



Тригонометрические уравнения

Теория и разобранные примеры

Свойства, условия применения и пошаговые объяснения. Используйте оглавление и закладки PDF для перехода к нужной теме.

Содержание

01. Тригонометрическое уравнение - это поиск точек на окружности	3
02. Периодичность объясняет бесконечность решений	3
03. Уравнение $\sin x = a$ имеет решения только при $ a \leq 1$	3
04. Арксинус выбирает главный угол, а окружность добавляет второй	4
05. Частные случаи $\sin x = 0$, $\sin x = 1$ и $\sin x = -1$	4
06. Уравнение $\cos x = a$ выводится вертикальной прямой	5
07. Частные случаи для косинуса	5
08. Уравнение $\tan x = a$ имеет одну точку за период π	6
09. Котангенс и его период	6
10. Таблица простейших уравнений не заменяет доказательство	6
11. Отбор корней на промежутке - отдельная часть решения	7
12. Пример полного отбора корней	7
13. Разложение на множители сохраняет все ветви	8
14. Уравнение после переноса и применение формулы двойного угла	8
15. Однородное уравнение второй степени	8
16. Однородное уравнение первой степени	9
17. Линейная комбинация синуса и косинуса	9
18. Замена $t = \sin x$ или $t = \cos x$ требует диапазона	10
19. Замена $t = \sin x + \cos x$	10
20. Формулы понижения степени превращают квадрат в первую степень	10
21. Сумма в произведение создаёт нулевое произведение	11
22. Равенство одноимённых функций	11
23. Равенство косинусов	11
24. Деление на тригонометрическую функцию требует отдельной проверки	12
25. Универсальная замена через половинный угол	12

26. Полный разбор уравнения с отбором	12
27. Полный разбор задания 13 с преобразованием	13
28. Параметр и область значений	13
29. Лаборатория ошибок	14
30. Контроль восстановления доказательств	14
31. Дополнительная практика по основному банку	14
32. Карта урока	15
33. Быстрая проверка понимания	15
34. Как упростить или усложнить урок	15
35. Финальное упражнение: вывести формулы с пустой окружности	16
36. Разбор сложных задач ЕГЭ	16
37. Задача 1 • квадратное уравнение относительно синуса	16
38. Задача 2 • факторизация без потери ветви	17
39. Задача 3 • линейная комбинация синуса и косинуса	19
40. Задача 4 • равенство косинусов	20
41. Задача 5 • сокращение только после ОДЗ	22
42. Задача 6 • параметр и число корней на отрезке	23
43. Итог урока	24
44. Параметр: считаем углы, а не только корни замены	25

01. Тригонометрическое уравнение - это поиск точек на окружности

Число $\sin x$ - ордината точки единичной окружности, $\cos x$ - её абсцисса. Поэтому простейшее уравнение спрашивает: при каких углах точка имеет заданную координату.

$$P(\cos x, \sin x)$$

Одна и та же точка получается после любого целого числа полных оборотов. Именно поэтому ответы содержат параметр k и период 2π или π .

Главный принцип. Общая формула корней не появляется из таблицы. Сначала на окружности находим все точки с нужной координатой, затем добавляем полные обороты.

02. Периодичность объясняет бесконечность решений

После поворота на 2π точка возвращается в исходное положение, поэтому синус и косинус повторяются.

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi k) = \cos x$$

Тангенс - отношение синуса к косинусу. После поворота на π обе координаты меняют знак, а их отношение сохраняется.

$$\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x$$

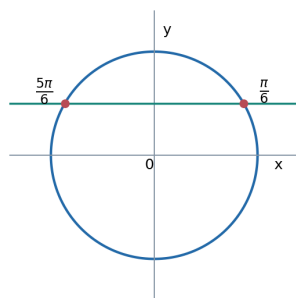
Здесь и далее k - любое целое число. Параметр перечисляет все обороты и не является дополнительной неизвестной уравнения.

03. Уравнение $\sin x = a$ имеет решения только при $|a| \leq 1$

Ордината точки единичной окружности лежит от -1 до 1 . Поэтому при $|a| > 1$ горизонтальная прямая $y = a$ не пересекает окружность и решений нет.

