



Алгебраические выражения

Задания, решения и ответы

40 заданий с пошаговыми решениями и ответами. Сначала выполните задание самостоятельно, затем сравните ход рассуждений с разбором.

01. Основные приёмы

Задание 1

Раскройте скобки и приведите подобные:

$$(2x + 3)^2.$$

Шаг 1. Используем доказанное тождество $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ с учётом знака второго слагаемого.

Шаг 2. Здесь $u = 2x$, $v = 3$, поэтому $u^2 = 4x^2$, $2uv = 12x$, $v^2 = 9$.

Шаг 3. Получаем $4x^2 + 12x + 9$.

Ответ. $4x^2 + 12x + 9$

Задание 2

Упростите $(3x - 2)^2 - (3x + 2)^2$.

Шаг 1. Используем разность квадратов: $[(3x - 2) - (3x + 2)][(3x - 2) + (3x + 2)]$.

Шаг 2. Получаем $(-4) \cdot 6x = -24x$.

Ответ. $-24x$.

Задание 3

Раскройте скобки и приведите подобные:

$$(4x + 1)^2.$$

Шаг 1. Используем доказанное тождество $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ с учётом знака второго слагаемого.

Шаг 2. Здесь $u = 4x$, $v = 1$, поэтому $u^2 = 16x^2$, $2uv = 8x$, $v^2 = 1$.

Шаг 3. Получаем $16x^2 + 8x + 1$.

Ответ. $16x^2 + 8x + 1$

Задание 4

Упростите $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$.

Дважды применяем разность квадратов: $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$, затем $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1$.

Ответ. $x^4 - 1$.

Задание 5

Разложите на множители: $9x^2 - 25$.

Шаг 1. Распознаём разность квадратов: $9x^2 = (3x)^2$, $25 = 5^2$.

Шаг 2. Применяем формулу $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$.

Шаг 3. Получаем $(3x - 5)(3x + 5)$.

Ответ. $(3x - 5)(3x + 5)$

Задание 6

Разложите на множители $x^3 - 4x^2 - x + 4$.

Шаг 1. Группируем: $x^2(x - 4) - (x - 4)$.

Шаг 2. Выносим общий двучлен: $(x - 4)(x^2 - 1) = (x - 4)(x - 1)(x + 1)$.

Ответ. $(x - 4)(x - 1)(x + 1)$.

Задание 7

Разложите на множители: $4x^2 - 81$.

Шаг 1. Распознаём разность квадратов: $4x^2 = (2x)^2$, $81 = 9^2$.

Шаг 2. Применяем формулу $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$.

Шаг 3. Получаем $(2x - 9)(2x + 9)$.

Ответ. $(2x - 9)(2x + 9)$

Задание 8

Разложите на множители над целыми числами $x^4 + 4$.

Добавим и вычтем $4x^2$: $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$. По разности квадратов получаем $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

Ответ. $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

Задание 9

Упростите выражение и укажите исходную ОДЗ:

$$\frac{(3x + 2)^2 - (3x - 2)^2}{4x}.$$

Шаг 1. Знаменатель исходного выражения не равен нулю, поэтому $x \neq 0$.

Шаг 2. Используем разность квадратов: $(A + B)^2 - (A - B)^2 = 4AB$.

Шаг 3. Числитель равен $4 \cdot (3x) \cdot (2) = 24x$, после сокращения получаем 6 при сохранённом $x \neq 0$.

Ответ. 6 при $x \neq 0$

Задание 10

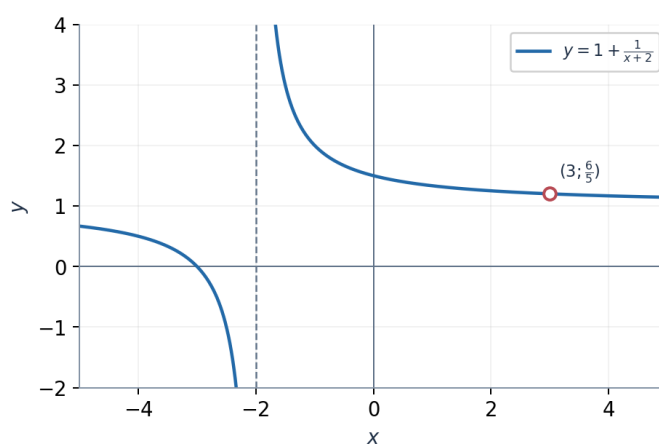
Упростите $\frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$, укажите ОДЗ и объясните, совпадает ли график исходной дроби с графиком упрощённой функции.

