



Урок 18. Вероятность: несколько событий

В задачах с несколькими событиями выбор действия зависит от условий: события могут быть независимыми, несовместными или зависеть от предыдущего результата. Разберём правила сложения и умножения, дерево вероятностей и выбор без возвращения.

В задачах этого урока монеты и кубики считаются честными, повторные броски независимыми, а выбор предмета или сектора равномерным, если не указано другое условие.

01. Как выбрать действие с вероятностями

Сначала опишите событие словами. «Оба произошли» требует пересечения; «подошёл хотя бы один вариант» - объединения. Умножать обычные вероятности для пересечения можно при независимости. Для зависимых событий второй множитель должен учитывать уже произошедший первый результат.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A).$$

Если события независимы, $P(B | A) = P(B)$. При выборе без возвращения состав набора меняется, поэтому вероятность на втором шаге пересчитывают. При независимых бросках монеты результат первого броска не меняет вероятность второго.

Главное различие. Несовместные события не могут произойти вместе. Независимые события не изменяют вероятность друг друга. Это разные свойства.

02. «Хотя бы один», «ровно один» и «не менее двух»

«Хотя бы один» включает один, два и все остальные возможные успехи. Его противоположность - ни одного успеха. «Ровно один» исключает два успеха. Для двух независимых испытаний с вероятностями p и q получаются разные выражения:

$$P(\text{хотя бы один}) = 1 - (1 - p)(1 - q),$$

$$P(\text{ровно один}) = p(1 - q) + (1 - p)q.$$

Для трёх попыток «не менее двух» складывают из случаев «ровно два» и «три». При одинаковой вероятности успеха p это $3p^2(1 - p) + p^3$. Коэффициент 3 считает положение единственного неуспеха.

03. Упорядоченные исходы и наборы

Два кубика дают 36 равновозможных упорядоченных пар. Пары (2; 6) и (6; 2) различны, хотя сумма одинаковая. Возможные суммы от 2 до 12 не равновозможны: сумму 2 даёт одна пара, сумму 7 - шесть.

При одновременном выборе набора без учёта порядка удобно считать сочетания: $C(n, k) = n! / (k!(n - k)!)$. Числитель и знаменатель должны использовать один способ подсчёта. Нельзя поделить количество неупорядоченных благоприятных наборов на количество упорядоченных всех исходов.

04. От одного опыта к цепочке событий

На прошлом уроке вероятность находили внутри одного опыта: один раз бросали кубик, выбирали билет или вытаскивали шар. Теперь опыт состоит из нескольких шагов. Например, монету бросают дважды, два прибора включают одновременно или из коробки последовательно достают два предмета. Результат всего опыта нужно описывать целиком. При двух бросках монеты исход «орёл, решка» отличается от исхода «решка, орёл»: порядок шагов изменился, поэтому это два разных элементарных исхода.

Сначала переводим бытовую фразу на язык событий. Слово «и» обычно означает, что должны произойти оба события: первый стрелок попал и второй стрелок попал. Слово «или» означает, что подходит хотя бы один из перечисленных вариантов. Фраза «хотя бы один» допускает один, два и вообще все успехи. Фраза «ровно один» запрещает как отсутствие успехов, так и два успеха одновременно. Неверный перевод условия чаще всего приводит к неверной формуле.

Для двух шагов удобно составить таблицу исходов или дерево. Из начальной точки проводят ветви первого шага, а из конца каждой ветви - варианты второго. Вероятность полного пути находят по вероятностям на его ветвях. Несколько подходящих путей затем объединяют. Рисунок нужен не для украшения: он показывает, какие исходы пропущены, где события происходят вместе и какие случаи нельзя считать одним и тем же.

- Перевести условие: «и» - совместное выполнение требований; «или» - объединение допустимых вариантов.
- Отдельно отметить слова «хотя бы один», «ровно один», «не менее двух», «ни одного».
- Если вероятности на следующих шагах меняются, построить дерево с новыми числами на каждой ветви.
- После вычисления проверить границы $0 \leq P \leq 1$ и сравнить вложенные события.

05. Правило умножения: события происходят вместе

Для независимых событий вероятность совместного наступления равна произведению: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Независимость должна следовать из модели опыта или быть явно задана в условии. Отсутствие сведений о связи двух устройств или стрелков само по себе её не доказывает.