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

При $|a| < 1$ горизонтальная прямая пересекает окружность в двух точках за один полный оборот. При $a = 1$ или $a = -1$ точки сливаются в одну.



Синус равен 1/2: две точки одной ординаты.

Решения $\sin x = a$ как две точки одинаковой ординаты на единичной окружности

04. Арксинус выбирает главный угол, а окружность добавляет второй

Для a от -1 до 1 число $\alpha = \arcsin a$ - единственный угол на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a .

$$\sin \alpha = a, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

Вторая точка с той же ординатой симметрична относительно вертикальной оси и соответствует углу $\pi - \alpha$. Добавляя полные обороты, получаем две семьи.

$$x = \alpha + 2\pi k \text{ или } x = \pi - \alpha + 2\pi k$$

После подстановки $\alpha = \arcsin a$ возникает общая формула. Она доказана геометрией окружности и периодичностью.

Проверка полноты. Горизонтальная прямая пересекает окружность не более чем в двух точках. Обе точки названы, а $2\pi k$ перечисляет все повторения - значит, других корней нет.

05. Частные случаи $\sin x = 0$, $\sin x = 1$ и $\sin x = -1$

Для нулевой ординаты точка лежит на горизонтальном диаметре. Углы отличаются на π :

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k$$

Верхняя и нижняя точки окружности дают соответственно:

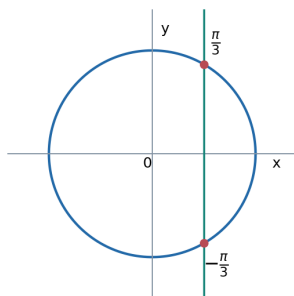
$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

Частные формулы полезнее общей: они короче и не создают две совпадающие семьи.

06. Уравнение $\cos x = a$ выводится вертикальной прямой

Абсцисса точки лежит от -1 до 1 . При $|a| < 1$ вертикальная прямая $x = a$ пересекает окружность в двух точках, симметричных относительно горизонтальной оси.



Косинус равен $1/2$: две точки одной абсциссы.

Решения $\cos x = a$ как две точки одинаковой абсциссы

Пусть $\alpha = \arccos a$ - главный угол на отрезке $[0; \pi]$. Тогда второй угол равен $-\alpha$, а все решения имеют вид:

$$x = \pm \alpha + 2\pi k$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k$$

Почему знак $\pm$ здесь не теряет решений. Две точки симметричны относительно оси Ox , поэтому их углы противоположны с точностью до полного оборота.

07. Частные случаи для косинуса

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k$$

В уравнении $\cos x = 0$ две точки за полный оборот, поэтому шаг между соседними корнями равен π . Для значений ± 1 за оборот есть одна точка, и период семейства равен 2π .

08. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет одну точку за период π

Тангенс определён при $\cos x \neq 0$. На каждом промежутке между соседними точками разрыва функция $\operatorname{tg} x$ строго возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, поэтому принимает любое действительное значение ровно один раз.

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$$

Формула содержит один главный угол и период π . Ограничение $\cos x \neq 0$ автоматически выполняется для найденных углов, потому что конечное значение тангенса существует.

Частный случай. $\operatorname{tg} x = 0$ тогда и только тогда, когда $\sin x = 0$ и $\cos x \neq 0$. Поэтому $x = \pi k$.

09. Котангенс и его период

Котангенс определён при $\sin x \neq 0$ и также имеет период π . Если используется arctg , уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ можно переписать как $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$ при $a \neq 0$.

Для $a = 0$ получаем $\cos x = 0$ при $\sin x \neq 0$, то есть

$$\operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

Ограничение. Переход к обратному числу требует $a \neq 0$ и существования обеих функций. Нулевой случай разбирается отдельно.

