



Рациональные и иррациональные неравенства

Задания, решения и ответы

40 заданий с пошаговыми решениями и ответами. Сначала выполните задание самостоятельно, затем сравните ход рассуждений с разбором.

01. Основа метода: задания 1–10

Задание 1

Решите неравенство

$$3x - 6 > 0.$$

Шаг 1. Переносим свободный член: $3x > 6$.

Шаг 2. Делим на положительное число, знак сохраняется.

Шаг 3. Получаем $x > 2$.

Ответ. $x > 2$



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 2

Решите неравенство

$$-2x + 8 < 0.$$

Шаг 1. Переносим свободный член: $-2x < -8$.**Шаг 2.** Делим на отрицательное число, поэтому знак неравенства меняется.**Шаг 3.** Получаем $x > 4$.**Ответ.** $x > 4$ 

Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 3

Решите неравенство

$$\sqrt{x+1} > 2.$$

ОДЗ: $x \geq -1$. Обе части неотрицательны, поэтому квадрат сохраняет знак: $x+1 > 4$, то есть $x > 3$. Это условие уже лежит в ОДЗ.

Ответ. $(3, \infty)$.

Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 4

Решите неравенство

$$\sqrt{5-x} \leq 3.$$

ОДЗ: $x \leq 5$. Возводим неотрицательные части в квадрат: $5-x \leq 9$, откуда $x \geq -4$.
Пересекаем с ОДЗ.

Ответ. $[-4, 5]$.

Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 5

Решите неравенство

$$(x+2)(x-3) \leq 0.$$

Шаг 1. Критические точки: $x = -2$ и $x = 3$.**Шаг 2.** Старший коэффициент положителен, поэтому произведение положительно вне корней и отрицательно между ними.**Шаг 3.** С учётом строгости знака получаем $[-2; 3]$.**Ответ.** $[-2; 3]$ 

Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 6

Решите неравенство

$$(x - 1)(x - 5) > 0.$$

Шаг 1. Критические точки: $x = 1$ и $x = 5$.

Шаг 2. Старший коэффициент положителен, поэтому произведение положительно вне корней и отрицательно между ними.

Шаг 3. С учётом строгости знака получаем $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 7

Решите неравенство

$$\sqrt{x+2} \leq x.$$

Шаг 1. Правая часть должна быть неотрицательной: $x \geq 0$. Это сильнее условия $x \geq -2$ под корнем.

Шаг 2. На $x \geq 0$ квадрат равносильен: $x+2 \leq x^2$. Получаем $(x-2)(x+1) \geq 0$ и пересекаем с $x \geq 0$.

Ответ. $[2, \infty)$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 8

Решите неравенство

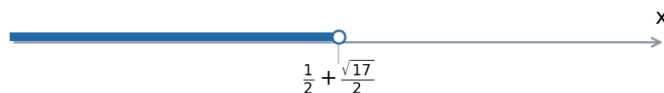
$$\sqrt{5-x} > x-1.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \leq 5$. При $x < 1$ справа отрицательное число, поэтому неравенство верно.

Шаг 2. При $1 \leq x \leq 5$ обе части неотрицательны. Квадрат даёт $5-x > (x-1)^2$, то есть $x^2 - x - 4 < 0$.

Шаг 3. Корни трёхчлена $\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$. На второй ветви остаётся $1 \leq x < \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$. Объединяем обе ветви.

Ответ. $\left(-\infty, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 9

Решите неравенство

$$\frac{x+3}{x-2} > 0.$$

Шаг 1. Нуль числителя: $x = -3$; нуль знаменателя: $x = 2$, эта точка всегда исключена.

Шаг 2. Размещаем критические точки на числовой прямой и определяем знак дроби на каждом интервале.

Шаг 3. Выбираем интервалы нужного знака и учитываем строгость:

$(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 10

Решите неравенство

$$\frac{x+1}{x-4} \leq 0.$$

Шаг 1. Нуль числителя: $x = -1$; нуль знаменателя: $x = 4$, эта точка всегда исключена.

Шаг 2. Размещаем критические точки на числовой прямой и определяем знак дроби на каждом интервале.

