



Показательные и логарифмические неравенства

Теория и разобранные примеры

Свойства, условия применения и пошаговые объяснения. Используйте оглавление и закладки PDF для перехода к нужной теме.

Содержание

01. Направление показательного неравенства задаёт монотонность	3
02. Доказательство возрастания и убывания	3
03. Простейшее показательное неравенство при основании больше единицы	3
04. Основание между нулём и единицей меняет направление	4
05. Разные основания сначала приводятся к одному	4
06. Вынесение положительной степени не влияет на знак	5
07. Замена $t=ax$ переводит неравенство в рациональное	5
08. Обратный переход после замены зависит от основания	6
09. Показательное неравенство с положительной правой частью	6
10. Положительность показательной функции решает сравнения с нулём	6
11. Логарифмическое неравенство начинается с ОДЗ	7
12. Основание больше единицы сохраняет знак логарифмического сравнения	7
13. Основание меньше единицы меняет знак	7
14. Сравнение логарифма с числом	8
15. Логарифм положителен или отрицателен в зависимости от аргумента и основания	8
16. Объединение логарифмов не расширяет исходную ОДЗ	9
17. Разность логарифмов приводит к рациональному неравенству	9
18. Квадрат логарифма: замена и область новой переменной	10
19. Дробно-логарифмическое неравенство решается методом интервалов	10
20. Логарифм в знаменателе создаёт дополнительный запрет	11
21. Переменное основание требует разбиения на два случая	11
22. Основание, зависящее от переменной, нельзя оценивать после перехода	11
23. Смена основания и знак знаменателя	12

24. Сравнение логарифмов с разными основаниями	12
25. Смешанное показательно-логарифмическое неравенство	12
26. Уравновешивание двух монотонных функций	13
27. Оценка в показательном неравенстве	13
28. Полный разбор показательного неравенства	14
29. Полный разбор логарифмического неравенства	14
30. Параметр в показательной функции	15
31. Параметр в аргументе логарифма	15
32. Лаборатория ошибок	15
33. Контроль восстановления доказательств	16
34. Дополнительная практика по основному банку	16
35. Карта урока	16
36. Быстрая проверка понимания	17
37. Как упростить или усложнить урок	17
38. Финальное упражнение: вывести знак, а не вспомнить его	17
39. Разбор сложных задач ЕГЭ	18
40. Задача 1 • квадратное неравенство по степени	18
41. Задача 2 • рациональное неравенство после показательной замены	19
42. Задача 3 • логарифмическая сумма	20
43. Задача 4 • рациональная функция от логарифма	21
44. Задача 5 • неравенство с переменным основанием	23
45. Задача 6 • ровно пять целых решений	24
46. Итог урока	25
47. Как объяснить знак дроби с логарифмами	26
48. Почему длины промежутка недостаточно для подсчёта целых	26

01. Направление показательного неравенства задаёт монотонность

При $a > 1$ функция a^x строго возрастает, поэтому порядок показателей и порядок значений совпадают.

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x), \quad a > 1$$

При $0 < a < 1$ функция строго убывает, поэтому большему показателю соответствует меньшее значение.

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x), \quad 0 < a < 1$$

Главный принцип. Знак не «переворачивается из-за дробного основания». Он меняется потому, что соответствующая показательная функция убывает.

02. Доказательство возрастания и убывания

Пусть $v > u$. Для $a > 1$ имеем $a^{v-u} > 1$, поэтому $\frac{a^v}{a^u} > 1$ и $a^v > a^u$.

$$\frac{a^v}{a^u} = a^{v-u}$$

Если $0 < a < 1$, представим $a = \frac{1}{b}$, где $b > 1$. Тогда $a^x = b^{-x}$. При росте x показатель $-x$ уменьшается, а функция b^t возрастает, значит, исходная функция убывает.

Это доказательство должно предшествовать любому правилу сравнения степеней.

03. Простейшее показательное неравенство при основании больше единицы

Пример. Решите $3^{2x-1} \geq 27$.