Шаг 1. Знаменатель $(x - 3)(x + 2)$, поэтому $x \neq 3, -2$.

Шаг 2. Сокращаем $x - 3$ на ОДЗ: $\frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{x + 3}{x + 2} = 1 + \frac{1}{x + 2}$.

Шаг 3. Упрощённая дробь определена при $x = 3$, исходная — нет. Поэтому на графике исходной функции выколота точка $\left(3; \frac{6}{5}\right)$; прямая $x = -2$ остаётся вертикальной асимптотой.

Ответ. $\frac{x + 3}{x + 2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$; графики отличаются одной точкой.



После сокращения сохраняются ограничения: $x \neq -2$ и $x \neq 3$.

02. Применение и сочетание приёмов**Задание 11**

Упростите выражение и укажите исходную ОДЗ:

$$\frac{(2x + 4)^2 - (2x - 4)^2}{4x}.$$

Шаг 1. Знаменатель исходного выражения не равен нулю, поэтому $x \neq 0$.

Шаг 2. Используем разность квадратов: $(A + B)^2 - (A - B)^2 = 4AB$.

Шаг 3. Числитель равен $4 \cdot (2x) \cdot (4) = 32x$, после сокращения получаем 8 при сохранённом $x \neq 0$.

Ответ. 8 при $x \neq 0$

Задание 12

Упростите $\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) : \frac{2}{x^2-1}$ и укажите ОДЗ.

Шаг 1. ОДЗ: $x \neq \pm 1$; делитель $\frac{2}{x^2-1}$ на ОДЗ не равен нулю.

Шаг 2. Разность в скобках равна $\frac{(x+1) - (x-1)}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}$. Частное одинаковых ненулевых выражений равно 1.

Ответ. 1, $x \neq \pm 1$.

Задание 13

Известно, что $a + b = 7$ и $ab = 3$. Найдите $a^2 + b^2$.

Шаг 1. Из квадрата суммы следует $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Шаг 2. Отсюда $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$.

Шаг 3. Подставляем данные: $7^2 - 2 \cdot 3 = 43$.

Ответ. 43

Задание 14

Известно $a + b = 5$ и $a^2 + b^2 = 13$. Найдите ab и $a^3 + b^3$.

Шаг 1. $25 = 13 + 2ab$, откуда $ab = 6$.

Шаг 2. $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 125 - 90 = 35$.

Ответ. $ab = 6$; $a^3 + b^3 = 35$.

Задание 15

Известно, что $a + b = 13$ и $ab = 8$. Найдите $a^2 + b^2$.

Шаг 1. Из квадрата суммы следует $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Шаг 2. Отсюда $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$.

Шаг 3. Подставляем данные: $13^2 - 2 \cdot 8 = 153$.

Ответ. 153

Задание 16

При $x \neq 0$ дано $x - \frac{1}{x} = 2$. Найдите $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Возводим в квадрат: $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 4$. Поэтому искомая сумма равна 6. Искать само x не требуется.

Ответ. 6.

Задание 17

Раскройте скобки, не выполняя последовательное умножение трёх двучленов:

$$(2x + 1)^3.$$

Шаг 1. Применяем формулу $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$.

Шаг 2. Берём $u = 2x$, $v = 1$ и сохраняем знак v во всех нечётных степенях.

Шаг 3. Коэффициенты четырёх членов равны 8, 12, 6, 1.

Шаг 4. Степени x последовательно равны 3, 2, 1, 0.

Шаг 5. Получаем $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$.

Ответ. $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

Задание 18

Упростите $(x + y)^3 + (x - y)^3$.

Запишем два куба: $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ и $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$. После сложения остаётся $2x^3 + 6xy^2$.

Ответ. $2x^3 + 6xy^2$.

03. Повторение пройденного**Задание 19**

Повторение. Вычислите $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) : \frac{7}{12}$.

Общий знаменатель равен 12: $\frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$. Частное равно 1.

Ответ. 1.

Задание 20

Повторение. Число увеличили на 20%, затем результат уменьшили на 20%. Как изменилось исходное число?

Последовательные изменения дают множитель $1,2 \cdot 0,8 = 0,96$. Осталось 96% исходного числа.

Ответ. Уменьшилось на 4%.

04. Многошаговые задачи

Задание 21

Найдите коэффициент при x^3 в разложении $(1 + 2x)^7$, не раскрывая все скобки.

Шаг 1. По биному Ньютона общий член имеет вид $C_7^j \cdot (1)^{7-j}(2x)^j$.

