\circ + 104^\circ = 180^\circ$.

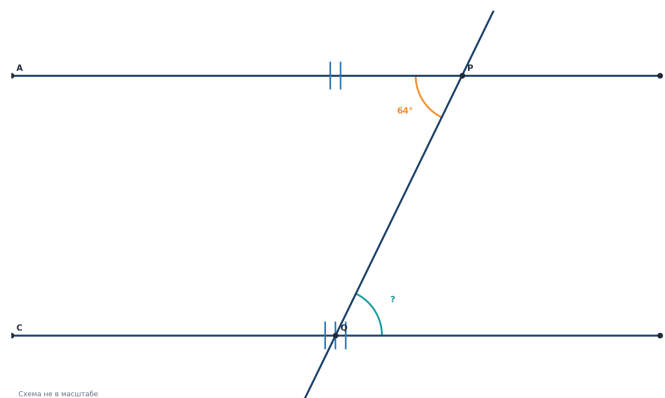
Ответ: $x = 22$; $\angle AOB = 76^\circ$; $\angle BOC = 104^\circ$

Задание 3

Параллельные прямые AB и CD пересечены секущей PQ. Угол APQ равен 64° . Найдите угол PQD.

Урок 20 • задание 3

РАБОЧАЯ СХЕМА



ГОДОГРАФ • МАТЕМАТИКА ЕГЭ 9-10

Figure 2: Задание 3

1. Углы APQ и PQD лежат между параллельными прямыми по разные стороны секущей.
2. Это накрест лежащие углы, поэтому они равны.
3. Следовательно, $\angle PQD = 64^\circ$.

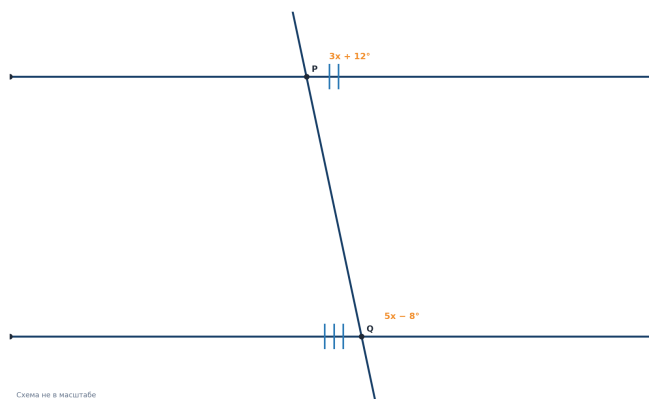
Ответ: 64°

Задание 4

Две параллельные прямые пересечены секущей. Внутренние односторонние углы равны $3x + 12^\circ$ и $5x - 8^\circ$. Найдите x и меньший угол.

Урок 20 • задание 4

РАБОЧАЯ СХЕМА



ГОДОГРАФ • МАТЕМАТИКА ЕГЭ 9-10

Figure 3: Задание 4

1. Сумма внутренних односторонних углов при параллельных прямых равна 180° .

2. $(3x + 12) + (5x - 8) = 180$, поэтому $8x + 4 = 180$.
 3. $8x = 176$, значит $x = 22$.
 4. Углы равны $3 \cdot 22 + 12 = 78^\circ$ и $5 \cdot 22 - 8 = 102^\circ$; меньший угол равен 78° .
- Ответ:** $x = 22$; 78°

Задание 5

Углы треугольника относятся как $2 : 3 : 4$. Найдите наибольший угол.

1. Обозначим углы $2x$, $3x$ и $4x$.
 2. Их сумма равна 180° : $2x + 3x + 4x = 180^\circ$.
 3. $9x = 180^\circ$, поэтому $x = 20^\circ$.
 4. Углы равны 40° , 60° и 80° ; наибольший угол равен 80° .
- Ответ:** 80°

Задание 6

Сторона AC треугольника ABC продолжена за точку C до точки D. Внешний угол BCD равен 124° , а угол BAC равен 49° . Найдите угол ABC.

1. Внешний угол BCD равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним: $\angle BAC + \angle ABC$.
2. Поэтому $124^\circ = 49^\circ + \angle ABC$.
3. $\angle ABC = 124^\circ - 49^\circ = 75^\circ$.
4. Проверка: внутренний угол C равен $180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$, а $49^\circ + 75^\circ + 56^\circ = 180^\circ$.