Запишем $27 = 3^3$. Основание 3 больше единицы, поэтому знак сохраняется:

$$2x - 1 \geq 3$$

Отсюда $x \geq 2$. Все степени определены для любого действительного x , дополнительного ОДЗ нет.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

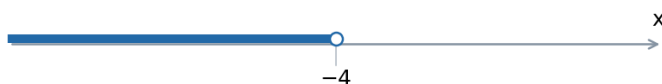
04. Основание между нулём и единицей меняет направление

Пример. Решите $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} > 8$.

Представим $8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$. Функция с основанием $\frac{1}{2}$ убывает, поэтому

$$x + 1 < -3$$

Ответ: $x < -4$. Проверка: при уменьшении x отрицательная степень дроби растёт, что согласуется с ответом.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

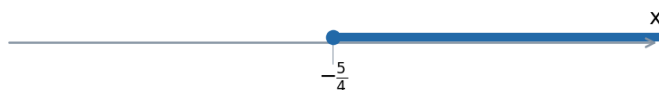
05. Разные основания сначала приводятся к одному

Пример. Решите $4^{x-1} \leq 8^{2x+1}$.

$$2^{2x-2} \leq 2^{6x+3}$$

Основание 2 больше единицы, поэтому $2x - 2 \leq 6x + 3$. После решения линейного неравенства получаем $x \geq -\frac{5}{4}$.

Проверка основания. Сравнивать показатели можно только после того, как обе части стали значениями одной и той же строго монотонной функции.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

06. Вынесение положительной степени не влияет на знак

Любая степень положительного основания положительна. Поэтому после факторизации её можно сократить из знакового выражения без изменения направления.

Пример. Решите $3^{x+1} - 5 \cdot 3^x > 0$.

$$3^x(3 - 5) > 0$$

Первый множитель положителен, второй равен -2 . Произведение отрицательно при любом x , поэтому решений нет.

07. Замена $t=ax$ переводит неравенство в рациональное

Если встречаются a^{2x} и a^x , вводим $t = a^x > 0$. После решения неравенства по t ответ обязательно пересекается с положительной полуосью.

Пример. Решите $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 \leq 0$.

$$t = 2^x > 0, \quad t^2 - 5t + 4 \leq 0$$

Квадратный трёхчлен неположителен между корнями: $1 \leq t \leq 4$. Возвращаемся к 2^x :

$$1 \leq 2^x \leq 4$$

Поскольку основание 2 больше единицы, получаем $0 \leq x \leq 2$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

08. Обратный переход после замены зависит от основания

Если $t = a^x$ и найден промежуток $t_1 \leq t \leq t_2$, то при $a > 1$ порядок сохраняется, а при $0 < a < 1$ границы по x меняются местами из-за убывания.

Пример. Если $\frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 2$, то

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

Из-за убывания получаем $-1 \leq x \leq 2$.

Двойная монотонность. Монотонность используется дважды: при сравнении исходных степеней и при возврате от промежутка по t к промежутку по x .



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

09. Показательное неравенство с положительной правой частью

Не всякую правую часть можно представить удобной степенью. Тогда используем логарифм как обратную функцию.

$$a^x > b$$

При $a > 1$ и $b > 0$ получаем $x > \log_a b$; при $0 < a < 1$ - $x < \log_a b$. Если $b \leq 0$, положительность a^x позволяет решить сравнение сразу.

Пример. $2^x > 5$ имеет точный ответ $x > \log_2 5$. Десятичное приближение не требуется.

10. Положительность показательной функции решает сравнения с нулём

$$a^x > 0 \text{ для любого действительного } x$$

Поэтому $a^x > -3$ верно для всех x , $a^x \leq 0$ решений не имеет, а уравнение $a^x = 0$ также не имеет действительных корней.

Эти ответы следуют из области значений функции, а не из перебора показателей.

11. Логарифмическое неравенство начинается с ОДЗ

До сравнения аргументов выписываем положительность каждого аргумента и допустимость основания. Никакое последующее преобразование не отменяет исходное ОДЗ.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

Общая ОДЗ: $f(x) > 0, g(x) > 0, a > 0, a \neq 1$. Только на этой области применяем монотонность логарифма.