Шаг 2. Степень x^3 возникает только при $j = 3$.

Шаг 3. Коэффициент равен $C_7^3 \cdot 2^3$.

Шаг 4. $C_7^3 = 35$.

Шаг 5. Искомый коэффициент равен 280.

Ответ. 280

Задание 22

Найдите коэффициент при x^4 в $(1 + 2x - x^2)^3$.

Степень 4 получается двумя способами: выбрать $(-x^2)$ дважды и 1 один раз, либо $(-x^2)$ один раз и $2x$ дважды. В первом случае 3 перестановки и вклад 3; во втором 3 перестановки и вклад $3 \cdot (-1) \cdot 2^2 = -12$. Других сочетаний трёх степеней из $\{0, 1, 2\}$ с суммой 4 нет.

Ответ. -9.

Задание 23

Найдите коэффициент при x^4 в разложении $(1 + 3x)^9$, не раскрывая все скобки.

Шаг 1. По биному Ньютона общий член имеет вид $C_9^j \cdot (1)^{9-j}(3x)^j$.

Шаг 2. Степень x^4 возникает только при $j = 4$.

Шаг 3. Коэффициент равен $C_9^4 \cdot 3^4$.

Шаг 4. $C_9^4 = 126$.

Шаг 5. Искомый коэффициент равен 10206.

Ответ. 10206

Задание 24

Найдите остаток от деления $P(x) = x^5 - 3x^2 + 2$ на $x - 2$.

В равенстве $P(x) = (x - 2)Q(x) + r$ подставим $x = 2$. Тогда $r = P(2) = 32 - 12 + 2 = 22$.

Ответ. 22.

Задание 25

Известно, что $a + b = 5$ и $ab = 3$. Найдите $a^3 + b^3$.

Шаг 1. Раскрываем куб суммы: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

Шаг 2. Выражаем искомое: $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$.

Шаг 3. Подставляем $a + b = 5$ и $ab = 3$.

Шаг 4. Получаем $5^3 - 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Шаг 5. После вычисления имеем 80.

Ответ. 80

Задание 26

Разделите $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ на $x - 2$ и разложите исходный многочлен на линейные множители.

Деление даёт $x^2 - 4x + 3$ без остатка. Проверка:

$(x - 2)(x^2 - 4x + 3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Квадратный множитель равен $(x - 1)(x - 3)$.

Ответ. Частное $x^2 - 4x + 3$; разложение $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Задание 27

Известно, что $a + b = 10$ и $ab = 21$. Найдите $a^3 + b^3$.

Шаг 1. Раскрываем куб суммы: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

Шаг 2. Выражаем искомое: $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$.

Шаг 3. Подставляем $a + b = 10$ и $ab = 21$.

Шаг 4. Получаем $10^3 - 3 \cdot 21 \cdot 10$.

Шаг 5. После вычисления имеем 370.

Ответ. 370

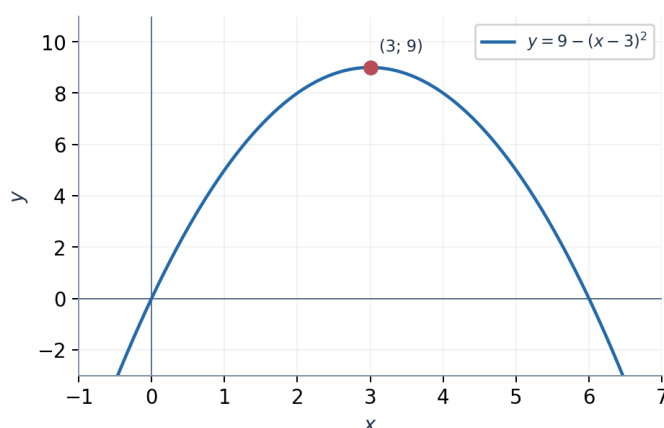
Задание 28

Действительные числа x, y удовлетворяют $x + y = 6$. Найдите наибольшее значение xy и случай равенства.

Шаг 1. Подставим $y = 6 - x$: $xy = 6x - x^2 = 9 - (x - 3)^2$.

Шаг 2. Квадрат неотрицателен, поэтому $xy \leq 9$. Равенство достигается при $x = 3$, тогда $y = 3$. Верхняя оценка достижима и потому является максимумом.

Ответ. 9 при $x = y = 3$.



Максимум произведения равен 9 и достигается при $x = 3$.

Задание 29

Докажите, что число $n^4 + 4$ является составным при каждом натуральном $n > 1$.