Ответ: 75°

Задание 7

В треугольниках ABC и DEF известно, что $AB = DE$, $AC = DF$ и $\angle BAC = \angle EDF$. Сторона BC равна 11. Найдите EF.

1. Даны две пары равных сторон и равные углы между ними.
2. Треугольники ABC и DEF равны по первому признаку - по двум сторонам и углу между ними.
3. Стороне BC соответствует сторона EF, поэтому $EF = BC = 11$.

Ответ: 11

Задание 8

В равнобедренном треугольнике ABC стороны AB и AC равны. Угол A равен 38° . Найдите угол B.

1. Равные стороны AB и AC сходятся в вершине A, значит, основание - BC, а углы B и C равны.
2. Сумма углов B и C равна $180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$.
3. Каждый из равных углов равен $\frac{142^\circ}{2} = 71^\circ$.

Ответ: 71°

Задание 9

В равнобедренном треугольнике ABC стороны AB и AC равны. Основание BC продолжено за точку B до D. Внешний угол ABD равен 112° . Найдите угол A.

1. Углы ABD и ABC смежные, поэтому $\angle ABC = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$.
2. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны: $\angle B = \angle C = 68^\circ$.

3. $\angle A = 180^\circ - 68^\circ - 68^\circ = 44^\circ$.

Ответ: 44°

Задание 10

В прямоугольном треугольнике катет равен 6, гипотенуза равна 10. Найдите второй катет.

1. Обозначим неизвестный катет x . По теореме Пифагора $x^2 + 6^2 = 10^2$.

2. $x^2 = 100 - 36 = 64$.

3. Длина положительна, поэтому $x = 8$.

Ответ: 8

Задание 11

В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 90° , угол B равен 30° , гипотенуза BC равна 18. Найдите катет AC.

1. Катет AC лежит напротив угла $B = 30^\circ$.

2. В прямоугольном треугольнике катет напротив 30° равен половине гипотенузы.

3. $AC = \frac{BC}{2} = \frac{18}{2} = 9$.

Ответ: 9

Задание 12

В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 90° , гипотенуза BC равна 26. Точка M - середина BC. Найдите медиану AM.

1. Отрезок AM соединяет вершину прямого угла с серединой гипотенузы, значит, это медиана к гипотенузе.

2. Медиана к гипотенузе равна половине гипотенузы.

3. $AM = \frac{BC}{2} = \frac{26}{2} = 13$.

Ответ: 13

Задание 13

В треугольнике ABC отрезок AM - медиана. Известно, что $BM = 7$. Найдите сторону BC.

1. По определению медианы точка M является серединой стороны BC, поэтому $BM = MC$.

2. $MC = 7$, следовательно, $BC = BM + MC = 7 + 7 = 14$.

Ответ: 14

Задание 14

В треугольнике ABC биссектриса AD пересекает сторону BC в точке D. $AB = 10$, $AC = 15$, $BD = 6$. Найдите DC.

1. По теореме о биссектрисе $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

2. Подставим данные: $\frac{6}{DC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

3. Из пропорции $2 \cdot DC = 18$, поэтому $DC = 9$.

4. Проверка: более длинной стороне $AC = 15$ соответствует более длинный отрезок $DC = 9$.

Ответ: 9

Задание 15

В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны AB и AC равны 13, основание BC равно 24. Найдите высоту AH, проведённую к основанию.

1. Высота к основанию равнобедренного треугольника является медианой, поэтому $BH = \frac{24}{2} = 12$.

2. В прямоугольном треугольнике ABH: $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$.

3. $AH = 5$, так как длина положительна.

Ответ: 5

Задание 16

Основание BC треугольника ABC равно 14, а высота AH к этому основанию равна 9. Найдите площадь.

1. Используем формулу площади треугольника $S = \frac{BC \cdot AH}{2}$.

2. $S = \frac{14 \cdot 9}{2} = 7 \cdot 9 = 63$.

Ответ: 63

Задание 17

Повторение: прогрессии

В арифметической прогрессии $a_1 = 7$ и $d = 3$. Найдите двенадцатый член a_{12} .

1. Используем формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

2. $a_{12} = 7 + (12 - 1) \cdot 3 = 7 + 33 = 40$.

Ответ: 40

Задание 18

Повторение: вероятность

В непрозрачной коробке лежат 5 белых и 3 чёрных шара. Случайно вынимают один шар. Найдите вероятность того, что он белый.

1. Всего равновозможных исходов $5 + 3 = 8$.

2. Благоприятных исходов 5 - по числу белых шаров.

