



Прикладные расчёты

Теория и разобранные примеры

Свойства, условия применения и пошаговые объяснения. Используйте оглавление и закладки PDF для перехода к нужной теме.

Содержание

01. От жизненной ситуации к математической модели	2
02. Единицы, размерность и точность	2
03. Как выражать неизвестное и проверять корни	2
04. Проценты: коэффициенты вместо сложения	3
05. Концентрации и сохранение вещества	3
06. Арифметическая прогрессия: постоянная прибавка	4
07. Геометрическая прогрессия и капитализация	4
08. Порядок операций: пополнения, снятия, платежи	4
09. Равные части долга и равные платежи	5
10. Показательные модели и первое достижение порога	6
11. Логарифмы и обратные формулы	6
12. Физическая область важнее формального корня	6
13. Оптимизация и целочисленный ответ	7
14. Параметры: где меняется число решений	7
15. Типичные ошибки и самостоятельная проверка	8

01. От жизненной ситуации к математической модели

Прикладная задача связывает измеряемые величины формулой, таблицей, графиком или описанием операций. Её решение состоит не только в вычислении: нужно установить смысл переменных, область применимости модели и единицу ответа.

Например, формула $s = vt$ описывает равномерное движение с постоянной скоростью. Если транспорт стоял часть времени, нельзя умножать скорость движения на всё время поездки. Так же годовая ставка не определяет сумму вклада без порядка пополнений и снятий.

В этом уроке соединяются арифметика, уравнения, неравенства и исследование функций. Короткие расчёты готовят к прикладным заданиям, а заключительные задачи развивают обоснование, работу с целыми величинами и параметрами. Условные тарифы, цены и кредитные схемы здесь заданы для обучения и не описывают предложения банков.

02. Единицы, размерность и точность

Перед подстановкой выпишите единицу каждой величины. В $P = \frac{A}{t}$ энергия в джоулях и время в секундах дают мощность в ваттах. Если работа дана в килоджоулях, её число нужно умножить на 1000; минуты переводят в секунды умножением на 60.

$1 \text{ м}^2 = 10\,000 \text{ см}^2$; $1 \text{ м}^3 = 1\,000\,000 \text{ см}^3$: для площадей и объёмов коэффициент перевода возводят в квадрат и куб. Плотность - масса единицы объёма: $\rho = m/V$. Можно использовать г/см^3 либо единицы СИ (кг/м^3), но нельзя смешивать граммы с килограммами в одной подстановке.

Пример. Полезная работа 480 кДж за 4 минуты при КПД 75%. Затраченная энергия $\frac{480000}{0,75} = 640000$ Дж, входная мощность $\frac{640000}{240} = \frac{8000}{3}$ Вт. Если округление не требуется, дробь точнее десятичного приближения. Округляйте лишь окончательный результат и только по условию.

03. Как выражать неизвестное и проверять корни

Из $E = \frac{mv^2}{2}$ при $m > 0$, $E \geq 0$, $v \geq 0$ следует $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$. Отрицательный алгебраический корень не подходит, если v обозначает модуль скорости. Но для координаты или проекции скорости отрицательные значения могут быть осмысленными: ограничение берётся из определения величины, а не из привычки.

Из $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ при $T, l, g > 0$ получаем $\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{l}{g}}$, затем $l = \frac{gT^2}{4\pi^2}$. Возведение в квадрат равносильно, поскольку обе части неотрицательны.

Умножать уравнение на выражение с переменной можно только с сохранением ОДЗ. В неравенстве дополнительно требуется знать знак множителя. Например, $\frac{U}{R+r} \leq I_0$ при $R \geq 0, r, U, I_0 > 0$ равносильно $R \geq \frac{U}{I_0} - r$ с последующим пересечением с $R \geq 0$.

04. Проценты: коэффициенты вместо сложения

Если величина $A > 0$ увеличилась на $p\%$, новая величина равна $A \left(1 + \frac{p}{100}\right)$. При снижении на $p\%$ коэффициент равен $1 - \frac{p}{100}$; в обычной модели цены требуется $0 \leq p \leq 100$.

Последовательные изменения перемножаются. Снижение на 10%, затем повышение на 10% даёт $0,9 \cdot 1,1 = 0,99$: итоговая потеря 1%, а не ноль. Чтобы восстановить цену после снижения на $p < 100$ процентов, необходим рост на $\frac{100p}{100-p}$ процентов. Это следует из $\left(1 - \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 1$.

