

Урок 12. Экстремумы и наибольшее значение

Точка максимума и наибольшее значение функции отвечают на разные вопросы. Разберём смену знака производной, локальные экстремумы и поиск наибольшего и наименьшего значений на отрезке. Восемь примеров включают параболы, дробные функции и задачи на оптимизацию.

01. Точка экстремума и значение функции

Точка минимума - значение аргумента, около которого функция принимает не меньшие значения, чем в самой точке. Для максимума неравенство меняется на обратное. В школьных задачах «найти точку минимума» обычно означает найти число $x_{\min}$; если просят координаты точки графика, нужны оба числа $(x; f(x))$.

Например, у $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ точка минимума равна 2, минимальное значение равно 3, а вершина графика имеет координаты $(2; 3)$. Эти три ответа нельзя заменять друг другом.

Запомните. Локальный максимум описывает поведение около точки. Наибольшее значение на всём заданном промежутке требует сравнения всех допустимых кандидатов.

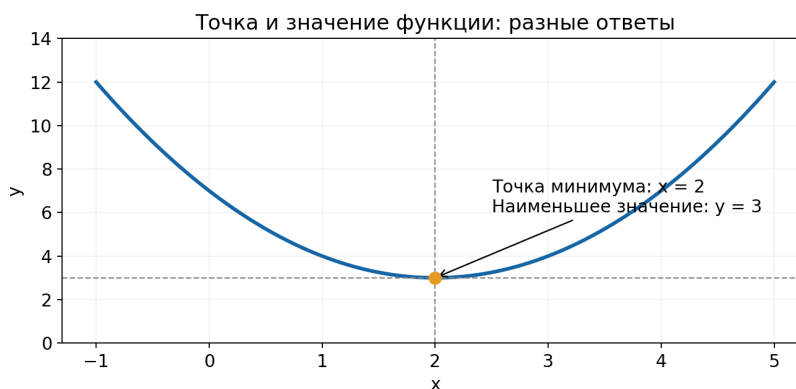


Рис. 1: У функции $y = x^2 - 4x + 7$ точка минимума $x = 2$, а наименьшее значение равно 3.

02. Зачем проверять знак производной

Для примеров с корнем удобно использовать степенное правило, а для натурального логарифма его производную:

$$(x^{3/2})' = \frac{3}{2}\sqrt{x}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Уравнение $f'(x) = 0$ находит стационарные точки, но не доказывает наличие экстремума. У функции x^3 в нуле горизонтальная касательная, однако слева и справа производная положительна: функция не меняет направление движения.

Алгоритм исследования таков: найдите область определения, вычислите производную, отметьте её нули и точки, где она не существует, затем исследуйте знак на полученных промежутках. Только точки области определения могут быть точками экстремума функции.

Знак слева	Знак справа	Вывод для непрерывной функции в точке
+	—	Локальный максимум
—	+	Локальный минимум
+	+	По этому признаку экстремума нет
—	—	По этому признаку экстремума нет

Непрерывность в рассматриваемой точке существенна. Во всех обычных полиномиальных примерах она выполнена. Для произвольной функции нельзя игнорировать разрывы и отдельно заданные значения.

03. Наибольшее и наименьшее на отрезке

Непрерывная функция на замкнутом отрезке достигает наибольшего и наименьшего значения. Для функций нашего курса удобно составить короткую таблицу кандидатов: оба конца отрезка и все внутренние критические точки. Для каждого кандидата вычисляют значение **исходной функции**, после чего сравнивают полученные числа.

Например, у $f(x) = x^2$ на $[-2; 3]$ производная обращается в нуль при $x = 0$. Проверяем $f(-2) = 4$, $f(0) = 0$, $f(3) = 9$. Наименьшее значение равно 0, наибольшее - 9. Если проверить только производную, значение 9 на границе будет потеряно.

На открытом промежутке такого обещания нет: $f(x) = x$ при $0 < x < 1$ не достигает ни 0, ни 1. Если в условии стоит $x > 0$, нельзя объявлять ноль допустимым концом отрезка.

04. Экстремумы без производной

Квадрат всегда неотрицателен. Поэтому выделение полного квадрата часто короче дифференцирования:

$$x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2 + 3 \geq 3.$$

Равенство достигается при $x = 2$. Для параболы с отрицательным коэффициентом при квадрате получаем максимум. На ограниченном отрезке дополнительно убедитесь, что вершина попала внутрь; иначе сравните значения на концах.

