



Классическая вероятность

Теория и разобранные примеры

Свойства, условия применения и пошаговые объяснения. Используйте оглавление и закладки PDF для перехода к нужной теме.

Содержание

01. Модель: что именно выбирают случайно	2
02. Классическая формула и её доказательство	2
03. Дополнение, «и», «или» и границы	2
04. Правила подсчёта: сумма и произведение	3
05. Кубики: таблица равновозможных пар	3
06. Монеты и полный перечень последовательностей	4
07. Перестановки, факториал и сочетания	5
08. Выбор без возвращения и состав команды	5
09. Ограничения на позиции: блоки и промежутки	5
10. Повторяющиеся буквы: почему множители сокращаются	6
11. Включение-исключение и классы остатков	6
12. Параметры: число объектов остаётся целым	7
13. Геометрические конфигурации и расширение модели	7
14. Частота, проверка решения и типичные ошибки	8

01. Модель: что именно выбирают случайно

Вероятность описывает случайный опыт с заданными правилами. Элементарный исход - полностью определённый результат опыта, событие - множество подходящих исходов. Обозначим пространство исходов Ω , событие $A \subseteq \Omega$. В этом уроке основной случай - конечное пространство с равновероятными исходами.

Сначала сформулируйте исход, затем считайте. У одного кубика исход - число, у двух различных кубиков - упорядоченная пара. При выборе команды исход - множество людей, если роли не назначаются. Слово «случайно» не всегда гарантирует одинаковые вероятности: равновероятность должна следовать из условия или обоснованной симметрии.

Контрпример. В мешке девять белых шаров и один чёрный. Отдельные шары равновозможны, но два названия цветов - нет: их вероятности $\frac{9}{10}$ и $\frac{1}{10}$. Нельзя делить число подходящих цветов на число всех цветов.

02. Классическая формула и её доказательство

Пусть имеется $N > 0$ равновозможных исходов. Если вероятность каждого равна q , то $Nq = 1$, следовательно, $q = \frac{1}{N}$. Событие из M исходов имеет вероятность

$$P(A) = \frac{M}{N}, \quad 0 \leq M \leq N.$$

Здесь используется сложение вероятностей несовместимых элементарных исходов. Поэтому $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$.

Пример. Из чисел 1-24 равновероятно выбирают одно. Кратных 5 четыре: 5, 10, 15, 20. Вероятность $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$. Число 0 не учитывается, поскольку не входит в исходный диапазон. Числитель и знаменатель должны описывать объекты одного типа.

03. Дополнение, «и», «или» и границы

Противоположное событие $\bar{A} = \Omega \setminus A$ содержит все исходы, не входящие в A . Множества не пересекаются и покрывают Ω , поэтому $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Слова «хотя бы один» часто проще заменить на «не ни одного».

Для двух событий $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$: общие исходы в сумме посчитаны дважды. Союз «или» означает объединение, допускающее одновременное выполнение, если условие специально не требует «ровно одного». Союз «и» означает пересечение.

Пример. Среди чисел 1-24 кратных 4 шесть, кратных 6 четыре, общих кратных 12 два. Поэтому вероятность делимости на 4 или 6 равна $\frac{6 + 4 - 2}{24} = \frac{1}{3}$.

«Больше 4» не включает 4; «не меньше 4» включает. «Ровно два» исключает три, а «не менее двух» включает все возможные количества начиная с двух.

04. Правила подсчёта: сумма и произведение

Если варианты разбиты на непересекающиеся группы, их числа складываются. Если первый выбор имеет a вариантов, а после каждого первого второй имеет ровно b вариантов, последовательность имеет ab вариантов. Это правило подсчёта; оно само по себе не утверждает независимость случайных событий.

Пример. Код из трёх цифр с разрешённым начальным нулём имеет $10^3 = 1000$ вариантов. Трёхзначных чисел только $9 \cdot 10^2 = 900$. Без повторения цифр трёхзначных чисел $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$: на втором месте ноль допустим, но первая цифра запрещена.

При переменном числе продолжений нужно разбивать выбор на случаи, а не умножать несогласованные числа вариантов. Проверка подсчёта: каждый допустимый объект должен порождаться ровно один раз.

05. Кубики: таблица равновозможных пар

При независимых бросках двух правильных кубиков каждая пара $(i; j)$ имеет вероятность $\frac{1}{36}$. Пары $(2; 5)$ и $(5; 2)$ различны. Таблица 6×6 даёт полный перечень без пропусков.