В обратной задаче делите конечное значение на произведение коэффициентов.

Пример: после скидок 20% и 5% цена 7600 рублей. Исходная цена $\frac{7600}{0,8 \cdot 0,95} = 10000$ рублей.

Процентный пункт отличается от процента: изменение ставки с 5% до 7% - это 2 процентных пункта, а относительный рост самой ставки равен 40%.

05. Концентрации и сохранение вещества

Массовая доля c - отношение массы растворённого вещества к полной массе раствора. В формулах 15% записывается числом 0,15. При смешивании без потерь сохраняется масса вещества:

$$c_1 m_1 + c_2 m_2 = c(m_1 + m_2).$$

Итоговая доля - взвешенное среднее. При положительных массах она строго между различными исходными долями; равные доли не меняются. Среднее арифметическое верно при равных массах или исходных долях.

Пример. К 10 кг 10%-го раствора добавляют x кг 30%-го до концентрации 20%. Баланс $1 + 0,3x = 0,2(10 + x)$ даёт $x = 10$ кг. При испарении чистой воды масса вещества постоянна, меняется лишь знаменатель доли.

Если удаляют часть перемешанного раствора, уходит и соответствующая доля вещества. При замене доли r раствора водой после n шагов масса вещества $M_n = M_0(1 - r)^n$. Это не линейное уменьшение.

06. Арифметическая прогрессия: постоянная прибавка

Последовательность с условием $a_{k+1} = a_k + d$ называется арифметической прогрессией. После $n - 1$ прибавлений $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Для суммы запишем последовательность в прямом и обратном порядке. Каждая из n пар имеет сумму $a_1 + a_n$, поэтому

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n - 1)d)}{2}.$$

Пример. Выпуск в первом месяце 12 единиц, ежемесячная прибавка 3. За 8 месяцев $a_8 = 33$, $S_8 = \frac{8(12 + 33)}{2} = 180$. Число прибавлений на единицу меньше номера последнего месяца.

В модели целого выпуска проверяйте, что все члены - допустимые целые неотрицательные величины. Формально верная прогрессия с отрицательным выпуском в одном из месяцев физически не подходит.

07. Геометрическая прогрессия и капитализация

При одинаковом относительном изменении $b_{k+1} = qb_k$. Тогда $b_n = b_1 q^{n-1}$. Если $q \neq 1$, из разности $qS_n - S_n$ получается

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

При $q = 1$ формула с делением неприменима, но непосредственно $S_n = nb_1$.

При ежегодной капитализации ставка $p\%$ даёт сумму $A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$. При простых процентах начисление каждый год идёт только на исходную сумму: $A_n = A_0 \left(1 + \frac{np}{100}\right)$. Эти модели совпадают за первый год, но обычно различаются дальше.

Пример. 100000 рублей под 10% за два года дадут 121000 с капитализацией и 120000 без неё. Если ставка меняется, общий коэффициент - произведение коэффициентов отдельных лет, а не степень среднего процента.

08. Порядок операций: пополнения, снятия, платежи

Обозначим остаток после k -го периода через D_k . Если сначала начисляют проценты с коэффициентом q , затем вносят платёж P , то $D_k = qD_{k-1} - P$. Если сначала платят, а потом начисляют проценты, формула другая: $D_k = q(D_{k-1} - P)$. Переставлять операции нельзя.

При одинаковых платежах развёрнём рекурсию:

$$D_n = q^n D_0 - P(1 + q + \dots + q^{n-1}).$$

Отсюда для погашения за n периодов

$$P = \frac{q^n D_0}{1 + q + \dots + q^{n-1}}.$$

Эта форма корректна и при $q = 1$, когда $P = \frac{D_0}{n}$. После нахождения платежа проверяют промежуточные остатки: они должны соответствовать условию, например оставаться положительными до последнего года.

Для пополнений знак меняется на плюс. Если равные взносы A вносят в конце года на изначально пустой счёт, после n -го взноса сумма $A(1 + q + \dots + q^{n-1})$. Последний взнос ещё не получает годовых процентов.

09. Равные части долга и равные платежи

Это разные схемы. При равных частях основного долга каждый раз возвращают $\frac{D}{n}$.

