

Урок 8. Ответы и решения

Условия, ответы и пошаговые решения всех 40 заданий.

В общих тригонометрических решениях параметр $n \in \mathbb{Z}$, то есть принимает все целые значения. Углы записываются в радианах.

01. Начальный уровень - задания 1-20

Задание 1. Начальный. Нули синуса

Решите уравнение.

$$\sin x = 0$$

Синус равен нулю на горизонтальной оси.

$$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Задание 2. Начальный. Максимум косинуса

Решите уравнение.

$$\cos x = 1$$

Косинус равен 1 в точке (1; 0) через каждый полный оборот.

$$x = 2\pi n$$

Ответ: $x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Задание 3. Начальный. Нули косинуса

Решите уравнение.

$$\cos x = 0$$

Косинус равен нулю на вертикальной оси.

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

Задание 4. Начальный. Максимум синуса

Решите уравнение.

$$\sin x = 1$$

Синус равен 1 в верхней точке окружности.

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

Задание 5. Начальный. Минимум синуса

Решите уравнение.

$$\sin x = -1$$

Синус равен -1 в нижней точке окружности.

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

Задание 6. Начальный. Нули тангенса

Решите уравнение.

$$\tan x = 0$$

Тангенс равен нулю, когда $\sin x = 0$ и $\cos x \neq 0$.

$$x = \pi n$$

Ответ: $x = \pi n$

Задание 7. Начальный. Табличный тангенс

Решите уравнение.

$$\tan x = 1$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$

Задание 8. Начальный. Минимум косинуса

Решите уравнение.

$$\cos x = -1$$

Косинус равен -1 в левой точке окружности.

$$x = \pi + 2\pi n$$

Ответ: $x = \pi + 2\pi n$

Задание 9. Начальный. Синус на одном обороте

Решите уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$.

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

Отметьте корни

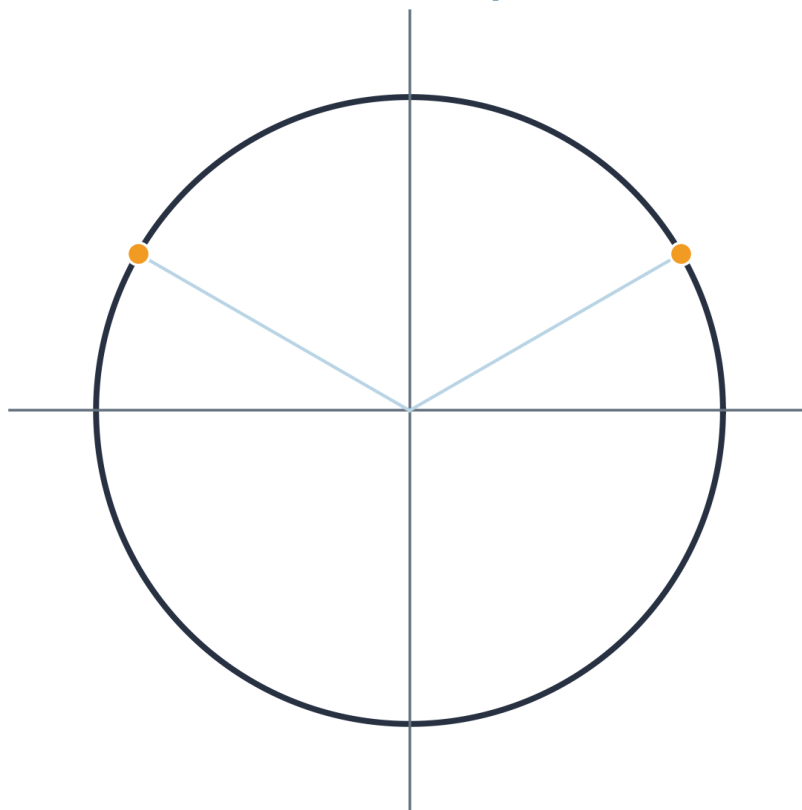


Рис. 1: Рисунок к заданию.

Горизонталь $y = 1/2$ пересекает окружность в I и II четвертях.

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ или } x = \frac{5\pi}{6}$$

Ответ: $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

Задание 10. Начальный. Косинус на одном обороте

Решите уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$.

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

Вертикаль $x = 1/2$ пересекает окружность в I и IV четвертях.

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ или } x = \frac{5\pi}{3}$$

Ответ: $x \in \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$

Задание 11. Начальный. Отрицательный синус

Решите уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$.

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Синус отрицателен в III и IV четвертях; опорный угол $\pi/4$.

$$x = \frac{5\pi}{4} \text{ или } x = \frac{7\pi}{4}$$

Ответ: $x \in \left\{\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

Задание 12. Начальный. Отрицательный косинус

Решите уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$.

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Косинус отрицателен во II и III четвертях; опорный угол $\pi/6$.

$$x = \frac{5\pi}{6} \text{ или } x = \frac{7\pi}{6}$$

Ответ: $x \in \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}$

Задание 13. Начальный. Отрицательный тангенс

Решите уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$.

$$\tan x = -1$$

Тангенс отрицателен во II и IV четвертях.

$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ или } x = \frac{7\pi}{4}$$

Ответ: $x \in \left\{\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

Задание 14. Начальный. Знак синуса

В каких четвертях синус положителен?