Шаг 3. Выбираем интервалы нужного знака и учитываем строгость: $[-1; 4)$.

Ответ. $[-1; 4)$



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

02. Преобразования и ограничения: задания 11-16**Задание 11**

Решите неравенство

$$\sqrt{2x-1} \geq x-2.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \geq \frac{1}{2}$. При $x \leq 2$ правая часть неположительна, подходят все $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Шаг 2. При $x > 2$ возводим в квадрат: $2x-1 \geq (x-2)^2$, то есть $(x-1)(x-5) \leq 0$. Вместе с $x > 2$ получаем $(2; 5]$.

Шаг 3. Объединяем ветви. В точке $x = 5$ достигается равенство.

Ответ. $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 12

Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - 4} \leq x.$$

ОДЗ: $x \leq -2$ или $x \geq 2$. Слева неотрицательное число, поэтому отрицательная ветвь не подходит. При $x \geq 2$ после квадрата остаётся $x^2 - 4 \leq x^2$, что верно всегда.

Ответ. $[2, \infty)$.

Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 13

Решите

$$|x - 2| < 3.$$

Шаг 1. Модуль - расстояние от x до точки 2.**Шаг 2.** Расстояние должно быть меньше 3.**Шаг 3.** Получаем $(-1; 5)$.**Ответ.** $(-1; 5)$ 

Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 14

Решите

$$|x - 1| \leq 4.$$

Шаг 1. Модуль - расстояние от x до точки 1.**Шаг 2.** Расстояние должно быть не больше 4.**Шаг 3.** Получаем $[-3; 5]$.**Ответ.** $[-3; 5]$ 

Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 15

Решите

$$\frac{(x + 3)(x - 2)}{(x - 1)} > 0.$$

Шаг 1. Перенос уже выполнен: выражение представляет одну рациональную дробь.**Шаг 2.** Нули числителя: -3, 2; нули знаменателя: 1.**Шаг 3.** Точки знаменателя выколоты независимо от строгости неравенства.**Шаг 4.** Расставляем критические точки по возрастанию и определяем знак на крайнем правом интервале.**Шаг 5.** При переходе через каждый простой корень знак меняется; выбираем нужные интервалы: $(-3; 1) \cup (2; +\infty)$.**Ответ.** $(-3; 1) \cup (2; +\infty)$ 

Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 16

Решите

$$\frac{(x+2)(x-4)}{x} \leq 0.$$

Шаг 1. Перенос уже выполнен: выражение представляет одну рациональную дробь.

Шаг 2. Нули числителя: -2, 4; нули знаменателя: 0.

Шаг 3. Точки знаменателя выколоты независимо от строгости неравенства.

Шаг 4. Расставляем критические точки по возрастанию и определяем знак на крайнем правом интервале.

Шаг 5. При переходе через каждый простой корень знак меняется; выбираем нужные интервалы: $(-\infty; -2] \cup (0; 4]$.

Ответ. $(-\infty; -2] \cup (0; 4]$



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

03. Повторение пройденного: задания 17-20**Задание 17**

Накопительное повторение. Решите

$$\sin x = 0.$$

Шаг 1. На единичной окружности синус равен нулю на оси абсцисс.

Шаг 2. Соответствующие углы кратны π .

Шаг 3. $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $x = \pi k$

Задание 18**Накопительное повторение.** Решите

$$3^x = 27.$$

Шаг 1. $27 = 3^3$.**Шаг 2.** Основания одинаковы.**Шаг 3.** $x = 3$.**Ответ.** 3**Задание 19****Накопительное повторение.** Решите

$$\log_2(x - 1) = 3.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x > 1$.**Шаг 2.** $x - 1 = 2^3 = 8$.**Шаг 3.** $x = 9$.**Шаг 4.** Кандидат входит в ОДЗ.**Шаг 5.** Проверка возвращает 3.**Ответ.** 9**Задание 20****Накопительное повторение.** Решите

$$\sqrt{x + 1} = x - 1.$$

Шаг 1. Нужно $x \geq 1$.**Шаг 2.** Квадрат: $x + 1 = (x - 1)^2$.**Шаг 3.** $x^2 - 3x = 0$.**Шаг 4.** Кандидаты 0 и 3.**Шаг 5.** Условие оставляет 3.**Ответ.** 3

04. Составные задачи: задания 21-30**Задание 21**

Решите неравенство

$$\sqrt{x+3} \geq \sqrt{2x-1}.$$

Совместная ОДЗ: $x \geq \frac{1}{2}$. Обе стороны неотрицательны. После возведения в квадрат: $x+3 \geq 2x-1$, откуда $x \leq 4$. Берём пересечение.