Почему вероятности перемножаются, видно на равновозможных исходах. При двух бросках честной монеты есть четыре исхода: ОО, ОР, РО, РР. Событию «дважды орёл» соответствует один исход из четырёх. Отдельно вероятность орла в каждой броске равна $\frac{1}{2}$, а произведение $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ даёт тот же результат. При трёх независимых шагах перемножают уже три множителя.

В задачах о надёжности важно различать исправность и отказ. Если вероятность отказа прибора равна 0,08, то вероятность его исправной работы равна $1 - 0,08 = 0,92$. Только после этого можно находить вероятность совместной работы двух независимых приборов. Ошибка возникает, когда бездумно перемножают вероятности отказа, хотя вопрос задан о работе.

- Для независимых событий: $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B)$.

- Для трёх независимых событий перемножить три вероятности.
- Без возвращения пересчитать состав после каждого выбора.
- Если дана вероятность отказа, вероятность работы равна $1 - P$ (отказа).

Разбор 1. Совместная работа двух независимых систем

Условие. Вероятность безотказной работы первой системы за смену равна 0,9, второй - 0,8. Системы работают независимо. Найдите вероятность того, что обе системы проработают смену без отказа.

Решение

1. Требуется одновременная безотказная работа первой и второй систем.
2. Для независимых событий используем произведение: $0,9 \cdot 0,8$.
3. $0,9 \cdot 0,8 = 0,72$.
4. Число 0,72 меньше каждой отдельной вероятности, что разумно для события «обе».

Ответ: 0,72

06. Правило сложения: подходит один из нескольких случаев

Когда условию соответствуют несколько разных полных путей, их вероятности складывают. Самый простой случай - несовместные события: они не могут произойти одновременно в одном опыте. При одном броске кубика выпадение 1 и выпадение 6 несовместны, поэтому

$P(1 \text{ или } 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$. При выборе одного билета категории «главный приз» и «утешительный приз» также не пересекаются, если один билет относится только к одной категории.

Если события могут произойти одновременно, простое сложение дважды считает их пересечение. Тогда действует общая формула $P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B)$. Например, событие А - выбранное число от 1 до 20 делится на 2, событие В - делится на 5. Числа, кратные 10, попали бы в обе группы, поэтому пересечение нужно вычесть один раз.

В цепочке из двух испытаний сложение часто выполняют после умножения. Сначала находят вероятность каждого полного пути, затем складывают подходящие пути. Для события «ровно один успех» подходят два пути: успех-неуспех и неуспех-успех. Вероятность каждого пути получают умножением, а общую вероятность - сложением. Правила не противоречат друг другу: они отвечают на разные логические действия.

- Несовместные события: $P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$.
- Общий случай: $P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B)$.
- Сначала перемножить вероятности вдоль каждого пути, затем сложить подходящие пути.
- Сумма вероятностей всех полных несовместных исходов равна 1.

Разбор 2. Несовместные цвета одного сектора

Условие. Круг разделён на 20 равных секторов: 5 красных, 7 синих и 8 белых. Стрелка останавливается на одном секторе. Найдите вероятность того, что сектор окажется красным или синим.

Решение

1. Зафиксируем один исход вращения и объединим непересекающиеся группы подходящих секторов.

2. Сектор не может быть одновременно красным и синим, поэтому события несовместны.

3. Благоприятных секторов $5 + 7 = 12$ из 20.

$$4. P = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Ответ: 0,6

Проверка. подходящие и неподходящие секторы вместе дают все 20 исходов; $\frac{12}{20} + \frac{8}{20} = 1$.

07. Противоположное событие и формула «хотя бы один»

Событие, противоположное A , происходит тогда и только тогда, когда A не произошло. Их вероятности в сумме дают 1: $P(\text{не } A) = 1 - P(A)$. Для фразы «хотя бы один успех» противоположным является событие «ни одного успеха». Оно часто состоит из одного пути, поэтому считать его значительно проще, чем перечислять один, два, три и больше успехов.

Для двух независимых испытаний с вероятностями успеха p_1 и p_2 вероятность хотя бы одного успеха равна $1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$. В скобках стоят вероятности неудач. Если два датчика срабатывают с вероятностями 0,7 и 0,8, вероятность, что не срабатывает ни один, равна $0,3 \cdot 0,2 = 0,06$. Тогда хотя бы один сработает с вероятностью 0,94.