12. Основание больше единицы сохраняет знак логарифмического сравнения

Логарифмическая функция с основанием $a > 1$ строго возрастает.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

Равносильность действует на общей ОДЗ. После решения сравнения аргументов полученный ответ пересекается с условиями их положительности.

Пример. $\log_2(x-1) \geq \log_2(5-x)$. ОДЗ: $x > 1$ и $x < 5$. На ней $x-1 \geq 5-x$, то есть $x \geq 3$. Ответ: $[3; 5)$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

13. Основание меньше единицы меняет знак

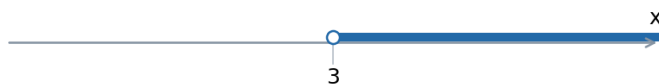
Если $0 < a < 1$, логарифмическая функция строго убывает.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

Пример. $\log_{(\frac{1}{3})}(x+2) < \log_{(\frac{1}{3})} 5$. ОДЗ: $x > -2$. Из-за убывания $x+2 > 5$, поэтому $x > 3$.

Проверка смыслом. У дробного основания большие аргументы имеют меньшие логарифмы. Это можно проверить значениями $\log_{(\frac{1}{3})} 1 = 0$ и

$$\log_{(\frac{1}{3})} 3 = -1.$$



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

14. Сравнение логарифма с числом

Число b представляем как логарифм степени основания:

$$b = \log_a a^b$$

После этого используем монотонность. Например, при $a > 1$

$$\log_a f(x) \geq b \Leftrightarrow f(x) \geq a^b$$

но только на ОДЗ $f(x) > 0$. Для нестрогого сравнения условие $f(x) \geq a^b$ автоматически обеспечивает положительность, однако его происхождение нужно понимать.

15. Логарифм положителен или отрицателен в зависимости от аргумента и основания

Основание	$\log_a x > 0$	$\log_a x < 0$
$a > 1$	$x > 1$	$0 < x < 1$
$0 < a < 1$	$0 < x < 1$	$x > 1$

Таблица выводится из положения степени a^y относительно единицы. Она не должна заучиваться отдельно.

Пример. $\log_{(\frac{1}{2})}(x-1) > 0$. ОДЗ $x > 1$. Поскольку основание меньше 1, положительный логарифм получается при $0 < x-1 < 1$. Ответ: $1 < x < 2$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

16. Объединение логарифмов не расширяет исходную ОДЗ

Задача. Решите $\log_2(x-1) + \log_2(x-3) \geq 3$.

Исходная ОДЗ: $x > 3$. На ней объединяем логарифмы:

$$\log_2((x-1)(x-3)) \geq \log_2 8$$

Основание 2 больше единицы, поэтому $(x-1)(x-3) \geq 8$. После решения квадратного неравенства ответ пересекается с $x > 3$.

Запрет. Условие $(x-1)(x-3) > 0$ не заменяет $x > 3$: оно добавило бы область $x < 1$, где исходные логарифмы не существуют.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

17. Разность логарифмов приводит к рациональному неравенству

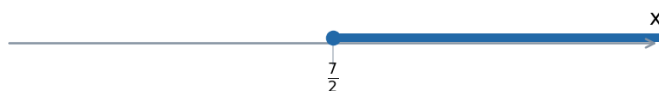
Задача. Решите $\log_3(x+1) - \log_3(x-2) \leq 1$.

ОДЗ: $x > 2$. Объединяем логарифмы и представляем 1 как $\log_3 3$:

$$\log_3 \frac{x+1}{x-2} \leq \log_3 3$$

Основание больше единицы, поэтому $\frac{x+1}{x-2} \leq 3$ на области $x > 2$. Знаменатель здесь положителен, и умножение на него сохраняет знак.

Этот знак обоснован ОДЗ; без него умножать на $x-2$ было бы нельзя.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

18. Квадрат логарифма: замена и область новой переменной

В неравенстве, квадратичном относительно $\log_a x$, вводим $t = \log_a x$. Новая переменная принимает любые действительные значения, но исходно $x > 0$.