Шаг 1. Добавим и вычтем $4n^2$: $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2$.

Шаг 2. Получаем разность квадратов: $(n^2 + 2)^2 - (2n)^2$.

Шаг 3. Следовательно, $n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$.

Шаг 4. При $n > 1$ оба множителя — натуральные числа, большие 1: первый равен $(n - 1)^2 + 1 \geq 2$, второй очевидно больше 1.

Проверка. Произведение раскрывается в $n^4 + 4$; представление нетривиально при всех $n > 1$.

Ответ. Число составное для каждого $n > 1$.

Задание 30

Найдите свободный член после раскрытия скобок в

$$\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6,$$

где $x \neq 0$.

Если из k скобок выбран множитель $-\frac{1}{x}$, а из остальных $2x$, степень x равна $6 - 2k$. Для свободного члена нужно $k = 3$. Его коэффициент равен $C_6^3 \cdot 2^3(-1)^3 = 20 \cdot 8 \cdot (-1) = -160$. **Ответ:** -160 .

05. Задания с развёрнутым решением**Задание 31**

Разложите многочлен

$$P(x) = x^3 + 9x^2 + 17x - 6$$

на множители, если известно, что $x = -6$ - его корень.

Шаг 1. По теореме о корне многочлена $P(-6) = 0$, поэтому $(x + 6)$ является множителем.

Шаг 2. Делим коэффициенты многочлена на $(x + 6)$ схемой Горнера.

Шаг 3. Получаем частное $x^2 + 3x - 1$ и нулевой остаток.

Шаг 4. Проверяем обратным умножением: $(x + 6)(x^2 + 3x - 1)$ возвращает исходные коэффициенты.

Шаг 5. Следовательно, $P(x) = (x + 6)(x^2 + 3x - 1)$.

Ответ. $(x + 6)(x^2 + 3x - 1)$

Задание 32

Разложите многочлен

$$P(x) = x^3 + 5x^2 + 11x + 15$$

на множители, если известно, что $x = -3$ - его корень.

Шаг 1. По теореме о корне многочлена $P(-3) = 0$, поэтому $(x + 3)$ является множителем.

Шаг 2. Делим коэффициенты многочлена на $(x + 3)$ схемой Горнера.

Шаг 3. Получаем частное $x^2 + 2x + 5$ и нулевой остаток.

Шаг 4. Проверяем обратным умножением: $(x + 3)(x^2 + 2x + 5)$ возвращает исходные коэффициенты.

Шаг 5. Следовательно, $P(x) = (x + 3)(x^2 + 2x + 5)$.

Ответ. $(x + 3)(x^2 + 2x + 5)$

Задание 33

Упростите выражение и укажите исходную ОДЗ:

$$\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} - \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}.$$

ОДЗ: $x \neq 2$, $x \neq -2$. Разложим $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ и $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Первая дробь после сокращения совпадает со второй. **Ответ:** 0 при $x \neq \pm 2$.

Задание 34

Найдите a и b , при которых тождественно верно

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2).$$

Обозначим $u = x^2 + 2$. Правая часть равна

$$(u - 3x)(u + 3x) = u^2 - 9x^2 = (x^2 + 2)^2 - 9x^2 = x^4 - 5x^2 + 4.$$

Ответ: $a = -5$, $b = 4$.

Задание 35

Найдите p и q , если многочлен

$$P(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + px + 1$$

делится на $x^2 - 3x + 2$.

Шаг 1. Делитель раскладывается как $(x - 1)(x - 2)$, поэтому необходимы и достаточны условия $P(1) = 0$ и $P(2) = 0$.

Шаг 2. Из $P(1) = 0$ получаем $2 + 2p + q = 0$.

Шаг 3. Из $P(2) = 0$ получаем $17 + 10p + 4q = 0$.

Шаг 4. Подстановка $q = -2 - 2p$ во второе равенство даёт $9 + 2p = 0$.

Следовательно, $p = -\frac{9}{2}$, $q = 7$.

Проверка. При найденных коэффициентах $P(1) = P(2) = 0$; корни делителя различны, поэтому делимость на их произведение доказана.

Ответ. $p = -\frac{9}{2}$, $q = 7$.