10. Таблица простейших уравнений не заменяет доказательство

Уравнение	Геометрическая идея	Общая запись
$\sin x = a$	две точки одной ординаты	$\arcsin a + 2\pi k$ или $\pi - \arcsin a + 2\pi k$
$\cos x = a$	две точки одной абсциссы	$\pm \arccos a + 2\pi k$
$\operatorname{tg} x = a$	одна точка на каждом промежутке длины π	$\operatorname{arctg} a + \pi k$
$\sin x = 0$	горизонтальный диаметр	πk

Ученик сильной группы должен уметь восстановить любую строку по окружности, области значений и периоду.

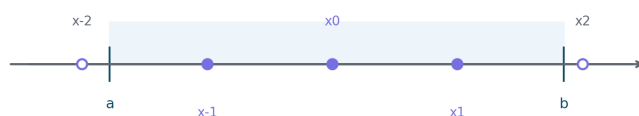
11. Отбор корней на промежутке - отдельная часть решения

После получения общей формулы нужно найти только те целые значения k , при которых корень лежит в заданном промежутке. Подстановка нескольких k наугад не доказывает полноту.

Для каждой семьи составляем двойное неравенство, решаем его относительно k и перечисляем все целые значения в найденном диапазоне.

$$A \leq \alpha + 2\pi k \leq B$$

1) записать общую серию 2) ограничить целый номер n 3) перечислить корни



Отбор корней: общая формула превращается в конечный набор точек на заданном промежутке

Стандарт записи задания 13. Сначала вывести все корни, затем отдельным абзацем провести отбор на промежутке. Ответ без общей формулы или без обоснования отбора неполон.

12. Пример полного отбора корней

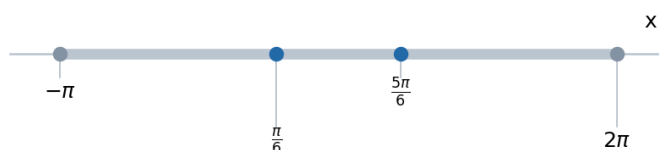
Задача. Решите $\sin x = \frac{1}{2}$ и отберите корни на $[-\pi; 2\pi]$.

На одном обороте углы $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Общие семьи:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ или } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

Для первой семьи условие $-\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq 2\pi$ даёт целые $k = 0$. Для второй семьи получается тот же набор $k = 0$. Дополнительно проверяем соседние $k = -1$ и $k = 1$ по границам; они уже выходят из отрезка.

Ответ на отрезке: $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$.



Границы промежутка и все корни отмечены отдельно.

13. Разложение на множители сохраняет все ветви

Пример. Решите $\sin x \cdot (2 \cos x - 1) = 0$.

По свойству нулевого произведения получаем две равноправные ветви:

$$\sin x = 0 \text{ или } \cos x = \frac{1}{2}$$

Первая даёт $x = \pi k$. Вторая - $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. Обе семьи входят в ответ.

Запрет. Деление на $\sin x$ или на $2 \cos x - 1$ потеряло бы соответствующую ветвь. Факторизация должна заканчиваться нулевым произведением, а не сокращением.

14. Уравнение после переноса и применение формулы двойного угла

Задача. Решите $\sin 2x = \sin x$.

Используем доказанную формулу $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ и переносим всё в одну часть:

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

Дальше получаем две семьи, как в предыдущем блоке. Мы не делим на $\sin x$, поэтому корни $\sin x = 0$ сохраняются.

15. Однородное уравнение второй степени

Уравнение $A \sin^2 x + B \sin x \cos x + C \cos^2 x = 0$ называют однородным. Если $\cos x \neq 0$, можно разделить на $\cos^2 x$ и перейти к тангенсу.

$$A \tan^2 x + B \tan x + C = 0$$

Но до деления отдельно проверяем $\cos x = 0$ в исходном уравнении. Если эти значения являются решениями, они должны быть добавлены.

Пример. Для $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$ сначала проверяем $\cos x = 0$: тогда левая часть равна 1, корней нет. Деление разрешено, после чего $t^2 - t - 2 = 0$ для $t = \tan x$.

Доказательный акцент. Фраза «делим на $\cos^2 x$ » должна сопровождаться проверкой нулевого случая. Это тот же принцип, что деление на переменную в алгебраическом уравнении.

16. Однородное уравнение первой степени

Выражение $A \sin x + B \cos x$ можно привести к одной функции или решить делением на $\cos x$ после проверки $\cos x = 0$.