Формула распространяется на любое число независимых испытаний. При трёх попытках с одинаковой вероятностью успеха p вероятность хотя бы одного успеха равна $1 - (1 - p)^3$. Степень показывает число независимых неудач, которые должны произойти одновременно. Нельзя писать $1 - p^3$: p^3 - вероятность трёх успехов, а не трёх неудач.

- $P(\text{хотя бы один}) = 1 - P(\text{ни одного})$.
- Для независимых испытаний $P(\text{ни одного})$ равно произведению вероятностей всех неудач.
- При одинаковой вероятности p : $P(\text{хотя бы один в } n \text{ испытаниях}) = 1 - (1 - p)^n$.
- Результат для «хотя бы один» не меньше вероятности любого отдельного успеха.

Разбор 3. Хотя бы одно попадание

Условие. Первый стрелок попадает с вероятностью 0,7, второй - с вероятностью 0,8. Они делают по одному независимому выстрелу. Найдите вероятность хотя бы одного попадания.

Решение

1. Противоположное событие - оба стрелка промахнулись.

2. Вероятности промаха: $1 - 0,7 = 0,3$ и $1 - 0,8 = 0,2$.

3. $P(\text{оба промахнулись}) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$.

4. $P(\text{хотя бы одно попадание}) = 1 - 0,06 = 0,94$.

Ответ: 0,94

Проверка. события «ни одного попадания» и «хотя бы одно попадание» противоположны;
 $0,06 + 0,94 = 1$.

08. Ровно один успех и ровно заданное число успехов

Событие «ровно один успех» при двух испытаниях состоит из двух несовместных путей: первый успешен, второй нет; первый неуспешен, второй успешен. Поэтому $P(\text{ровно один}) = p_1(1 - p_2) + (1 - p_1)p_2$. Оба слагаемых необходимы, даже если вероятности успеха одинаковы. Запись $p(1 - p)$ учитывает только один порядок и занижает ответ в два раза.

Если три независимых испытания имеют одинаковую вероятность успеха p , ровно один успех может стоять на первом, втором или третьем месте. Получается три пути с одинаковой вероятностью $p(1 - p)^2$, поэтому общий результат равен $3p(1 - p)^2$. Для ровно двух успехов есть три положения единственного неуспеха, и вероятность равна $3p^2(1 - p)$.

При разных вероятностях нельзя просто умножать один путь на число перестановок: пути имеют разные значения. Для трёх приборов с надёжностями 0,9, 0,8 и 0,7 событие «ровно два работают» состоит из трёх отдельных произведений. В одном отказывает третий, в другом второй, в третьем первый. Каждое произведение нужно подписать и только затем сложить.

- Два испытания: $P(\text{ровно один}) = p_1(1 - p_2) + (1 - p_1)p_2$.
- Три одинаковых испытания: $P(\text{ровно один}) = 3p(1 - p)^2$.
- Три одинаковых испытания: $P(\text{ровно два}) = 3p^2(1 - p)$.
- При разных вероятностях выписать каждый допустимый путь отдельно.

Разбор 4. Ровно один успешный сигнал

Условие. Первый независимый датчик передаёт сигнал с вероятностью 0,6, второй - с вероятностью 0,7. Найдите вероятность того, что сигнал передаст ровно один датчик.

Ровно один сигнал: два допустимых исхода

	Второй: да	Второй: нет
Первый: да	Оба сработали	Только первый
Первый: нет	Только второй	Ни один

Рис. 1: Разбор 4. Ровно один успешный сигнал.

Решение

1. Разделим сложный опыт на последовательные шаги и отметим, какие ветви соответствуют событию.
2. Первый передал, второй нет: $0,6 \cdot 0,3 = 0,18$.
3. Первый не передал, второй передал: $0,4 \cdot 0,7 = 0,28$.
4. Пути несовместны: $0,18 + 0,28 = 0,46$.

Ответ: 0,46

Проверка. два порядка успеха несовместны, оба учтены; 0,46 лежит между 0 и 1 и меньше вероятности события «хотя бы один».