Ответ. $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 22

Решите неравенство

$$\sqrt{x+4} < 2-x.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \geq -4$. Строгое неравенство требует $2-x > 0$, то есть $x < 2$.

Шаг 2. Квадрат даёт $x+4 < (2-x)^2$, или $x(x-5) > 0$. Значит, $x < 0$ или $x > 5$.

Шаг 3. Пересекаем с $[-4; 2)$. Точка -4 входит, точка 0 не входит.

Ответ. $[-4, 0)$.

Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 23

Решите

$$\frac{(x+4)x(x-3)}{(x-2)} > 0.$$

Шаг 1. Перенос уже выполнен: выражение представляет одну рациональную дробь.

Шаг 2. Нули числителя: -4, 0, 3; нули знаменателя: 2.

Шаг 3. Точки знаменателя выколоты независимо от строгости неравенства.

Шаг 4. Расставляем критические точки по возрастанию и определяем знак на крайнем правом интервале.

Шаг 5. При переходе через каждый простой корень знак меняется; выбираем нужные интервалы: $(-\infty; -4) \cup (0; 2) \cup (3; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; -4) \cup (0; 2) \cup (3; +\infty)$



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 24

Решите

$$\frac{(x+2)(x-1)(x-5)}{(x-3)} \leq 0.$$

Шаг 1. Перенос уже выполнен: выражение представляет одну рациональную дробь.

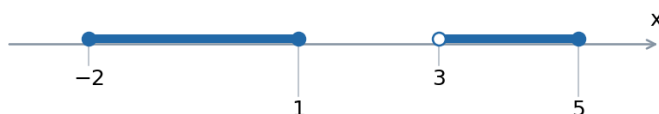
Шаг 2. Нули числителя: -2, 1, 5; нули знаменателя: 3.

Шаг 3. Точки знаменателя выколоты независимо от строгости неравенства.

Шаг 4. Расставляем критические точки по возрастанию и определяем знак на крайнем правом интервале.

Шаг 5. При переходе через каждый простой корень знак меняется; выбираем нужные интервалы: $[-2; 1] \cup (3; 5]$.

Ответ. $[-2; 1] \cup (3; 5]$



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 25

Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \geq 0.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \geq -1, x \neq 3$.**Шаг 2.** Так как $x-3 = (\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)$, на ОДЗ дробь равна $\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} > 0$.**Шаг 3.** Подходят все точки ОДЗ. После сокращения точку 3 возвращать нельзя.**Ответ.** $[-1, 3) \cup (3, \infty)$.

Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 26

Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-1} > x-1.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \leq -1$ или $x \geq 1$. На первой ветви правая часть отрицательна и неравенство верно.**Шаг 2.** На $x \geq 1$ квадрат даёт $x^2-1 > (x-1)^2$, то есть $x > 1$. При $x = 1$ обе части нулевые, строгий знак не выполнен.**Ответ.** $(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$.

Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 27

Решите

$$\frac{(x+2)(x-3)}{(x+5)(x-1)} > 0.$$

Шаг 1. Перенос уже выполнен: выражение представляет одну рациональную дробь.

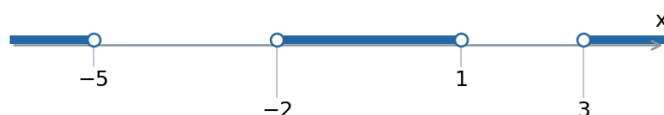
Шаг 2. Нули числителя: -2, 3; нули знаменателя: -5, 1.

Шаг 3. Точки знаменателя выколоты независимо от строгости неравенства.