Пример. $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$.

При $\cos x = 0$ исходное равенство не выполняется. Поэтому делим на $\cos x$ и получаем

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$$

Альтернативно левая часть равна $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, что приводит к той же семье. Совпадение способов служит проверкой.

17. Линейная комбинация синуса и косинуса

Положим $R = \sqrt{A^2 + B^2}$. Существуют $\cos \varphi = \frac{A}{R}$ и $\sin \varphi = \frac{B}{R}$. По формуле синуса суммы

$$A \sin x + B \cos x = R \sin(x + \varphi)$$

Существование угла φ гарантирует основное тождество: $\left(\frac{A}{R}\right)^2 + \left(\frac{B}{R}\right)^2 = 1$.

Пример. $3 \sin x + 4 \cos x = 5$ превращается в $5 \sin(x + \varphi) = 5$, где $\cos \varphi = \frac{3}{5}$, $\sin \varphi = \frac{4}{5}$.
Значит, $\sin(x + \varphi) = 1$.

Что доказываем. Амплитуда R не угадывается. Она выбрана так, чтобы коэффициенты после деления стали координатами точки единичной окружности.

При $A = B = 0$ левая часть тождественно равна нулю. Вспомогательный угол и деление на R используются только при $R > 0$.

18. Замена $t=\sin x$ или $t=\cos x$ требует диапазона

Если уравнение квадратично относительно одной функции, вводим $t = \sin x$ или $t = \cos x$. Для новой переменной обязательно $-1 \leq t \leq 1$.

Пример. $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$.

$$t = \cos x, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

Получаем $t = 1$ и $t = \frac{1}{2}$. Оба значения входят в диапазон, поэтому решаем две простейшие тригонометрические ветви.

Если вспомогательный корень оказался, например, $t = 2$, он отбрасывается до обратной замены как недостижимое значение косинуса.

19. Замена $t=\sin x + \cos x$

В симметричных выражениях полезно использовать

$$t = \sin x + \cos x$$

Тогда после возведения в квадрат

$$t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$$

а область новой переменной следует из представления $t = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$:

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

Ограничение. Не каждое число, найденное из вспомогательного уравнения по t , достигается суммой $\sin x + \cos x$. Диапазон проверяется до возвращения к x .

20. Формулы понижения степени превращают квадрат в первую степень

Из формулы двойного угла выводятся

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Эти формулы полезны, когда $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ входят с разными коэффициентами, но нет произведения $\sin x \cos x$.

Пример. Уравнение $3 \sin^2 x - \cos^2 x = 1$ после подстановки формул понижения становится линейным относительно $\cos 2x$.

21. Сумма в произведение создаёт нулевое произведение

Если в уравнении стоит сумма синусов или косинусов, применяем формулы, выведенные на предыдущем уроке.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Пример. $\sin 3x + \sin x = 0$.

$$2 \sin 2x \cos x = 0$$

Получаем $\sin 2x = 0$ или $\cos x = 0$. Вторая семья частично может входить в первую, но это не ошибка: в ответе можно объединить совпадающие корни после сравнения.

22. Равенство одноимённых функций

Формулу решения $\sin u = \sin v$ выводим из разности синусов:

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u + v}{2} \sin \frac{u - v}{2}$$

Нулевое произведение даёт две семьи:

$$u - v = 2\pi k \text{ или } u + v = \pi + 2\pi k$$

То есть $u = v + 2\pi k$ или $u = \pi - v + 2\pi k$. Готовая формула является следствием доказанной факторизации, а не правилом без основания.

23. Равенство косинусов

Из формулы разности косинусов

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u + v}{2} \sin \frac{u - v}{2}$$

следует

$$u = v + 2\pi k \text{ или } u = -v + 2\pi k$$

Короткая запись $u = \pm v + 2\pi k$ допустима после понимания двух ветвей.

24. Деление на тригонометрическую функцию требует отдельной проверки

Контрпример. В уравнении $\sin x = \sin x \cos x$ деление на $\sin x$ даёт $\cos x = 1$ и теряет все корни $\sin x = 0$.