09. Дерево вероятностей и выбор без возвращения

Дерево особенно полезно, когда вероятности зависят от предыдущего результата. У каждой вершины сумма вероятностей исходящих ветвей равна 1. Если из коробки без возвращения достают шары, рядом с ветвью записывают новый состав. После белого шара белых становится на один меньше; после чёрного уменьшается число чёрных. Общий знаменатель на втором шаге также уменьшается на единицу.

Вероятность полного пути получают умножением ветвей. Если из 5 белых и 3 чёрных шаров выбирают два без возвращения, путь Б-Ч имеет вероятность $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7}$, а путь Ч-Б - $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7}$. Для события «шары разных цветов» пути складывают: $\frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$. Два порядка нельзя незаметно превратить в один.

Если предмет возвращают, второй уровень дерева повторяет первый: состав коробки и вероятности не меняются. Тогда выборы независимы. Слова «после выбора шар вернули» принципиальны. Если выбирают два шара одновременно, это соответствует выбору без возвращения: один и тот же шар не может оказаться в наборе дважды.

- На каждой развилке сумма вероятностей исходящих ветвей равна 1.
- Вероятность пути - произведение ветвей; вероятность нескольких путей - их сумма.
- Без возвращения общий знаменатель на каждом следующем шаге уменьшается.
- Одновременный выбор нескольких предметов моделируется выбором без возвращения.

Разбор 5. Два шара без возвращения

Условие. В коробке 5 белых и 3 чёрных шара. Последовательно выбирают два шара без возвращения. Найдите вероятность того, что шары будут разных цветов.

Два шара без возвращения: 5 белых и 3 чёрных

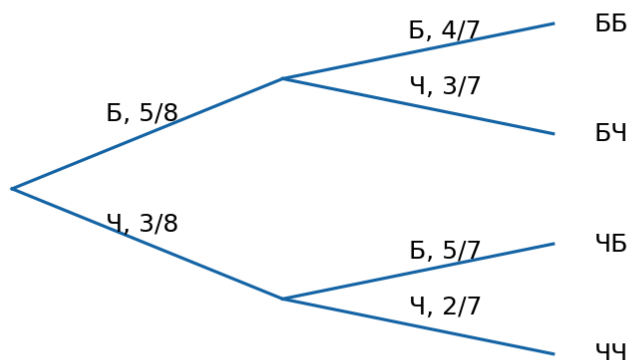


Рис. 2: Разбор 5. Два шара без возвращения.

Решение

1. Подходят два порядка: белый-чёрный и чёрный-белый.

$$2. P(\text{Б-Ч}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}.$$

$$3. P(\text{Ч-Б}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}.$$

$$4. P = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}.$$

Ответ: $\frac{15}{28}$

Проверка. два благоприятных порядка симметричны и не пересекаются; дробь $\frac{15}{28}$ лежит между 0 и 1.

10. Единый алгоритм и типичные ошибки

Единый алгоритм начинается не с формулы, а с расшифровки события. Подчеркните логические слова, запишите число испытаний и обозначьте успех. Затем выпишите один

полный исход, например УН или НУ. Если вероятности постоянны, отметьте независимость. Если состав меняется, нарисуйте дерево. Только после этого выбирайте умножение вдоль пути, сложение разных путей или переход к противоположному событию.

Первая типичная ошибка - считать «хотя бы один» как сумму отдельных вероятностей. Сумма может превысить 1 и обычно дважды учитывает совместный успех. Коррекция: заменить событие на «ни одного». Вторая ошибка - считать «ровно один» одним произведением. Коррекция: написать два порядка для двух испытаний. Третья ошибка - применять неизменные вероятности к выбору без возвращения.

Четвёртая ошибка - путать несовместность и независимость. Несовместные события не могут произойти вместе. Независимые события могут произойти вместе, но одно не меняет вероятность другого. Выпадение орла и решки в одном броске несовместно. Выпадение орла в первом и орла во втором броске независимо. Эти слова описывают разные свойства.

- Подчеркнуть логические слова → перечислить пути → определить независимость → выполнить умножение и сложение.
- Не путать независимые события с несовместными.
- Для «хотя бы один» сначала проверять возможность дополнения до 1.
- Для «ровно один» перечислять все положения единственного успеха.
- Финальная проверка: $0 \leq P \leq 1$, все пути учтены, ответ соответствует вопросу.