Перед k -м начислением остаток $D \frac{n-k+1}{n}$. При ставке r в долях единицы полный платёж

$$P_k = \frac{D}{n} + rD \frac{n-k+1}{n}.$$

При $r > 0$ платежи убывают. Их сумма равна

$$D + r \frac{D(n+1)}{2}.$$

Последнее равенство следует из суммы арифметической прогрессии остатков. При переменных ставках каждый процент умножают на свой остаток; заменить все ставки их обычным средним нельзя.

Пример. Долг 600000 рублей, три равные части основного долга, ставка 10%. Остатки 600000, 400000, 200000; проценты 60000, 40000, 20000. Полные платежи 260000, 240000, 220000; сумма 720000 рублей.

10. Показательные модели и первое достижение порога

Распад, охлаждение и обесценение часто описываются множителем q^t с $0 < q < 1$. Такая функция строго убывает. В модели $T(t) = T_{\text{ср}} + (T_0 - T_{\text{ср}})q^t$ при $T_0 > T_{\text{ср}}$ температура приближается к температуре среды сверху, но не достигает её за конечное время.

Пример. $T(t) = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}$. Условие $T(t) \leq 30$ даёт $2^{-\frac{t}{10}} \leq \frac{1}{8} = 2^{-3}$, откуда $t \geq 30$. Знак меняется при умножении на отрицательное число -10 . Если потребовать $T \leq 20$, решений не будет.

Если процессы происходят раз в год или шаг, переменная целая. Решив вещественное неравенство, выберите первое целое и обязательно проверьте его и предыдущее. При строгом пороге равенство не допускается.

11. Логарифмы и обратные формулы

Логарифм $\log_b z$ определён при $z > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ и означает показатель степени, в которую нужно возвести b , чтобы получить z . Поэтому $\log_b z = c$ равносильно $z = b^c$ на ОДЗ.

В модели $L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$ отношение $\frac{I}{I_0}$ безразмерно и положительно. Для двух измерений при одном I_0 разность уровней

$$L_2 - L_1 = 10 \log_{10} \frac{I_2}{I_1}.$$

Рост уровня на 10 означает рост интенсивности в 10 раз; на 30 - в 1000 раз. Нельзя трактовать эти 30 единиц как увеличение интенсивности на 30%.

При решении $q^t \leq b$ логарифмирование требует $q, b > 0$. Если $0 < q < 1$, то $\ln q < 0$, и деление на него меняет направление неравенства. Проверка на одном простом значении помогает обнаружить ошибку знака.

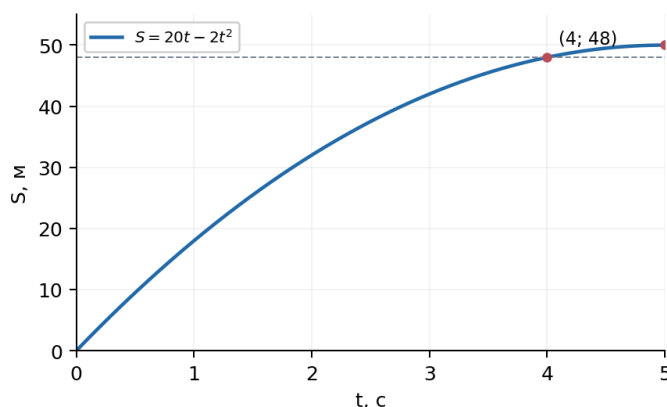
12. Физическая область важнее формального корня

Алгебраическое продолжение модели может описывать несуществующий режим.

При торможении $v(t) = v_0 - at$, $S(t) = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ действуют для $0 \leq t \leq \frac{v_0}{a}$, если после остановки тело не начинает двигаться обратно. За пределами этого промежутка нельзя считать значение параболы пройденным путём.

Пример. При $v_0 = 20$ м/с, $a = 4$ м/с² остановка через 5 с. Уравнение $20t - 2t^2 = 48$ даёт корни 4 и 6, но только 4 входит в $[0; 5]$. Вторая точка лежит на недопустимом продолжении графика.

В других задачах ограничения возникают из положительности массы, длины, концентрации от 0 до 1, неотрицательности цены, вместимости резервуара. Выпишите их до решения; затем отберите корни и подставьте в исходную модель.



Пример теории: допустимо $0 \leq t \leq 5$; путь 48 м достигается при $t = 4$.