Правильный ход - перенести и вынести общий множитель:

$$\sin x (1 - \cos x) = 0$$

Теперь рассматриваются обе ветви. Корни $\cos x = 1$ уже входят в $\sin x = 0$, поэтому итог можно сократить после доказанного сравнения множеств.

25. Универсальная замена через половинный угол

Для сложных рациональных выражений от $\sin x$ и $\cos x$ можно использовать $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$. Тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Формулы выводятся из двойного угла. Замена не описывает напрямую точки $x = \pi + 2\pi k$, где $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ не определён, поэтому эти значения проверяются отдельно в исходном уравнении.

Граница применения. Это школьный резервный метод для сильной группы, а не первый выбор. Сначала ищите факторизацию, формулы суммы и однородность.

26. Полный разбор уравнения с отбором

Задача. Решите $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ и отберите корни на $[0; 2\pi]$.

Вводим $t = \cos x$, $-1 \leq t \leq 1$. Получаем $(2t - 1)(t - 1) = 0$, то есть $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = 1$.

Общие решения:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ или } x = 2\pi k$$

На $[0; 2\pi]$ первая семья даёт $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$, вторая - 0 и 2π . Обе границы включены, поэтому оба значения второй семьи входят в ответ.



Границы промежутка и все корни отмечены отдельно.

27. Полный разбор задания 13 с преобразованием

Задача. Решите $\sin 2x + \sin x = 0$.

Используем $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$:

$$\sin x (2 \cos x + 1) = 0$$

Первая ветвь: $x = \pi k$. Вторая ветвь: $\cos x = -\frac{1}{2}$, поэтому $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$.

Полнота решения обеспечена нулевым произведением и полными формулами простейших уравнений. При отборе на промежутке каждая семья рассматривается отдельно.

28. Параметр и область значений

Задача. При каких a уравнение $\sin x = a - 2$ имеет решения?

Синус принимает значения только на отрезке $[-1; 1]$. Поэтому необходимо и достаточно

$$-1 \leq a - 2 \leq 1$$

Отсюда $1 \leq a \leq 3$. Для каждого a из этого отрезка горизонтальная прямая пересекает окружность хотя бы в одной точке; вне отрезка пересечений нет.

Доказательство существования. Диапазон функции даёт не только необходимое, но и достаточное условие: синус принимает каждое значение между -1 и 1 .

29. Лаборатория ошибок

Ошибка	Почему неверно	Как восстановить
записали одну семью для $\sin x = a$	за оборот обычно две точки	нарисовать горизонтальную прямую на окружности
потеряли период	назван только главный угол	добавить полные обороты
делили на $\sin x$ или $\cos x$	нулевая ветвь могла содержать корни	перенести и факторизовать либо проверить нулевой случай
после $t = \cos x$ взяли $t = 2$ отобрали k перебором	косинус не достигает 2 не доказана полнота	записать $-1 \leq t \leq 1$ решить двойное неравенство для каждой семьи

30. Контроль восстановления доказательств

- вывести две семьи $\sin x = a$ по двум точкам одинаковой ординаты;
- вывести формулу $\cos x = a$ по симметрии относительно оси Ox ;
- объяснить период π у тангенса через одновременную смену знаков координат;
- доказать формулы $\sin u = \sin v$ и $\cos u = \cos v$ через разложение разности;
- обосновать проверку нулевого случая перед делением;
- провести полный отбор корней с помощью неравенств для k .

31. Дополнительная практика по основному банку

Номера	Назначение
1-10	Основа метода
11-16	Преобразования и ограничения
17-20	Повторение пройденного
21-30	Составные задачи
31-36	Развёрнутое решение
37-40	Сложные задачи и параметры

32. Карта урока

Модель	Геометрический источник	Ограничение	Проверка полноты
$\sin x = a$	горизонтальная прямая	$ a \leq 1$	две точки + полные обороты
$\cos x = a$	вертикальная прямая	$ a \leq 1$	симметрия относительно Ох
$tgx = a$	строгая монотонность на ветви	$\cos x \neq 0$	одна точка за период π
сложное уравнение	тождественное преобразование	ОДЗ делений и замен	все ветви нулевого произведения