Шаг 4. Расставляем критические точки по возрастанию и определяем знак на крайнем правом интервале.

Шаг 5. При переходе через каждый простой корень знак меняется; выбираем нужные интервалы: $(-\infty; -5) \cup (-2; 1) \cup (3; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; -5) \cup (-2; 1) \cup (3; +\infty)$



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 28

Решите

$$\frac{(x+4)(x-1)}{(x+2)(x-5)} \leq 0.$$

Шаг 1. Перенос уже выполнен: выражение представляет одну рациональную дробь.

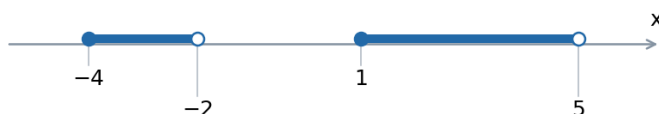
Шаг 2. Нули числителя: -4, 1; нули знаменателя: -2, 5.

Шаг 3. Точки знаменателя выколоты независимо от строгости неравенства.

Шаг 4. Расставляем критические точки по возрастанию и определяем знак на крайнем правом интервале.

Шаг 5. При переходе через каждый простой корень знак меняется; выбираем нужные интервалы: $[-4; -2) \cup [1; 5)$.

Ответ. $[-4; -2) \cup [1; 5)$



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 29

Решите неравенство

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} \geq \sqrt{6}.$$

Шаг 1. ОДЗ: $-2 \leq x \leq 2$. После квадрата неотрицательных частей получаем $4 + 2\sqrt{4-x^2} \geq 6$.

Шаг 2. Это равносильно $\sqrt{4-x^2} \geq 1$. Второй квадрат даёт $x^2 \leq 3$.

Шаг 3. Полученный отрезок целиком лежит в ОДЗ, обе границы включены.

Ответ. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 30

Решите систему

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+2} > 0, \\ x < 4 \end{cases}.$$

Шаг 1. Решаем каждое неравенство системы отдельно.

Шаг 2. Система означает пересечение множеств решений.

Шаг 3. Отмечаем оба множества на одной числовой прямой.

Шаг 4. Границы включаем только там, где это разрешено знаком и ОДЗ.

Шаг 5. Пересечение равно $(-\infty, -2) \cup (1, 4)$.

Ответ. $(-\infty, -2) \cup (1, 4)$



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

05. Развёрнутое решение: задания 31-36

Задание 31

Решите неравенство

$$\sqrt{x+3} \leq |x-1|.$$

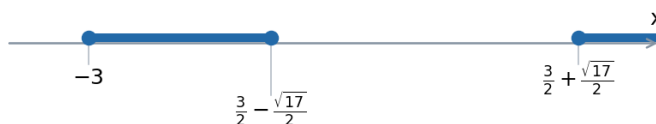
Шаг 1. ОДЗ: $x \geq -3$. Обе части неотрицательны, поэтому можно возвести их в квадрат без дополнительных ветвей.

Шаг 2. Получаем $x+3 \leq (x-1)^2$, то есть $x^2 - 3x - 2 \geq 0$. Корни равны $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Шаг 3. Берём внешние промежутки параболы и пересекаем с ОДЗ.

Ответ.

$$\left[-3, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}, \infty\right).$$



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 32

Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x-2} \leq 0.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \geq -1$, $x \neq 2$. Числитель неотрицателен и равен нулю только при $x = -1$.

Шаг 2. При $x > -1$ для отрицательной дроби нужен отрицательный знаменатель: $x < 2$. Точку -1 включаем, потому что дробь в ней равна нулю.

Ответ. $[-1, 2)$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 33

Решите неравенство

$$\frac{(x-1)^2(x+3)}{(x-2)(x+1)} \geq 0.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \neq -1$ и $x \neq 2$. Нули числителя: $x = -3$ и $x = 1$; корень $x = 1$ имеет чётную кратность.

Шаг 2. Расставим критические точки $-3, -1, 1, 2$. Справа от 2 выражение положительно.

Шаг 3. При переходе через простой корень или полюс знак меняется, а через двойной корень $x = 1$ - сохраняется.