Задание 36

Упростите выражение и укажите все ограничения:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} : \frac{x + 1}{x + 2}.$$

Знаменатели требуют $x \neq \pm 2$. Дробь-делитель должна быть ненулевой, поэтому $x \neq -1$. Умножаем на обратную дробь и раскладываем:

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{x+1} = \frac{x-1}{x-2}. \text{ Ответ: } \frac{x-1}{x-2}, x \notin \{-2, -1, 2\}.$$

06. Итоговые задачи повышенной сложности**Задание 37**

Известно, что

$$x + \frac{1}{x} = 3.$$

Найдите

$$x^4 + \frac{1}{x^4},$$

не находя x .

Условие подразумевает $x \neq 0$. Возводим исходное равенство в квадрат:

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9, \text{ значит } x^2 + \frac{1}{x^2} = 7. \text{ Снова возводим в квадрат: } x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = 49.$$

Ответ: 47.

Задание 38

Докажите, что для положительных x и y выполняется

$$(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4,$$

и найдите все случаи равенства.

Шаг 1. Раскроем произведение: $(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$

Шаг 2. Для положительного $t = \frac{x}{y}$ имеем $t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{(t-1)^2}{t} \geq 0.$

Шаг 3. Следовательно, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, а исходное произведение не меньше 4.

Шаг 4. Равенство возможно тогда и только тогда, когда $t = 1$, то есть $x = y$.

Проверка полноты. Деление выполнялось только на положительные величины; условие равенства восстановлено из единственного нуля квадрата.

Ответ. Неравенство доказано; равенство при $x = y > 0$.

Задание 39

Для каждого действительного a разложите $P_a(x) = x^4 - (a+2)x^2 + 2a$ на множители и определите число различных действительных корней.

Шаг 1. $P_a(x) = (x^2 - 2)(x^2 - a)$. Корни $x = \pm\sqrt{2}$ существуют всегда.

Шаг 2. При $a < 0$ второй множитель корней не даёт. При $a = 0$ добавляется один корень 0. При $a > 0$ появляются $\pm\sqrt{a}$. Они совпадают с уже найденными только при $a = 2$.

Шаг 3. Двойной корень многочлена считается одним различным корнем.

Отдельно проверяем $a = 0$ и $a = 2$.

Ответ. $(x^2 - 2)(x^2 - a)$; 2 корня при $a < 0$ или $a = 2$; 3 при $a = 0$; 4 при $a > 0, a \neq 2$.

Параметр	$a < 0$	$a = 0$	$0 < a < 2$	$a = 2$	$a > 2$
Корней	2	3	4	2	4

Различные корни: появление нуля при $a = 0$ и слияние пар при $a = 2$.

Задание 40

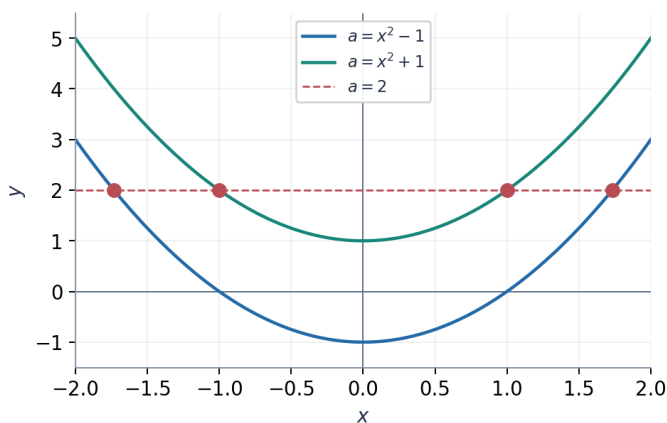
Найдите все a , при которых уравнение $(x^2 - a)^2 = 1$ имеет ровно четыре различных корня на отрезке $[-2; 2]$.

Шаг 1. Разность квадратов даёт $(x^2 - a - 1)(x^2 - a + 1) = 0$, то есть $x^2 = a + 1$ или $x^2 = a - 1$.

Шаг 2. На $[-2; 2]$ уравнение $x^2 = t$ имеет два различных корня тогда и только тогда, когда $0 < t \leq 4$. При $t = 0$ корень один. Два уровня $a - 1$ и $a + 1$ всегда различны, поэтому четыре корня возможны только при двух допустимых положительных уровнях.

Шаг 3. Получаем $0 < a - 1 \leq 4$ и $0 < a + 1 \leq 4$. Пересечение условий: $1 < a \leq 3$. При $a = 1$ корней три; при $a = 3$ корни $\pm\sqrt{2}, \pm 2$ — все четыре принадлежат отрезку.

Ответ. $a \in (1; 3]$.



При $a = 2$ горизонталь пересекает две параболы в четырёх точках отрезка $[-2; 2]$.



Ответ к задаче 40: $a \in (1; 3]$.