33. Быстрая проверка понимания

Вопрос	Критерий полного ответа
Почему у $\sin x = a$ обычно две семьи?	Горизонтальная прямая пересекает окружность в двух симметричных точках.
Почему у $tgx = a$ период π ?	После полуоборота синус и косинус меняют знак, их отношение сохраняется.
Почему нельзя делить на $\sin x$?	Можно потерять ветвь $\sin x = 0$.
Почему $t = \cos x$ ограничена?	Абсцисса точки единичной окружности лежит между -1 и 1 .
Как доказать полный отбор?	Для каждой общей семьи решить неравенство относительно целого k .

34. Как упростить или усложнить урок

Уровень	Что оставить	Что добавить
55-65	простейшие уравнения и окружность	готовые схемы отбора
65-80	факторизация, замены, задания 1-20	самостоятельный выбор формулы

Уровень	Что оставить	Что добавить
80-100	полное задание 13, однородные уравнения и параметры	альтернативные способы и высокий банк 21-40

35. Финальное упражнение: вывести формулы с пустой окружности

Не пользуясь таблицей, нарисуйте единичную окружность и восстановите общие решения $\sin x = a$, $\cos x = a$ и $\operatorname{tg} x = a$. Затем решите одно составное уравнение, сведите его к простейшим и выполните полный отбор корней на промежутке.

Критерий. Каждая семья имеет геометрическое объяснение, период, параметр полного оборота и доказательство полноты отбора.

36. Разбор сложных задач ЕГЭ

Шесть крупных задач разбираются полностью: от ОДЗ и выбора метода до проверки, графической интерпретации и доказательства полноты ответа.

37. Задача 1 • квадратное уравнение относительно синуса

Условие

Решите уравнение

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

и укажите все корни на отрезке $[0; 2\pi]$.

Разбор

Шаг 1.

Вводим $t = \sin x$, где обязательно

$$-1 \leq t \leq 1.$$

Шаг 2.

Решаем квадратное уравнение:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0,$$

$$(2t - 1)(t - 1) = 0.$$

- Поэтому

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \sin x = 1.$$

Шаг 3.

На $[0; 2\pi]$ первая ветвь даёт

$$x = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{5\pi}{6},$$

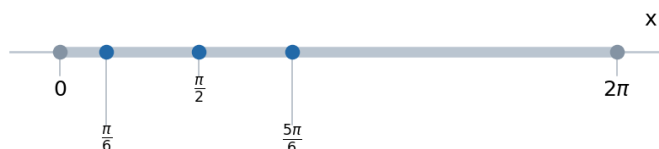
- а вторая -

$$x = \frac{\pi}{2}.$$

Контроль полноты

Оба допустимых корня квадратного уравнения разобраны; отрезок длиной в один период просмотрен полностью, границы проверены.

Ответ: $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}$.



Границы промежутка и все корни отмечены отдельно.

38. Задача 2 • факторизация без потери ветви

Условие

Решите уравнение

$$\sin 2x = \cos x$$

и отберите корни на отрезке $[-\pi; 2\pi]$.

Разбор

Шаг 1.

Используем формулу двойного угла:

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

Шаг 2.

Переносим всё в одну часть и выносим общий множитель:

$$\cos x (2 \sin x - 1) = 0.$$

- Делить на $\cos x$ нельзя: была бы потеряна целая ветвь.

Шаг 3.

Первая ветвь:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Из условия $-\pi \leq \frac{\pi}{2} + \pi k \leq 2\pi$ получаем

$$-\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{3}{2},$$

- то есть $k = -1, 0, 1$. Корни:

$$-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}.$$

Шаг 4.

Вторая ветвь:

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

- На заданном отрезке получаем

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6}.$$

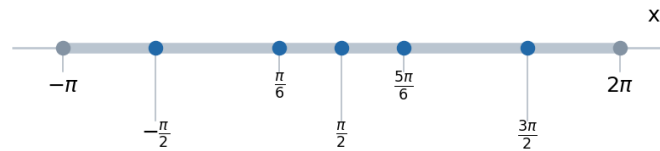
Контроль полноты

Нулевое произведение разобрано по обеим ветвям; для каждой серии выполнен отдельный отбор целого параметра.