Пример. $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 \leq 0$.

$$t^2 - 3t + 2 \leq 0$$

Получаем $1 \leq t \leq 2$, то есть $1 \leq \log_2 x \leq 2$. Основание 2 больше единицы, поэтому $2 \leq x \leq 4$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

19. Дробно-логарифмическое неравенство решается методом интервалов

Если логарифм находится в числителе или знаменателе, полезно перейти к новой переменной или анализировать знаки факторов на исходной ОДЗ.

Пример. Решите $\frac{\log_2 x - 1}{\log_2 x + 2} \geq 0$.

ОДЗ: $x > 0$ и $\log_2 x \neq -2$, то есть $x \neq \frac{1}{4}$. Вводим $t = \log_2 x$. Получаем рациональное неравенство

$$\frac{t-1}{t+2} \geq 0$$

Метод интервалов даёт $t \leq -2$ или $t \geq 1$, причём $t = -2$ исключается. Возвращаемся к x с учётом возрастания $\log_2 x$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

20. Логарифм в знаменателе создаёт дополнительный запрет

Выражение $\frac{1}{\log_a f(x)}$ требует не только $f(x) > 0$, но и $\log_a f(x) \neq 0$, то есть $f(x) \neq 1$.

$$\log_a f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 1$$

Пример. Для $\frac{1}{\log_2(x-1)}$ определено $x > 1$ и $x \neq 2$.

ОДЗ до метода интервалов. Нуль логарифма в знаменателе становится выколотой критической точкой и никогда не включается в ответ.

21. Переменное основание требует разбиения на два случая

В неравенстве $\log_{(g(x))} f(x) > b$ сначала выполняются три условия основания и аргумента. Затем область делится по положению основания относительно единицы.

- случай $g(x) > 1$: логарифм возрастает, знак сохраняется;
- случай $0 < g(x) < 1$: логарифм убывает, знак меняется.

Пример. $\log_x 4 > 1$. ОДЗ: $x > 0$ и $x \neq 1$. При $x > 1$ получаем $4 > x$. При $0 < x < 1$ из-за убывания получаем $4 < x$, что невозможно. Ответ: $1 < x < 4$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

22. Основание, зависящее от переменной, нельзя оценивать после перехода

Направление сравнения определяется до сведения к аргументам. Если сначала написать $f(x) > g(x)$, а потом проверять основание, часть решения будет логически необоснованной.

Стандарт записи. ОДЗ $\rightarrow$ случаи $g(x) > 1$ и $0 < g(x) < 1 \rightarrow$ сравнение аргумента со степенью основания $\rightarrow$ пересечение условий внутри каждого случая $\rightarrow$ объединение ответов случаев.

23. Смена основания и знак знаменателя

По формуле замены основания

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

знак $\ln a$ положителен при $a > 1$ и отрицателен при $0 < a < 1$. Поэтому изменение направления неравенства - обычное деление на число известного знака.

Этот вывод связывает графический факт монотонности с алгебраическим правилом знака.

24. Сравнение логарифмов с разными основаниями

Универсального правила «сравнить аргументы» нет. Основания сначала согласуют, оценивают или переходят к одной переменной.

Пример. Сравнить $\log_2 x$ и $\log_4 x$ при $x > 0$.

$$\log_4 x = \frac{1}{2} \log_2 x$$

Неравенство $\log_2 x > \log_4 x$ равносильно $\left(\frac{1}{2}\right) \log_2 x > 0$, то есть $x > 1$. При $0 < x < 1$ оба логарифма отрицательны, и половина отрицательного числа больше исходного.

25. Смешанное показательно-логарифмическое неравенство

Задача. Решите $2^{\log_2(x-1)} \leq 4$.

ОДЗ логарифма: $x > 1$. По основному тождеству левая часть равна $x - 1$.

$$x - 1 \leq 4$$

Пересечение с ОДЗ даёт $1 < x \leq 5$. Преобразование является тождественным только на области $x - 1 > 0$.