3. Вероятность $P = \frac{5}{8}$.

Ответ: $\frac{5}{8}$

Задание 19

Диагонали ромба равны 10 и 24. Найдите его площадь.

1. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей.

2. $S = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120$.

Ответ: 120

Задание 20

Основания трапеции равны 11 и 19. Найдите длину её средней линии.

1. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований.

$$2. m = \frac{(11 + 19)}{2} = \frac{30}{2} = 15 .$$

Ответ: 15

02. Средний уровень: задания 21-35

Задание 21

Две стороны треугольника равны 8 и 7, а угол между ними равен 30° . Найдите площадь треугольника.

1. Для двух сторон и угла между ними используем $S = \frac{ab \cdot \sin \gamma}{2}$.

$$2. \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \text{ поэтому } S = \frac{8 \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{56}{4} = 14 .$$

Ответ: 14

Задание 22

В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 13, один катет равен 5. Найдите площадь треугольника.

1. По теореме Пифагора квадрат второго катета равен $13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$.

2. Второй катет равен $\sqrt{144} = 12$.

3. Площадь прямоугольного треугольника $S = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$.

Ответ: 30

Задание 23

Треугольники ABC и DEF подобны; A соответствует D, B - E, C - F. $AB = 12$, $DE = 20$, $BC = 9$. Найдите EF.

1. Коэффициент большого треугольника к малому равен $\frac{DE}{AB} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$.

2. Стороне BC соответствует EF, поэтому $EF = \frac{BC \cdot 5}{3} = \frac{9 \cdot 5}{3} = 15$.

3. Проверка: EF больше BC, так как большой треугольник имеет коэффициент $\frac{5}{3} > 1$.

Ответ: 15

Задание 24

В треугольнике ABC точки D и E лежат на сторонах AB и AC, причём $DE \parallel BC$. $AD = 4$, $AB = 10$, $BC = 15$. Найдите DE.

1. Из $DE \parallel BC$ следует подобие треугольников ADE и ABC.

2. Коэффициент малого треугольника к большому равен $\frac{AD}{AB} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

3. DE соответствует BC, поэтому $\frac{DE}{15} = \frac{2}{5}$.

4. $DE = 15 \cdot \frac{2}{5} = 6$.

Ответ: 6

Задание 25

Вертикальный шест высотой 1,5 м отбрасывает тень длиной 2 м. В тот же момент тень дерева равна 12 м. Найдите высоту дерева.

1. Шест и дерево вертикальны, земля горизонтальна, а солнечные лучи параллельны, поэтому два прямоугольных треугольника подобны.

2. Отношение высоты к тени одинаково: $\frac{1,5}{2} = \frac{h}{12}$.

3. $h = \frac{12 \cdot 1,5}{2} = 6 \cdot 1,5 = 9$ м.

Ответ: 9 м

Задание 26

Диагональ прямоугольника равна 17, одна из его сторон равна 8. Найдите периметр прямоугольника.

1. Диагональ и две стороны прямоугольника образуют прямоугольный треугольник.

2. Пусть вторая сторона равна x . Тогда $x^2 + 8^2 = 17^2$.

3. $x^2 = 289 - 64 = 225$, поэтому $x = 15$.

4. Периметр $P = 2(8 + 15) = 46$.

Ответ: 46

Задание 27

В параллелограмме ABCD угол A равен 68° . Найдите угол B.

1. Соседние углы параллелограмма являются односторонними при параллельных сторонах и в сумме дают 180° .

2. $\angle B = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$.

Ответ: 112°

Задание 28

Основания трапеции равны 8 и 14, высота равна 6. Найдите площадь.

1. Площадь трапеции равна полусумме оснований, умноженной на высоту.

2. $S = \frac{(8 + 14) \cdot 6}{2} = 22 \cdot 3 = 66$.

Ответ: 66

Задание 29

Меньшая дуга AB окружности равна 146° . O - центр окружности. Найдите угол AOB.

1. Угол AOB является центральным и опирается на меньшую дугу AB.

2. Градусная мера центрального угла равна градусной мере его дуги.

3. Следовательно, $\angle AOB = 146^\circ$.

Ответ: 146°

Задание 30

Точки А, В и С лежат на окружности. Вписанный угол ACB опирается на меньшую дугу АВ, градусная мера которой равна 136° . Найдите угол ACB.

1. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

2. $\angle ACB = \frac{136^\circ}{2} = 68^\circ$.