Ответ:

$$-\frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{6}; \quad \frac{\pi}{2}; \quad \frac{5\pi}{6}; \quad \frac{3\pi}{2}.$$

Экзаменационный акцент: самая опасная ошибка - разделить на $\cos x$ и потерять три корня на данном промежутке.



Границы промежутка и все корни отмечены отдельно.

39. Задача 3 • линейная комбинация синуса и косинуса

Условие

Решите уравнение

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$$

на отрезке $[0; 2\pi]$.

Разбор

- Амплитуда левой части:

$$R = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

- Представляем линейную комбинацию через вспомогательный угол:

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right).$$

- Получаем

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}.$$

- Отсюда

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

- или

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

- Значит,

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

- или

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

- На $[0; 2\pi]$ остаются

$$x = \frac{11\pi}{6}, \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

Контроль полноты

Коэффициенты при синусе и косинусе точно совпали после раскрытия формулы сложения; обе серии отобраны на полном периоде.

Ответ: $\frac{\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}$.



Границы промежутка и все корни отмечены отдельно.

40. Задача 4 • равенство косинусов

Условие

Решите уравнение

$$\cos 2x = \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

и отберите корни на $[-\pi; \pi]$.

Разбор

Шаг 1.

Используем две ветви равенства косинусов:

$$2x = x + \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

- или

$$2x = -x - \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Шаг 2.

Первая ветвь:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

- На $[-\pi; \pi]$ подходит только $n = 0$, то есть $x = \frac{\pi}{3}$.

Шаг 3.

Вторая ветвь:

$$3x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}.$$

- Условие отбора

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3} \leq \pi$$

- даёт $n = -1, 0, 1$. Поэтому

$$x = -\frac{7\pi}{9}, \quad -\frac{\pi}{9}, \quad \frac{5\pi}{9}.$$

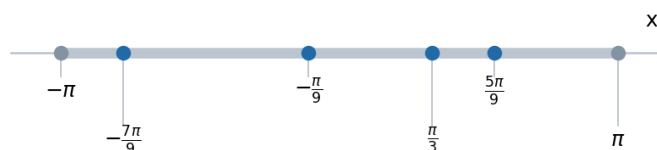
Шаг 4.

Совпадений между двумя ветвями нет.

Контроль полноты

Формула $\cos A = \cos B$ раскрыта полностью; диапазон целого параметра получен из двойного неравенства, а повторения проверены.

Ответ: $-\frac{7\pi}{9}; -\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{9}$.



Границы промежутка и все корни отмечены отдельно.

41. Задача 5 • сокращение только после ОДЗ**Условие**

Решите уравнение

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin x} = 1$$

и отберите корни на $[-\pi; 3\pi]$.

Разбор

Исходная ОДЗ:

$$\sin x \neq 0.$$

Используем тождество

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x.$$

- На ОДЗ сокращаем на $\sin x$ и получаем равносильное уравнение

$$2 \sin x = 1.$$

Общие серии:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

- или

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

На $[-\pi; 3\pi]$ первая серия даёт

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{13\pi}{6},$$

- а вторая -

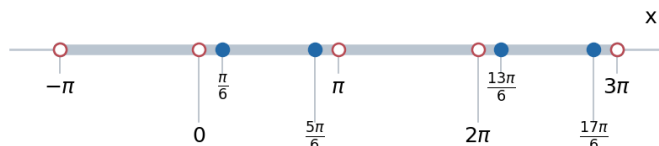
$$\frac{5\pi}{6}, \quad \frac{17\pi}{6}.$$

Контроль полноты

Все найденные значения имеют $\sin x = \frac{1}{2}$, поэтому автоматически удовлетворяют исходной ОДЗ. Других значений целого параметра на отрезке нет.

Ответ: $\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}$.

Экзаменационный акцент: сокращение стало равносильным только после записи $\sin x \neq 0$.