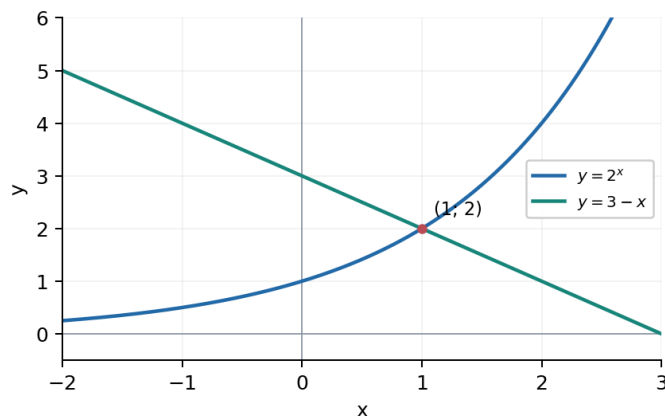
Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

26. Уравновешивание двух монотонных функций

Если одна часть строго возрастает, а другая строго убывает, уравнение имеет не более одного корня; для неравенства точка пересечения делит область на два промежутка.

Пример. Функция 2^x возрастает, а $3 - x$ убывает. Если найдено равенство при $x = 1$, то $2^x < 3 - x$ для $x < 1$ и $2^x > 3 - x$ для $x > 1$.

Для строгого вывода нужно обосновать монотонность обеих частей и проверить найденную точку пересечения.



Возрастающая показательная функция и убывающая прямая пересекаются только при $x = 1$.

27. Оценка в показательном неравенстве

После замены $t = a^x > 0$ часто применяются школьные оценки. Например,

$$t + \frac{1}{t} \geq 2$$

потому что $\frac{(t-1)^2}{t} \geq 0$. Поэтому неравенство $2^x + 2^{-x} \geq 2$ верно для всех x , а равенство достигается только при $x = 0$.

Полнота оценки. Нужно назвать область $t > 0$ и условие равенства в оценке. Без этого невозможно определить, когда достигается граница.

28. Полный разбор показательного неравенства

Задача. Решите $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 > 0$.

Вводим $t = 3^x > 0$. Получаем $(t - 1)(t - 9) > 0$, то есть $t < 1$ или $t > 9$. Пересечение с $t > 0$ даёт $0 < t < 1$ или $t > 9$.

Возвращаемся к возрастающей функции 3^x :

$$x < 0 \text{ или } x > 2$$

Границы не включаются из-за строгого знака. Обратная замена взаимно однозначна на $t > 0$, поэтому ответ полный.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

29. Полный разбор логарифмического неравенства

Задача. Решите $\log_{(\frac{1}{2})}(x^2 - 5x + 6) \geq -1$.

ОДЗ: $x^2 - 5x + 6 > 0$. Число -1 равно $\log_{(\frac{1}{2})} 2$. Основание меньше единицы, поэтому знак при переходе к аргументам меняется:

$$x^2 - 5x + 6 \leq 2$$

Одновременно сохраняем строгое условие $x^2 - 5x + 6 > 0$. Решаем систему двух квадратных неравенств и берём их общую часть.

Почему нужна система. Полученное условие ≤ 2 не гарантирует положительность аргумента: оно допускает отрицательные значения, где логарифм не существует.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

30. Параметр в показательной функции

Задача. При каких a неравенство $2^x > a$ имеет хотя бы одно решение?

Область значений 2^x - все положительные числа. Если $a \leq 0$, неравенство верно для любого x . Если $a > 0$, можно выбрать $x > \log_2 a$. Следовательно, хотя бы одно решение существует при любом действительном a .

Если бы требовалось выполнение для всех x , ответ был бы другим: поскольку 2^x стремится к нулю при $x \rightarrow -\infty$, условие $2^x > a$ для всех x возможно только при $a \leq 0$.

31. Параметр в аргументе логарифма

Задача. В зависимости от a решите $\log_2(x - a) > 1$.

ОДЗ: $x > a$. Основание больше единицы, поэтому $x - a > 2$. Это условие автоматически сильнее ОДЗ.

$$x > a + 2$$

Для каждого действительного a множество решений - луч $(a + 2; +\infty)$.