Разобранный пример. Сумму 9 дают $(3; 6), (4; 5), (5; 4), (6; 3)$, поэтому $P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Суммы 2 и 7 не равновозможны: первую даёт одна пара, вторую шесть. Поэтому считать 11 возможных сумм и применять к ним формулу с равными весами нельзя.

Для максимума ровно k , $1 \leq k \leq 6$, подходят пары из квадрата $k \times k$, но не из квадрата $(k-1) \times (k-1)$. Число равно $k^2 - (k-1)^2 = 2k-1$. Для $k=4$ вероятность $\frac{7}{36}$.

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

Первый кубик

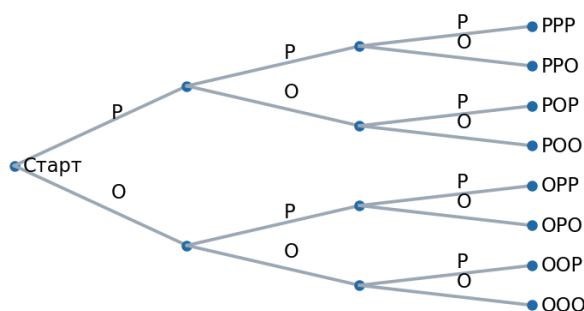
Все 36 пар; зелёным четыре пары с суммой 9.

06. Монеты и полный перечень последовательностей

При n независимых бросках симметричной монеты исход - последовательность длины n . Таких последовательностей 2^n , каждая равновероятна. Дерево ветвится на орла и решку на каждом шаге. Конечные пути, а не промежуточные вершины, образуют пространство исходов.

Пример. В трёх бросках хотя бы два орла означают ООО, ООР, ОРО, РОО: вероятность $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Ровно два орла - лишь три последних пути, вероятность $\frac{3}{8}$. Хотя бы один орёл - дополнение к РРР, вероятность $\frac{7}{8}$.

Если монета несимметрична или броски зависимы, одних 2^n записей недостаточно для равных весов. Такие модели и формулы условной вероятности подробно рассматриваются в следующем уроке.



Восемь равновозможных последовательностей трёх независимых бросков.

07. Перестановки, факториал и сочетания

Факториал $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ считает порядки n различных объектов. Договариваемся $0! = 1$: пустой набор имеет один порядок. Если выбираются k объектов из n без повторений и с учётом порядка, число выборов $n(n-1) \cdots (n-k+1)$.

Без учёта порядка каждый набор посчитан $k!$ раз. Поэтому

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n, k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

В частности, $C_n^0 = C_n^n = 1$. Выбор команды не различает перестановки людей; назначение капитана и заместителя различает. Нельзя использовать сочетания в знаменателе и упорядоченные выборы в числителе.

Пример. Из семи человек выбирают двух: $C_7^2 = 21$ пар. Если одному поручают роль ведущего, а второму секретаря, вариантов $7 \cdot 6 = 42$. Число исходов удвоилось, поскольку появились различные роли.

08. Выбор без возвращения и состав команды

Если все последовательные выборы отдельных объектов равновероятны, каждый неупорядоченный набор имеет одинаковое число порядков, поэтому и наборы равновероятны. При одновременном выборе удобно считать их сочетаниями. Объекты одного цвета остаются различными физическими объектами.

Пример. Из четырёх белых и шести чёрных шаров выбирают два. Всего $C_{10}^2 = 45$ пар, белых пар $C_4^2 = 6$. Вероятность двух белых $\frac{2}{15}$. Для ровно одного белого -

$$\frac{4 \cdot 6}{45} = \frac{8}{15}. \text{ Для двух чёрных - } \frac{C_6^2}{45} = \frac{1}{3}. \text{ Сумма трёх вероятностей } 1.$$

Составное ограничение. Из пяти девушек и шести юношей выбирают троих; требуется хотя бы две девушки. Благоприятных составов $C_5^2 C_6^1 + C_5^3 = 60 + 10 = 70$, всех $C_{11}^3 = 165$. Вероятность $\frac{14}{33}$. Разбиение по числу девушек несовместимо и полно.

09. Ограничения на позиции: блоки и промежутки

Если два конкретных объекта должны стоять рядом, их можно сжать в блок, отдельно учитывая порядок внутри. Например, среди $5!$ перестановок пяти книг две заданные соседствуют в $2 \cdot 4!$ случаях; вероятность $\frac{2}{5}$.