13. Оптимизация и целочисленный ответ

Прибыль равна выручке минус затраты, а не цене изделия. Если цена зависит от выпуска, выручка $R(x) = xp(x)$. Для непрерывной модели на замкнутом отрезке сравнивают значения целевой функции на концах и во всех внутренних критических точках.

Пример. $P(x) = 1000 - (x - 12,4)^2$, целые $0 \leq x \leq 20$. Вещественный максимум при $x = 12,4$ недопустим. Достаточно сравнить соседние целые 12 и 13: квадраты отклонений 0,16 и 0,36. Максимум 999,84 достигается при 12. Обоснование: квадрат возрастает с расстоянием от вершины, все остальные целые дальше.

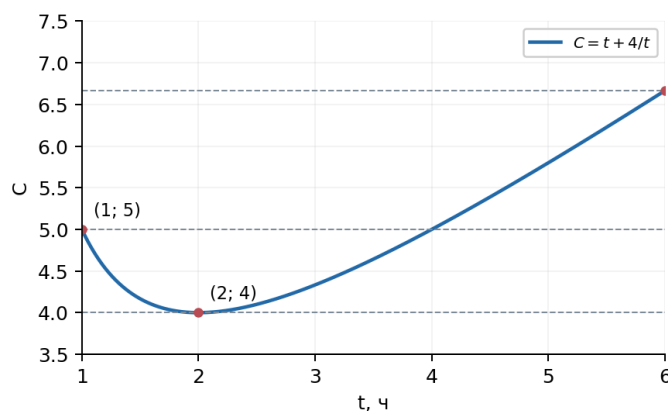
Округление «по привычному правилу» не заменяет сравнения в произвольной функции. Если производная меняет знак несколько раз, сначала требуется полное исследование всех допустимых участков.

14. Параметры: где меняется число решений

Параметр - фиксированное, но неизвестное число, описывающее семейство задач. Критические значения возникают не только при нулевом дискриминанте, но и при пересечении корнем границы области.

Рассмотрим бюджет $C(t) = t + \frac{4}{t} \leq a$ при $t \in [1; 6]$. Минимум $C(2) = 4$, значения на концах $C(1) = 5$, $C(6) = \frac{20}{3}$. Именно эти три уровня меняют вид допустимого множества. При $a = 4$ остаётся одна точка; затем возникает отрезок; после достижения уровня 5 его левая граница закрепляется в 1, а при $a = \frac{20}{3}$ доступен весь рабочий диапазон.

Универсальный приём: сначала решить неравенство на естественной ОДЗ, затем пересечь с физической областью и отдельно проверить каждое критическое значение. Для ответа «при любой допустимой величине» ищите наихудший случай, доказывая монотонность, а не проверяя несколько произвольных примеров.



Бюджетные уровни: 4 - минимум, 5 - левый конец, 20/3 - правый конец.

15. Типичные ошибки и самостоятельная проверка

Проверяйте решение в обратном направлении: соответствует ли найденное число исходной ситуации? Правильное преобразование ошибочно составленного уравнения не спасает ответ.

Не складывайте последовательные проценты; не путайте равные доли основного долга с равными платежами. Не применяйте формулу суммы геометрической прогрессии с делением на $q - 1$ при $q = 1$. Не округляйте дробное количество лет вниз, если требуется первое полное число лет достижения порога.

Проверьте размерность, знаки, физические границы и целочисленность; подставьте ответ в первоначальную формулу. В задачах на минимум докажите, что других кандидатов нет. Для параметра выпишите все ветви и проверьте равенства на границах.

Контроль понимания. После падения цены на 50% для восстановления нужен рост на 100%. После двух замен половины раствора чистой водой остаётся четверть первоначальной массы соли. В модели торможения корень за временем остановки исключается. Каждое утверждение объясняется коэффициентом или областью модели, а не запоминанием ответа.

К §13. Геометрическая модель для задачи 37. У закрытого прямого кругового цилиндра радиус основания $r > 0$, высота $h > 0$. Объём $V = \pi r^2 h$. Два круглых основания имеют площадь $2\pi r^2$. Боковая поверхность разворачивается в прямоугольник со сторонами $2\pi r$ и h , её площадь $2\pi r h$. Поэтому полная площадь $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. При фиксированном объёме выразите высоту через радиус и подставьте в формулу площади; затем исследуйте полученную функцию при положительном радиусе.