Точный отбор корней на заданном промежутке. Красные пустые точки исключены по ОДЗ.

42. Задача 6 • параметр и число корней на отрезке

Условие

В зависимости от параметра a определите число корней уравнения

$$|\sin x| = a$$

на отрезке $[0; 2\pi]$.

Разбор

Область значений модуля синуса:

$$0 \leq |\sin x| \leq 1.$$

- Поэтому при $a < 0$ или $a > 1$ корней нет.

При $a = 0$:

$$\sin x = 0,$$

- и на замкнутом отрезке получаются три корня:

$$0, \quad \pi, \quad 2\pi.$$

При $0 < a < 1$ горизонталь пересекает две положительные полуволны графика $|\sin x|$ по два раза. Корней четыре.

При $a = 1$:

$$|\sin x| = 1,$$

- поэтому корней два:

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}.$$

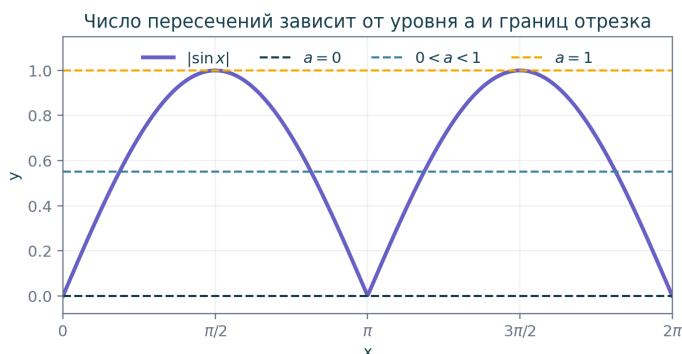


Рисунок 2. Особое число корней при $a = 0$ возникает из-за двух включённых границ отрезка.

Контроль полноты

Рассмотрены все значения параметра относительно точных границ области значений; число пересечений посчитано на обеих полуволнах и на концах.

Ответ: 0 корней при $a < 0$ или $a > 1$; 3 при $a = 0$; 4 при $0 < a < 1$; 2 при $a = 1$.

43. Итог урока

Формула общего решения должна содержать все серии.

Деление на тригонометрическую функцию допустимо только после фиксации её ненулевого значения.

Отбор выполняется отдельно для каждой серии через диапазон целого параметра.

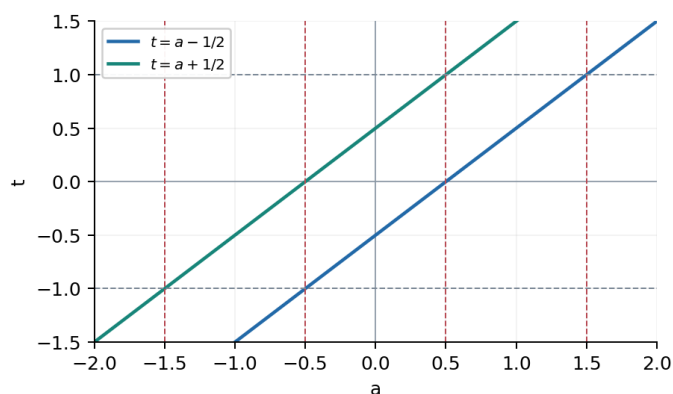
Границы промежутка проверяются вручную.

В параметрической задаче область значений и геометрия графика должны сопровождаться доказательством полноты.

44. Параметр: считаем углы, а не только корни замены

После замены $t = \sin x$ или $t = \cos x$ сначала оставляем допустимые уровни $t \in [-1; 1]$. На полуинтервале $[0; 2\pi)$ каждое внутреннее значение даёт два угла, крайнее значение -1 или 1 - один. Повторяющийся уровень учитываем один раз.

Например, $(\cos x - a)^2 = \frac{1}{4}$ даёт уровни $a - \frac{1}{2}$ и $a + \frac{1}{2}$. Границы случаев находятся из их равенства -1 или 1 , а не из приблизительного рисунка. В дробном уравнении затем обязательно исключаем нули исходного знаменателя.



Допустимы уровни t между -1 и 1 ; крайние уровни дают по одному углу.