Синус - вертикальная координата. Выше горизонтальной оси она положительна: I и II четверти.

Ответ: I и II

Задание 15. Начальный. Логарифм

Вычислите.

$$\log_2 16$$

$$2^4 = 16$$

Ответ: 4

Задание 16. Начальный. Показательное уравнение

Решите уравнение.

$$2^x = 8$$

$$8 = 2^3$$

$$x = 3$$

Ответ: $x = 3$

Задание 17. Начальный. Основное тождество

Заполните пропуск.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \square$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Ответ: 1

Задание 18. Начальный. Приведение к синусу

Решите уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$.

$$2 \sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ или } x = \frac{5\pi}{6}$$

Ответ: $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

Задание 19. Начальный. Приведение к косинусу

Решите уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$.

$$2 \cos x = \sqrt{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ или } x = \frac{7\pi}{4}$$

Ответ: $x \in \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$

Задание 20. Начальный. Область тангенса

Закончите правило: тангенс не определён, когда ...

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Знаменатель не может быть равен нулю.

Ответ: $\cos x = 0$

02. Средний уровень - задания 21-35**Задание 21. Средний. Синус: две точки**

Решите уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$.

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Опорный угол $\pi/3$, синус положителен в I и II четвертях.

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ или } x = \frac{2\pi}{3}$$

Ответ: $x \in \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$

Задание 22. Средний. Косинус: две точки

Решите уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$.

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

Опорный угол $\pi/3$, косинус отрицателен во II и III четвертях.

$$x = \frac{2\pi}{3} \text{ или } x = \frac{4\pi}{3}$$

Ответ: $x \in \left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$

Задание 23. Средний. Общее решение тангенса

Решите уравнение.

$$\tan x = \sqrt{3}$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$

Задание 24. Средний. Квадрат синуса

Решите уравнение.

$$2 \sin^2 x - 1 = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$

Задание 25. Средний. Квадрат косинуса

Решите уравнение.

$$2 \cos^2 x - 1 = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ **Задание 26. Средний. Произведение функций**

Решите уравнение.

$$\sin x \cos x = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ или } \cos x = 0$$

$$x = \pi n \text{ или } x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi n}{2}$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2}$ **Задание 27. Средний. Разложение на ветви**

Решите уравнение.

$$\sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ или } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pi n \text{ или } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

Ответ: $x = \pi n \text{ или } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

Задание 28. Средний. Двойной аргумент

Решите уравнение.

$$\cos 2x = 1$$

$$2x = 2\pi n$$

$$x = \pi n$$

Ответ: $x = \pi n$ **Задание 29. Средний. Двойной аргумент**

Решите уравнение.

$$\sin 2x = 0$$

$$2x = \pi n$$

$$x = \frac{\pi n}{2}$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2}$ **Задание 30. Средний. Сдвиг аргумента**

Решите уравнение.

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 0$$

$$x - \frac{\pi}{6} = \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$ **Задание 31. Средний. Отбор корней**Решите уравнение на промежутке $[-\pi; \pi]$.

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n$$

В промежуток входят значения $n = -1, 0, 1$.

$$x = -\pi, 0, \pi$$

Ответ: $x \in \{-\pi; 0; \pi\}$

Задание 32. Средний. Отбор корней

Решите уравнение на промежутке $[0; \pi]$.

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

На $[0; \pi]$ находится только $\pi/3$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3}$

Задание 33. Средний. Показательное уравнение

Решите уравнение.

$$5^{x-1} = 25$$

$$25 = 5^2$$

$$x - 1 = 2$$

$$x = 3$$

Ответ: $x = 3$

Задание 34. Средний. Логарифмическое уравнение

Решите уравнение.

$$\log_2(x - 1) = 3$$

$$x > 1$$

$$x - 1 = 8$$

$$x = 9$$

Ответ: $x = 9$

Задание 35. Средний. Иррациональное уравнение

Решите уравнение.

$$\sqrt{x+1} = x-1$$

$$x \geq 1$$

$$x+1 = (x-1)^2$$

$$x(x-3) = 0$$

Подходит только $x = 3$.**Ответ:** $x = 3$ **03. Сложный уровень - задания 36-40****Задание 36. Повышенный. Квадрат синуса**

Решите уравнение.

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n \text{ или } x = \frac{2\pi}{3} + \pi n$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$ или $x = \frac{2\pi}{3} + \pi n$ **Задание 37. Повышенный. Квадратное относительно косинуса**

Решите уравнение.

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(2 \cos x - 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ или } \cos x = 1$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \text{ или } x = 2\pi n$$

Ответ: $x = 2\pi n$ или $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

Задание 38. Повышенный. Формула двойного угла

Решите уравнение.

$$2 \sin x \cos x = 1$$

$$\sin 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ **Задание 39. Повышенный. Однородное уравнение**

Решите уравнение.

$$\sin x + \cos x = 0$$

При $\cos x = 0$ исходное уравнение не выполняется, поэтому можно разделить на $\cos x$.

$$\tan x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ **Задание 40. Повышенный. Отбор после замены**Решите уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$.

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ или } \sin x = -1$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$$

Ответ: $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$