Для отсутствия соседства используют промежутки. Выберем k мест из n в ряд, $i_1 < \cdots < i_k$, с расстоянием между соседними выбранными номерами не меньше 2. Замена $j_s = i_s - (s-1)$ даёт обычный выбор k разных чисел из $1, \dots, n-k+1$. Обратная замена $i_s = j_s + s - 1$ восстанавливает набор. Значит, число вариантов C_{n-k+1}^k , если $n \geq 2k - 1$, иначе 0.

Пример. Два несоседних места из семи: $C_6^2 = 15$ вариантов из $C_7^2 = 21$, вероятность $\frac{5}{7}$. Для ровно одной пары соседей надо отдельно исключать длинный сплошной блок, который содержит несколько соседних пар.

10. Повторяющиеся буквы: почему множители сокращаются

Если среди n букв одна повторяется r_1 раз, другая r_2 раз и так далее, различных порядков $\frac{n!}{r_1!r_2!\dots}$. Это следует из временной нумерации одинаковых букв: каждое ненумерованное слово получается одинаковым числом способов.

Пример. У слова «АЛГЕБРА» четыре различные согласные и три гласные А, А, Е. Всего $\frac{7!}{2!} = 2520$ перестановок. Согласные расставляются 4! способами и создают пять промежутков. Для несоседних гласных выбираем три промежутка и задаём порядок гласных: $4!C_5^3 \frac{3!}{2!} = 720$ вариантов. Вероятность $\frac{720}{2520} = \frac{2}{7}$.

Число гласных не должно превышать число промежутков. Каждый допустимый порядок единственным образом восстанавливается после удаления гласных - это доказательство отсутствия повторного счёта, а не только вычисление формулы.

11. Включение-исключение и классы остатков

Для трёх множеств сначала складывают их размеры, вычитают три попарных пересечения, затем прибавляют тройное. Каждый объект из двух множеств получает коэффициент $2 - 1 = 1$, из трёх - $3 - 3 + 1 = 1$.

Пример. Три письма случайно попадают в три конверта по одному. Перестановок без верных попаданий $3! - 3 \cdot 2! + 3 \cdot 1! - 1 = 2$, вероятность $\frac{1}{3}$. Сначала исключены перестановки с одним фиксированным верным письмом, затем восстановлены лишние вычитания пересечений. В задаче о четырёх письмах действует тот же принцип.

При делимости суммы удобно разбивать числа на классы остатков. Для трёх слагаемых сумма кратна 3, если все остатки одинаковы либо равны 0, 1, 2 в некотором порядке. Это проверяется полным перечнем неупорядоченных троек остатков; при двух одинаковых и третьем другом сумма не кратна 3. Числа внутри каждого класса выбирают сочетаниями, а между классами - по правилу произведения.

12. Параметры: число объектов остаётся целым

В задачах о неизвестном составе коробки сначала фиксируют область: количества - целые неотрицательные числа, всего объектов достаточно для выбора. Вероятность находится в $[0; 1]$, но не обязана принимать все значения этого отрезка.

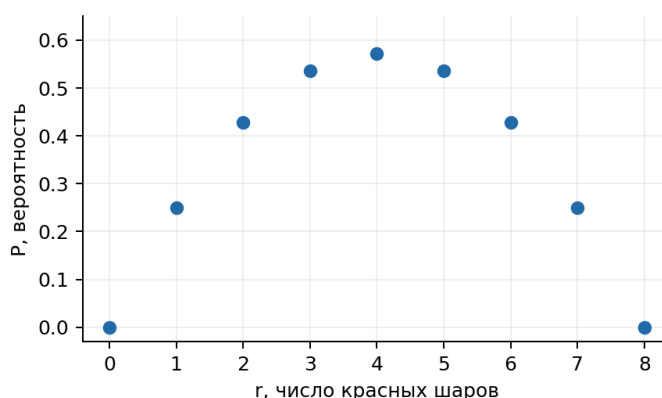
Пример. В коробке восемь шаров, r красных. Для пары разных цветов

$$P(r) = \frac{r(8-r)}{C_8^2} = \frac{16 - (r-4)^2}{28}, \quad r \in \{0, 1, \dots, 8\}.$$

Максимум $\frac{4}{7}$ при 4. Равенство $P = a$ может иметь только значения $a \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{7}, \frac{15}{28}, \frac{4}{7}\}$.

Первым четырём соответствуют две симметричные композиции, последнему одна. График следует рисовать отдельными точками, а не заполнять промежутки непрерывной параболой.