Шаг 4. Получаем неотрицательные участки $[-3; -1)$, отдельную точку $x = 1$ и интервал $(2; +\infty)$.

Проверка полноты. Нули числителя включены, если принадлежат ОДЗ; полюса -1 и 2 исключены; кратность $x = 1$ учтена.

Ответ. $[-3; -1) \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 34

Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1} < 1.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \neq -1$ и $x \neq 1$. Перенесём единицу влево, сохраняя общий знаменатель.

Шаг 2. Получаем $\frac{x^2 - 5x + 6 - x^2 + 1}{x^2 - 1} < 0$, то есть $\frac{7 - 5x}{(x - 1)(x + 1)} < 0$.

Шаг 3. Критические точки: -1 , 1 и $\frac{7}{5}$. Таблица знаков даёт отрицательные интервалы $(-1; 1)$ и $(\frac{7}{5}; +\infty)$.

Шаг 4. Все границы исключаются: ± 1 не входят в ОДЗ, а при $x = \frac{7}{5}$ достигается нуль, тогда как неравенство строгое.

Проверка полноты. Перенос к одной дроби равносильна на ОДЗ; рассмотрены все нули числителя и знаменателя.

Ответ. $(-1; 1) \cup (\frac{7}{5}; +\infty)$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 35

Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} \geq 1.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \neq 2$ и $x \neq 3$. Перенесём единицу влево.**Шаг 2.** Получаем $\frac{x^2 - 4 - x^2 + 5x - 6}{(x - 2)(x - 3)} \geq 0$, то есть $\frac{5(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} \geq 0$.**Шаг 3.** На ОДЗ можно сократить $x - 2$ и получить $\frac{5}{x - 3} \geq 0$, но точка $x = 2$ остаётся запрещённой.**Шаг 4.** Дробь положительна при $x > 3$. Этот интервал не содержит ни одной потерянной или запрещённой внутренней точки.**Проверка полноты.** Значение $x = 2$ не возвращено после сокращения, $x = 3$ исключено; при $x > 3$ исходная дробь действительно не меньше 1.**Ответ.** $(3; +\infty)$.

Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 36

Решите неравенство

$$|x - 2| \leq \frac{x + 1}{2}.$$

Шаг 1. Правая часть должна быть неотрицательной, поэтому $x \geq -1$.**Шаг 2.** При $x \geq 2$ имеем $x - 2 \leq \frac{x + 1}{2}$, откуда $x \leq 5$. Получаем $[2; 5]$.**Шаг 3.** При $-1 \leq x < 2$ имеем $2 - x \leq \frac{x + 1}{2}$, откуда $x \geq 1$. Получаем $[1; 2)$.**Шаг 4.** Объединяя случаи, получаем $[1; 5]$.**Проверка.** На концах $x = 1$ и $x = 5$ достигается равенство; вне найденного отрезка нарушается одна из полученных линейных оценок.**Ответ.** $[1; 5]$.

Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

06. Сложные задачи и параметры: задания 37-40**Задание 37**

Решите неравенство

$$\frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 2)^2(x + 3)} < 0.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \neq -3$ и $x \neq 2$. На ОДЗ сокращаем один множитель $x - 2$ и получаем $\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x + 3)} < 0$.

Шаг 2. Критические точки $-3, -1, 1, 2$ расположены по возрастанию. Все имеют нечётную кратность, поэтому знак при каждом переходе меняется.

Шаг 3. Справа от 2 выражение положительно; отрицательные промежутки $(1; 2)$ и $(-3; -1)$.

Шаг 4. Нули -1 и 1 не включаются из-за строгого знака, полюса -3 и 2 - из-за ОДЗ.

Проверка полноты. После сокращения запрещённая точка $x = 2$ сохранена; все четыре критические точки учтены.

Ответ. $(-3; -1) \cup (1; 2)$.



Синим отмечено множество решений; пустые точки не входят в ответ.

Задание 38

Найдите все a , при которых множество решений неравенства

$$\frac{x-a}{x-3} \leq 0$$

имеет длину 5.

Шаг 1. Если $a < 3$, критические точки расположены как $a < 3$. Метод интервалов даёт множество решений $[a; 3)$, его длина равна $3 - a$.