32. Лаборатория ошибок

Ошибка	Почему неверно	Как восстановить
знак поменяли по памяти	не указана монотонность	сначала сравнить основание с 1
после $t = a^x$ оставили $t \leq 0$	показательная функция положительна	пересечь с $t > 0$
сравнили аргументы без ОДЗ	логарифмы могут не существовать	выписать положительность каждого аргумента
объединили логарифмы и расширили область	произведение может быть положительным при отрицательных множителях	сохранить исходную ОДЗ
переменное основание разобрали одним случаем	функция может возрастать или убывать	разделить $g(x) > 1$ и $0 < g(x) < 1$

33. Контроль восстановления доказательств

- доказать монотонность показательной функции для двух типов основания;
- вывести правила сравнения степеней из монотонности;
- объяснить область $t > 0$ при показательной замене;
- вывести направление логарифмического сравнения из монотонности;
- обосновать сохранение исходной ОДЗ после объединения логарифмов;
- разобрать переменное основание на два исчерпывающих случая.

Контроль следующего урока. Ученик должен назвать математический факт, определяющий знак, и показать все ограничения до вычислений.

34. Дополнительная практика по основному банку

Номера	Назначение
1-10	Основа метода
11-16	Преобразования и ограничения
17-20	Повторение пройденного
21-30	Составные задачи
31-36	Развёрнутое решение
37-40	Сложные задачи и параметры

35. Карта урока

Модель	Основание	Направление	Обязательное ограничение
степени a с показателями f и g	$a > 1$	сохраняется	$a > 0, a \neq 1$
степени a с показателями f и g	$0 < a < 1$	меняется	$a > 0, a \neq 1$
$\log_a f$ сравнить с $\log_a g$	$a > 1$	сохраняется	$f > 0$ и $g > 0$
$\log_a f$ сравнить с $\log_a g$	$0 < a < 1$	меняется	$f > 0$ и $g > 0$

36. Быстрая проверка понимания

Вопрос	Критерий полного ответа
Почему при $0 < a < 1$ знак меняется?	Показательная или логарифмическая функция строго убывает.
Почему $t = a^x > 0$?	Положительное основание в действительной степени даёт положительное значение.
Почему сравнение аргументов требует ОДЗ?	Логарифмическая функция определена только при положительном аргументе.
Почему переменное основание делит решение на случаи?	По разные стороны от 1 логарифмическая функция имеет разную монотонность.
Как проверить полноту?	Исчерпать случаи основания, решить неравенство на каждой области и правильно объединить ответы.

37. Как упростить или усложнить урок

Уровень	Что оставить	Что добавить
55-65	одинаковые основания и простые логарифмы	схема монотонности с опорными точками
65-80	замены, объединение логарифмов, задания 1-20	самостоятельная проверка ОДЗ
80-100	переменное основание, дроби от логарифмов и параметры	функциональные методы и высокий банк 21-40

38. Финальное упражнение: вывести знак, а не вспомнить его

Решите одно показательное и одно логарифмическое неравенство сначала при основании 3, затем при основании $\frac{1}{3}$. Для каждой версии докажите направление сравнения через монотонность, сохраните ОДЗ и объясните, почему полученные случаи исчерпывают все возможности.

Критерий. В решении нет фразы «знак переворачиваем по правилу» без объяснения. Направление каждый раз связано с ростом или убыванием конкретной функции.

39. Разбор сложных задач ЕГЭ

Шесть крупных задач разбираются полностью: от ОДЗ и выбора метода до проверки, графической интерпретации и доказательства полноты ответа.

40. Задача 1 • квадратное неравенство по степени

Условие

Решите неравенство

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 \leq 0.$$

Разбор

Шаг 1.

Вводим положительную замену

$$t = 3^x > 0.$$

Шаг 2.

Получаем

$$t^2 - 10t + 9 \leq 0,$$

$$(t - 1)(t - 9) \leq 0.$$

- Поэтому

$$1 \leq t \leq 9.$$

Шаг 3.

Возвращаемся к x . Поскольку основание $3 > 1$, направление сохраняется:

$$1 \leq 3^x \leq 9 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2.$$

Контроль полноты

Интервал $[1, 9]$ целиком лежит в допустимой области $t > 0$; обратный переход выполнен по строгой монотонности 3^x .

Ответ: $[0, 2]$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

41. Задача 2 • рациональное неравенство после показательной замены

Условие

Решите неравенство

$$\frac{(2^x - 2)(2^x - 8)}{2^x - 4} \leq 0.$$

Разбор

Шаг 1.