Если неизвестно общее число объектов, после уравнения нужно отобрать целые допустимые корни. Например, при двух красных и вероятности двух красных $\frac{1}{15}$ получаем $\frac{2}{N(N-1)} = \frac{1}{15}$, откуда $N = 6$ или -5 ; допустимо только 6.



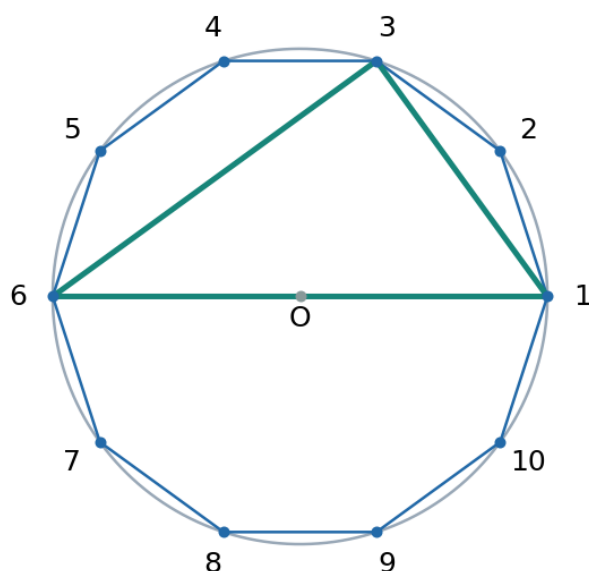
Только целые составы: всего 8 шаров; максимум при $r = 4$.

13. Геометрические конфигурации и расширение модели

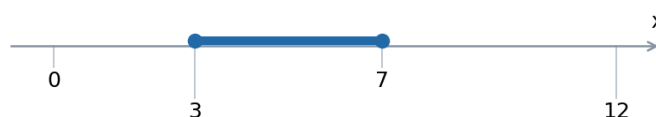
Выбор трёх вершин многоугольника - всё ещё конечная классическая модель. В правильном десятиугольнике $C_{10}^3 = 120$ троек. Прямоугольный вписанный треугольник имеет диаметр в качестве гипотенузы: его прямой угол опирается на полуокружность. Пять диаметров и восемь вариантов третьей вершины дают 40 треугольников, без повторения, потому что гипотенуза единственна. Вероятность $\frac{1}{3}$.

Равномерный выбор точки на отрезке или в фигуре - другая, непрерывная модель. Конечное число исходов здесь посчитать нельзя. При одинаковой плотности вероятность равна отношению длин или площадей. Без равномерности это неверно.

Пример. Точка равномерно выбирается на $[0; 12]$. Попадание в $[3; 7]$ имеет вероятность $\frac{7-3}{12} = \frac{1}{3}$. Граничные точки имеют нулевую длину и не влияют на вероятность. Для площади сначала доказывают вложение вычитаемой области: нельзя вычитать целый круг, если часть круга лежит за пределами исходной фигуры. В заключительной практике это проверяется неравенством $(|x| + |y|)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$.



Десятиугольник: диаметр 1-6 и третья вершина 3; прямой угол при вершине 3.



Равномерный выбор на $[0; 12]$: благоприятный отрезок $[3; 7]$ длины 4.

14. Частота, проверка решения и типичные ошибки

Относительная частота $\nu = \frac{k}{n}$ вычисляется по данным $n > 0$ проведённых опытов, где событие встретилось k раз. Теоретическая вероятность относится к модели до наблюдения. Частота может приближать её в длинных сериях при подходящих предпосылках, но не обязана точно совпадать с ней.

Перед ответом проверьте: исходы равновозможны; пространство не потеряло начальный ноль или крайнее значение; порядок одинаково учтён в числителе и знаменателе; случаи несовместимы и полны; пересечения не посчитаны дважды;

для неизвестных количеств сохранена целочисленность. Итог должен лежать в $[0; 1]$, но этого условия недостаточно для доказательства правильности.

Типичные ошибки: считать цвета вместо шаров; считать суммы двух кубиков равновероятными; заменять «ровно» на «хотя бы»; возвращать объект мысленно при выборе без возвращения; применять правило произведения вероятностей без независимости; терять повторяющиеся буквы; считать непрерывную кривую вместо дискретных значений параметра.

Основные модели соответствуют теме вероятности профильного ЕГЭ; расширенные комбинаторные доказательства и геометрическая вероятность развивают обоснование и не объявляются копиями стандартного экзаменационного номера. На занятии сначала просите назвать элементарный исход, затем объяснить равновозможность и полноту подсчёта. Следующий урок посвящён сложным вероятностным моделям.