Для $x + 4/x$ при $x > 0$ производная равна $1 - 4/x^2$: она отрицательна до 2 и положительна после 2. Минимум действительно глобальный на положительной полуоси, потому что функция убывает до этой точки и возрастает после неё. Одного уравнения $f' = 0$ для этого вывода недостаточно.

05. Как составить функцию в задаче на оптимизацию

Сначала обозначьте одну переменную и выразите остальные величины через неё. Затем укажите допустимые значения. При периметре прямоугольника 20 стороны равны x и $10 - x$, поэтому $0 < x < 10$ и $S(x) = x(10 - x)$.

Смысл ограничения прост: обе стороны положительны. Максимум площади достигается при $x = 5$, то есть у квадрата со стороной 5, и равен 25. Число 5 отвечает на вопрос о стороне, число 25 - о площади.

При работе с параметром также удобно выделять квадрат. У $x^2 - 2ax + 5 = (x - a)^2 + 5 - a^2$ минимум по x равен $5 - a^2$. Теперь условие о минимуме превращается в уравнение относительно a .

06. Что проверить перед ответом

Не смешивайте график f с графиком f' . У первого экстремумы видны как повороты кривой, у второго важны переходы через горизонтальную ось. Подпишите, что найдено: аргумент, значение или пара координат. На отрезке обязательно проверьте обе границы.

07. Подробные объяснения и разобранные примеры

Разбор 1. Минимум по простейшей производной

УСЛОВИЕ

Найдите точку минимума функции f , если $f'(x) = 2x - 4$.

$$f'(x) = 2x - 4$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Сначала находим нуль производной, затем проверяем знак слева и справа.

ДО РЕШЕНИЯ.

Линейная функция $2x - 4$ возрастает: до своего нуля она отрицательна, после - положительна.

1. Находим критическую точку

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

В этой точке производная равна нулю.

2. Берём точку слева

$$f'(0) = -4 < 0$$

До 2 функция f убывает.

3. Берём точку справа

$$f'(3) = 2 > 0$$

После 2 функция f возрастает.

4. Классифицируем переход

$$- \rightarrow + \Rightarrow x_{\min} = 2$$

Убывание сменяется возрастанием.

Проверка. Получена именно абсцисса точки минимума, а не значение $f(2)$, которого условие не позволяет найти.

Типичная ошибка. Считать любой корень $f' = 0$ точкой максимума или минимума без проверки знака.

ОТВЕТ.

2

Разбор 2. Два экстремума кубической функции

УСЛОВИЕ

Найдите точки максимума и минимума функции.

$$f(x) = x^3 - 3x$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Для нескольких критических точек строим единую таблицу знаков производной.

ДО РЕШЕНИЯ.

Производная будет квадратной и может иметь два нуля - значит, возможны два экстремума.

1. Находим производную

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

Дифференцируем куб и линейное слагаемое.

2. Находим критические точки

$$x = -1; 1$$

Произведение равно нулю при нуле одного из множителей.

3. Расставляем знаки

$$\begin{array}{ccccc} (+) & | & (-) & | & (+) \\ & -1 & & 1 & \end{array}$$

Квадратичная производная положительна снаружи корней и отрицательна между ними.

4. Классифицируем

$$x = -1 : + \rightarrow - \Rightarrow \max; \quad x = 1 : - \rightarrow + \Rightarrow \min$$

Смотрим направление смены монотонности.

Проверка. $f(-1)=2$, $f(1)=-2$: локальный максимум действительно выше локального минимума.

Типичная ошибка. Назвать обе критические точки минимумами только потому, что f' в них равно нулю.

ОТВЕТ.

$$x_{\max} = -1, \quad x_{\min} = 1$$

Разбор 3. Наибольшее значение на отрезке**УСЛОВИЕ**

Найдите наибольшее значение функции на отрезке $[0;5]$.

$$f(x) = -x^2 + 6x + 1$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

На отрезке сравниваем значения в критических точках внутри отрезка и на обоих концах.

ДО РЕШЕНИЯ.