Вводим

$$t = 2^x > 0.$$

- Знаменатель требует $t \neq 4$, что соответствует $x \neq 2$.

Шаг 2.

Получаем рациональное неравенство

$$\frac{(t-2)(t-8)}{t-4} \leq 0, \quad t > 0.$$

Шаг 3.

Критические точки: 2, 4, 8. Справа знак положителен; все множители имеют нечётную кратность, поэтому знаки чередуются.

Знаки выражения $\frac{(t-2)(t-8)}{t-4}$ при $t > 0$



Рисунок 1. В переменной t нули 2 и 8 включаются, а точка 4 остаётся выколотой.

- С учётом $t > 0$:

$$t \in (0, 2] \cup (4, 8].$$

- Поскольку 2^x возрастает:

$$0 < 2^x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 1,$$

$$4 < 2^x \leq 8 \Leftrightarrow 2 < x \leq 3.$$

Контроль полноты

Запрет $t = 4$ перенесён в запрет $x = 2$; вся положительная область новой переменной учтена.

Ответ: $(-\infty, 1] \cup (2, 3]$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

42. Задача 3 • логарифмическая сумма

Условие

Решите неравенство

$$\log_2(x-1) + \log_2(5-x) \geq 1.$$

Разбор

Шаг 1.

Исходная ОДЗ:

$$1 < x < 5.$$

Шаг 2.

На ОДЗ объединяем логарифмы:

$$\log_2((x-1)(5-x)) \geq 1.$$

Шаг 3.

Основание $2 > 1$, поэтому направление сохраняется:

$$(x - 1)(5 - x) \geq 2.$$

Шаг 4.

Преобразуем:

$$x^2 - 6x + 7 \leq 0.$$

- Корни квадратного трёхчлена:

$$x = 3 \pm \sqrt{2}.$$

- Следовательно,

$$3 - \sqrt{2} \leq x \leq 3 + \sqrt{2}.$$

Шаг 5.

Полученный отрезок целиком лежит в исходной ОДЗ.

Контроль полноты

Объединение логарифмов и переход к аргументам выполнены только после записи ОДЗ; обе границы дают допустимые положительные аргументы.

Ответ: $[3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}]$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

43. Задача 4 • рациональная функция от логарифма**Условие**

Решите неравенство

$$\frac{\log_2 x - 1}{\log_2 x - 2} \leq 0.$$

Разбор

Исходная ОДЗ:

$$x > 0, \quad \log_2 x \neq 2,$$

- то есть $x > 0, x \neq 4$.

Вводим

$$t = \log_2 x.$$

- Поскольку x пробегает $(0, +\infty)$, переменная t пробегает всю числовую прямую.

Решаем

$$\frac{t-1}{t-2} \leq 0.$$

- Получаем

$$t \in [1, 2).$$

Возвращаемся к x . Логарифм по основанию 2 возрастает:

$$1 \leq \log_2 x < 2 \Leftrightarrow 2 \leq x < 4.$$

Контроль полноты

Точка $t = 2$ исключена как ноль знаменателя; её образ $x = 4$ не попал в ответ.

Ответ: $[2, 4)$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

44. Задача 5 • неравенство с переменным основанием

Условие

Решите неравенство

$$\log_{x-1}(x+1) > 1.$$

Разбор

ОДЗ:

$$x - 1 > 0, \quad x - 1 \neq 1, \quad x + 1 > 0.$$

- Поэтому

$$x > 1, \quad x \neq 2.$$

На промежутке $1 < x < 2$ основание удовлетворяет

$$0 < x - 1 < 1.$$

- Логарифм убывает, поэтому

$$\log_{x-1}(x+1) > 1 \Leftrightarrow x+1 < x-1,$$

- что невозможно.

На промежутке $x > 2$ основание больше единицы. Логарифм возрастает, поэтому

$$\log_{x-1}(x+1) > 1 \Leftrightarrow x+1 > x-1.$$

- Последнее неравенство верно для всех x .

Контроль полноты

ОДЗ разбита на два промежутка именно по точке, где основание равно 1; направления сравнения в случаях обоснованы монотонностью.