11. Типичные ошибки и способы их остановить

- Автоматически умножают при слове «и», не проверяя зависимость событий.
- Складывают вероятности событий, которые могут произойти одновременно.
- После выбора без возвращения оставляют прежний знаменатель.
- Считают «хотя бы один» как вероятность ровно одного успеха.
- В задаче «ровно один» учитывают только один порядок успеха и неуспеха.
- Не проверяют, что вероятности всех полных путей дерева суммируются в 1.

12. Дополнительные разборы

Разбор 6. Условная вероятность после сокращения пространства

УСЛОВИЕ

Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность того, что сумма очков равна 10.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

После дополнительного условия строим новое пространство исходов, а не используем старые 36 исходов.

ДО РЕШЕНИЯ.

В каждом броске теперь допустимы только значения 1, 2, 3, 4, 5.

1. Считаем условные исходы

$$5 \cdot 5 = 25$$

Два независимых броска, в каждом пять допустимых значений.

2. Ищем сумму 10

$$(5; 5)$$

Пары (4;6) и (6;4) запрещены условием.

3. Вычисляем вероятность

$$P = \frac{1}{25} = 0,04$$

Благоприятен один из 25 условно равновероятных исходов.

Проверка. Без условия было бы три пары; после исключения шестёрок остаётся только одна.

Типичная ошибка. Делить на 36 или оставить пары с шестёркой в числителе.

ОТВЕТ.

$$0,04$$

Разбор 7. Хотя бы одна лампа не перегорит**УСЛОВИЕ**

Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой за год равна 0,5. Лампы перегорают независимо. Найдите вероятность того, что хотя бы одна лампа не перегорит.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Событие «хотя бы одна не перегорит» противоположно событию «перегорели все».

ДО РЕШЕНИЯ.

Умножать вероятности можно, потому что независимость дана в условии.

1. Переходим к дополнению

$$\overline{A} = \{\text{все три перегорели}\}$$

Это единственный способ, при котором ни одной исправной лампы не останется.

2. Находим вероятность дополнения

$$P(\overline{A}) = 0,5^3 = 0,125$$

Для трёх независимых перегораний вероятности перемножаются.

3. Возвращаемся к событию

$$P(A) = 1 - 0,125 = 0,875$$

Событие и его дополнение исчерпывают все исходы.

Проверка. $0,875+0,125=1$.

Типичная ошибка. Вычислить $1-0,5=0,5$, учитывая только одну лампу.

ОТВЕТ.

$$0,875$$

Разбор 8. Два фломастера без возвращения

УСЛОВИЕ

В коробке 4 синих, 3 красных и 9 зелёных фломастеров. Случайно выбирают два. Найдите вероятность выбрать один синий и один красный.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Для выбора без возвращения можно считать сочетания или сложить два возможных порядка цветов.

ДО РЕШЕНИЯ.

Всего 16 фломастеров; после первого выбора остаётся 15.

1. Считаем первый порядок

$$P(\text{синий, красный}) = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15}$$

После синего остаются три красных среди 15.

2. Считаем второй порядок

$$P(\text{красный, синий}) = \frac{3}{16} \cdot \frac{4}{15}$$

Событие допускает и обратный порядок.

3. Складываем

$$P = \frac{12 + 12}{240} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Два порядка несовместны.

4. Проверяем сочетаниями

$$\frac{4 \cdot 3}{\binom{16}{2}} = \frac{12}{120} = 0,1$$

Независимый способ даёт тот же результат.

Проверка. Два способа подсчёта совпали.

Типичная ошибка. Умножить $4/16$ на $3/16$: второй выбор делается уже из 15 предметов.

ОТВЕТ.

$$0,1$$

13. Вопрос по теме

Чем независимость отличается от несовместности?

Независимые события не меняют вероятности друг друга. Несовместные события не могут произойти вместе. Это разные условия; ненулевые несовместные события не являются независимыми.

14. Самостоятельная работа

В тесте 40 заданий. Начните с заданий 1-20, затем переходите к 21-35 и 36-40. Решите самостоятельно и только после этого откройте объяснение. Задания на повторение отмечены отдельно.

Перейти к тестовым заданиям урока 18

Предыдущий урок: Вероятность: один опыт.