Парабола ветвями вниз, поэтому её вершина - естественный кандидат на максимум; концы всё равно проверяем.

1. Находим производную

$$f'(x) = -2x + 6$$

Производная $-x^2$ равна $-2x$.

2. Находим внутреннего кандидата

$$-2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

Точка 3 лежит внутри $[0;5]$.

3. Вычисляем три значения

$$f(0) = 1, \quad f(3) = 10, \quad f(5) = 6$$

Концы отрезка нельзя пропускать.

4. Выбираем наибольшее

$$\max\{1, 10, 6\} = 10$$

Вопрос требует значение функции, не координату.

Проверка. Вершина параболы имеет $x = -b/(2a) = 3$ - совпадает с критической точкой.

Типичная ошибка. Ответить 3 вместо 10: 3 - точка максимума, 10 - наибольшее значение.

ОТВЕТ.

10

Разбор 4. Минимум дробной функции на $x > 0$ **УСЛОВИЕ**

Найдите наименьшее значение функции при $x > 0$.

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Учитываем область определения до исследования и оставляем только критические точки из неё.

ДО РЕШЕНИЯ.

При $x \rightarrow 0+$ дробь $4/x$ растёт, при $x \rightarrow +\infty$ растёт x ; между ними должен быть минимум.

1. Фиксируем область

$$x > 0$$

Это дано условием и исключает отрицательные кандидаты.

2. Находим производную

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

Производная $4/x$ равна $-4/x^2$.

3. Отбираем критическую точку

$$x = 2$$

$x = -2$ не входит в область $x > 0$.

4. Проверяем знак

$$0 < x < 2 : f' < 0; \quad x > 2 : f' > 0$$

Получаем переход $- \rightarrow +$, значит, в $x=2$ минимум.

5. Находим значение

$$f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4$$

Спрашивают наименьшее значение функции.

Проверка. По неравенству $x + 4/x \geq 2\sqrt{4} = 4$ для $x > 0$ меньшего значения быть не может.

Типичная ошибка. Оставить $x = -2$ или записать в ответ точку 2 вместо значения 4.

ОТВЕТ.

4

Разбор 5. Оптимальная площадь прямоугольника

УСЛОВИЕ

Периметр прямоугольника равен 20. Найдите его наибольшую возможную площадь.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Выражаем обе стороны через одну переменную и учитываем, что длины должны быть положительными.

ДО РЕШЕНИЯ.

Полупериметр равен 10, поэтому стороны можно обозначить x и $10-x$, где $0 < x < 10$.

1. Строим модель

$$a = x, \quad b = 10 - x, \quad 0 < x < 10$$

Из $2(a+b)=20$ следует $a+b=10$.

2. Записываем площадь

$$S(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$$

Площадь равна произведению сторон.

3. Находим критическую точку

$$S'(x) = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$$

Точка входит в допустимый промежуток.

4. Подтверждаем максимум

$$S' : + \rightarrow - \text{ при } x = 5$$

Площадь сначала растёт, затем уменьшается.

5. Вычисляем площадь

$$S_{\max} = 5(10 - 5) = 25$$

Оптимальный прямоугольник оказался квадратом 5×5 .

Проверка. Стороны положительны, периметр $2(5+5)=20$.

Типичная ошибка. Найти $x=5$ и не ответить на вопрос о площади.

ОТВЕТ.

25

Разбор 6. Минимум функции с корнем на отрезке**УСЛОВИЕ**

Найдите наименьшее значение функции на отрезке $[1;50]$.

$$y = x\sqrt{x} - 9x + 25$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Для экстремума на отрезке сравниваем значение во внутренней критической точке с обоими концами.

ДО РЕШЕНИЯ.

$x\sqrt{x}=x^{3/2}$, поэтому производная вычисляется степенным правилом.

1. Дифференцируем

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 9$$

Производная $x^{3/2}$ равна $(3/2)x^{1/2}$.

2. Находим критическую точку

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} = 9 \Rightarrow \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x = 36$$

36 принадлежит $[1; 50]$.

3. Вычисляем значение в критической точке

$$y(36) = 36 \cdot 6 - 9 \cdot 36 + 25 = -83$$

Сначала $\sqrt{36}=6$.