Ответ: $(2, +\infty)$.

Экзаменационный акцент: переход к сравнению аргумента с первой степенью основания без разбиения по 1 недопустим.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

45. Задача 6 • ровно пять целых решений

Условие

Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$2^x + 2^{-x} \leq a$$

имеет ровно пять целых решений.

Разбор

Функция

$$f(x) = 2^x + 2^{-x}$$

- чётная, имеет минимум $f(0) = 2$ и строго возрастает при $x > 0$.

Если целых решений ровно пять, по симметрии это должны быть

$$-2, -1, 0, 1, 2.$$

- Значения ± 2 должны удовлетворять неравенству, а ± 3 - уже не должны.

Вычисляем точные пороги:

$$f(2) = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4},$$

$$f(3) = 8 + \frac{1}{8} = \frac{65}{8}.$$

Поэтому необходимо и достаточно

$$\frac{17}{4} \leq a < \frac{65}{8}.$$

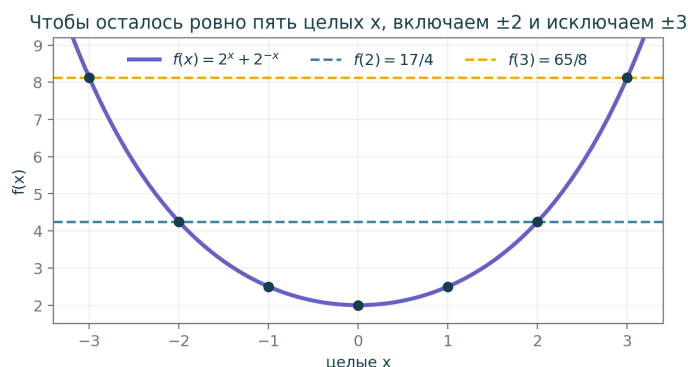


Рисунок 2. Нижняя граница включается, потому что ± 2 должны быть решениями; верхняя исключается, иначе добавятся ± 3 .

Контроль полноты

Из строгого возрастания f при $x > 0$ следует: вместе с ± 2 автоматически входят $0, \pm 1$, а исключение ± 3 исключает и все целые с большим модулем.

Ответ: $a \in \left[\frac{17}{4}, \frac{65}{8} \right)$.

46. Итог урока

Замена $t = a^x$ требует $t > 0$.

Направление сравнения определяется положением основания относительно 1.

Исходная логарифмическая ОДЗ сохраняется после любых преобразований.

Ноль знаменателя остаётся выколотой точкой в новой и исходной переменной.

Переменное основание требует разбиения на случаи.

В параметрическом подсчёте целых решений границы должны быть вычислены точно.

47. Как объяснить знак дроби с логарифмами

Знак дроби определяется двумя независимыми строками: числителем и знаменателем. Для $\frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{\log_2^2 x + 4\log_2 x + 1}$ сначала записываем $0 < x < 2$, затем отмечаем нуль числителя $\frac{1}{2}$ и два нуля знаменателя $r = 2^{-2-\sqrt{3}}$, $s = 2^{-2+\sqrt{3}}$. Знаменатель нельзя просто отбросить: на $(r; s)$ он отрицателен. Сначала сравниваем точки точно: $-2 - \sqrt{3} < -1 < -2 + \sqrt{3} < 1$. Возрастание степени 2 даёт $r < \frac{1}{2} < s < 2$. Только после этого рисуем ось и составляем ответ.



Порядок критических точек: $0 < r < 1/2 < s < 2$; r и s исключены.

48. Почему длины промежутка недостаточно для подсчёта целых

Для замкнутого отрезка $[L; R]$ число целых точек равно $\max(0; [R] - [L] + 1)$. Если граница открыта и сама является целой, эту точку вычитаем.

В задаче $(2^x - a)(2^x - 4) \leq 0$ одна граница по x равна 2. При $0 < a < 4$ три целых решения получаются из $-1 < \log_2 a \leq 0$, а при $a > 4$ - из $4 \leq \log_2 a < 5$. Отдельный случай $a \leq 0$ даёт бесконечное число целых решений.



Два промежутка параметра a показаны отдельно, каждый в своём масштабе.