Ответ: 68°

Задание 31

Из точки Р к окружности с центром О проведена касательная РТ, Т - точка касания. $OP = 10$, радиус окружности равен 6. Найдите РТ.

1. Радиус ОТ перпендикулярен касательной РТ, поэтому треугольник ОРТ прямоугольный с гипотенузой ОР.

2. По теореме Пифагора $PT^2 = OP^2 - OT^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$.

3. $PT = 8$.

Ответ: 8

Задание 32

Хорды АВ и CD пересекаются внутри окружности в точке Е. $AE = 3$, $EB = 8$, $CE = 4$. Найдите ED.

1. Для пересекающихся хорд произведения частей равны: $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

2. $3 \cdot 8 = 4 \cdot ED$.

3. $24 = 4 \cdot ED$, поэтому $ED = 6$.

Ответ: 6

Задание 33

Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол А равен 72° . Найдите угол С.

1. Вписанный четырёхугольник имеет сумму противоположных углов 180° .

2. Углы А и С противоположные, поэтому $\angle C = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Ответ: 108°

Задание 34

Повторение: экстремумы функции

Для функции $f(x) = x^2 - 6x + 5$ найдите точку минимума и наименьшее значение функции.

1. Найдём производную: $f'(x) = 2x - 6$.

2. Критическая точка: $2x - 6 = 0$, откуда $x = 3$.

3. Производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому $x = 3$ - точка минимума.

4. $f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$.

Ответ: $x = 3$; $f_{\min} = -4$

Задание 35

Повторение: векторы

Даны точки $A(-2; 1)$ и $B(4; 5)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину.

1. Из координат конца вычитаем координаты начала в порядке $B - A$: $\overrightarrow{AB} = (4 - (-2); 5 - 1) = (6; 4)$.

2. Длина вектора $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Ответ: $\overrightarrow{AB} = (6; 4)$; $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{13}$

03. Повышенный уровень: задания 36-40

Задание 36

В параллелограмме ABCD сторона AB равна 13, высота к AB равна 8, а сторона AD равна 10. Найдите площадь и высоту к стороне AD.

1. Площадь через сторону AB и высоту к ней: $S = 13 \cdot 8 = 104$.

2. Та же площадь через сторону AD: $S = AD \cdot h_{AD}$.

3. $104 = 10 \cdot h_{AD}$, поэтому $h_{AD} = 10,4$.

Ответ: $S = 104$; $h_{AD} = 10,4$

Задание 37

Площади двух подобных треугольников относятся как 25 : 49 . Периметр большего треугольника равен 84. Найдите периметр меньшего.

1. Отношение площадей равно квадрату отношения соответствующих длин.

2. Коэффициент длин малого треугольника к большому равен $\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$.

3. Периметры относятся так же, как длины: $\frac{P_{\text{мал}}}{P_{\text{бол}}} = \frac{5}{7}$.

4. $P_{\text{мал}} = 84 \cdot \frac{5}{7} = 12 \cdot 5 = 60$.

Ответ: 60

Задание 38

Диагонали ромба равны 16 и 30. Найдите его периметр.

1. Диагонали ромба перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам.

2. Половины диагоналей равны 8 и 15 и являются катетами прямоугольного треугольника со стороной ромба в качестве гипотенузы.

3. $a = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$.

4. Периметр ромба $P = 4a = 4 \cdot 17 = 68$.

Ответ: 68

Задание 39

Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 20, а боковая сторона равна 10. Найдите высоту и площадь трапеции.

1. После проведения высот крайние отрезки на большем основании равны половине разности оснований.

2. Горизонтальный катет равен $\frac{(20 - 8)}{2} = 6$.

3. В прямоугольном треугольнике высота $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$.

4. Площадь $S = \frac{(20 + 8) \cdot 8}{2} = 28 \cdot 4 = 112$.

Ответ: $h = 8$; $S = 112$

Задание 40

Из точки Р вне окружности проведены касательная РТ и секущая РАВ; точка А лежит между Р и В. $PT = 6$, $PA = 4$. Найдите внутренний отрезок АВ.

1. Для касательной и секущей $PT^2 = PA \cdot PB$, где РВ - вся секущая от Р до дальней точки В.

2. $6^2 = 4 \cdot PB$, поэтому $PB = \frac{36}{4} = 9$.

3. Внутренний отрезок $AB = PB - PA = 9 - 4 = 5$.

4. Проверка: $4 \cdot (4 + 5) = 36 = 6^2$.

Ответ: 5