Шаг 2. Условие $3 - a = 5$ даёт $a = -2$.

Шаг 3. Если $a > 3$, множество решений равно $(3; a]$, его длина $a - 3$. Условие $a - 3 = 5$ даёт $a = 8$.

Шаг 4. При $a = 3$ дробь равна 1 для $x \neq 3$, поэтому решений нет и длина равна нулю.

Проверка. Для $a = -2$ решение $[-2; 3)$ имеет длину 5; для $a = 8$ решение $(3; 8]$ также имеет длину 5. Все взаимные положения a и 3 разобраны.

Ответ. $a = -2; 8$.



Два допустимых положения границы: $a = -2$ и $a = 8$; точка 3 исключена.

Задание 39

Найдите все действительные a , при которых неравенство

$$|x - a| < 2$$

имеет ровно четыре целых решения x .

Шаг 1. Неравенство равносильно $a - 2 < x < a + 2$. Это открытый интервал длины 4.

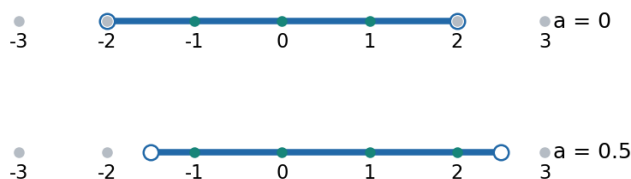
Шаг 2. Если a - целое число, его концы $a - 2$ и $a + 2$ также целые и исключены. Внутри остаются только $a - 1, a, a + 1$ - три целых числа.

Шаг 3. Если a нецелое, концы интервала не являются целыми. Любой открытый интервал длины 4 с нецелыми концами содержит ровно четыре последовательных целых числа.

Шаг 4. Значит, требование выполняется для всех и только нецелых a .

Проверка полноты. Два случая $a \in \mathbb{Z}$ и $a \notin \mathbb{Z}$ исчерпывают все действительные параметры; положение концов относительно целочисленной решётки определяет количество точек однозначно.

Ответ. $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.



При целом центре открытый интервал содержит три целых числа, при нецелом - четыре.

Задание 40

Найдите все a , при которых неравенство

$$\sqrt{x+4} \geq x-a$$

имеет ровно четыре неотрицательных целых решения x .

Шаг 1. Для неотрицательного целого n условие равносильно $a \geq g(n)$, где $g(n) = n - \sqrt{n+4}$.

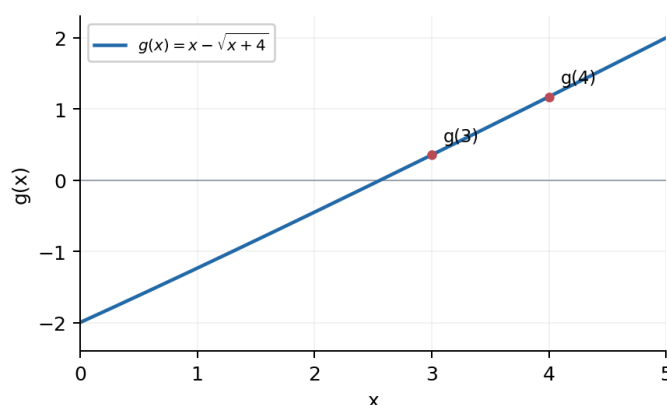
Шаг 2. Последовательность строго возрастает:

$$g(n+1) - g(n) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+4}} > 0.$$

Поэтому подходят четыре числа именно тогда, когда это 0, 1, 2, 3, а 4 уже не подходит.

Шаг 3. Требуется $g(3) \leq a < g(4)$. Левая граница включена, потому что исходный знак нестрогий; правая исключена, иначе появляется пятое целое решение.

Ответ. $a \in [3 - \sqrt{7}; 4 - 2\sqrt{2})$.



Четыре неотрицательных целых решения: уровень a достигает $g(3)$, но ещё не достигает $g(4)$.

Задания являются учебными. Их формулировки не следует считать дословными заданиями открытого банка ФИПИ.