4. Проверяем концы

$$y(1) = 17, \quad y(50) = 50\sqrt{50} - 425 > -83$$

Без концов вывод о минимуме на отрезке неполон.

5. Выбираем минимум

$$y_{\min} = -83$$

Это наименьшее из трёх значений.

Проверка. Производная отрицательна до 36 и положительна после 36, поэтому внутри отрезка это минимум.

Типичная ошибка. Ответить 36: это точка минимума, а требуется наименьшее значение -83 .

ОТВЕТ.

$$-83$$

Разбор 7. Точка максимума кубической функции**УСЛОВИЕ**

Найдите точку максимума функции.

$$y = x^3 - 300x + 5$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

После нахождения двух критических точек выбираем ту, в которой знак производной меняется $+\rightarrow-$.

ДО РЕШЕНИЯ.

Спрашивают точку максимума - в ответе нужна абсцисса, вычислять y необязательно.

1. Находим производную

$$y' = 3x^2 - 300 = 3(x - 10)(x + 10)$$

Выносим 3 и используем разность квадратов.

2. Находим критические точки

$$x = -10; 10$$

Оба линейных множителя по очереди обращаются в ноль.

3. Расставляем знаки

$$\begin{array}{ccccc} (+) & | & (-) & | & (+) \\ & -10 & & 10 & \end{array}$$

Производная положительна снаружи корней.

4. Выбираем максимум

$$x = -10 : \quad + \rightarrow -$$

В этой точке возрастание сменяется убыванием.

Проверка. В $x=10$ происходит $- \rightarrow +$, поэтому это минимум, а не второй максимум.

Типичная ошибка. Выбрать положительную критическую точку 10 только потому, что она больше.

ОТВЕТ.

$$-10$$

Разбор 8. Минимум функции с логарифмом**УСЛОВИЕ**

Найдите точку минимума функции.

$$y = x^2 - 20x + 48 \ln x - 97$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Для $\ln x$ сначала фиксируем $x > 0$; после приведения производной к дроби знаменатель положителен, поэтому знак задаёт числитель.

ДО РЕШЕНИЯ.

Обе найденные критические точки нужно классифицировать; в ответе требуется только точка минимума.

1. Записываем область

$$x > 0$$

Натуральный логарифм определён только для положительного аргумента.

2. Находим производную

$$y' = 2x - 20 + \frac{48}{x} = \frac{2(x-4)(x-6)}{x}$$

Приводим к общему знаменателю и раскладываем числитель.

3. Находим критические точки

$$x = 4; 6$$

Обе точки положительны; $x=0$ не входит в область.

4. Определяем знаки

$$\begin{array}{ccc} (+) & | & (-) & | & (+) \\ & 4 & & 6 & \end{array}$$

На $x>0$ знаменатель положителен, знак меняется в простых корнях числителя.

5. Выбираем минимум

$$x = 6 : \quad - \rightarrow +$$

Убывание сменяется возрастанием.

Проверка. Точка $x=4$ даёт $+\rightarrow-$, то есть максимум; классификация различает два кандидата.

Типичная ошибка. Включить $x=0$ как критическую точку или выбрать $x=4$ без таблицы знаков.

ОТВЕТ.

6

08. Опорные формулы

$$f'(x_0) = 0 \quad - \text{ кандидат, а не готовый экстремум}$$

$$+ \rightarrow - \Rightarrow x_{\max}; \quad - \rightarrow + \Rightarrow x_{\min}$$

$$\max_{[a;b]} f = \max\{f(a), f(b), f(x_1), \dots\}$$

$$\min_{[a;b]} f = \min\{f(a), f(b), f(x_1), \dots\}$$

09. Вопросы по теме**Равенство производной нулю гарантирует экстремум?**

Нет. Проверьте смену знака производной. Например, у x^3 в нуле производная равна нулю, но экстремума нет.

Почему нужно проверять концы отрезка?

Наибольшее или наименьшее значение может достигаться на границе, даже если производная там не равна нулю.

10. Самостоятельная работа

Сначала решите задания 1-20 в тесте. После проверки переходите к заданиям 21-35, затем к 36-40. Задания на повторение выделены отдельно. К каждому ошибочному ответу запишите причину и повторите решение без подсказки.

Предыдущая тема: Производная и касательная.

Следующая тема: Прикладные расчёты по формуле.